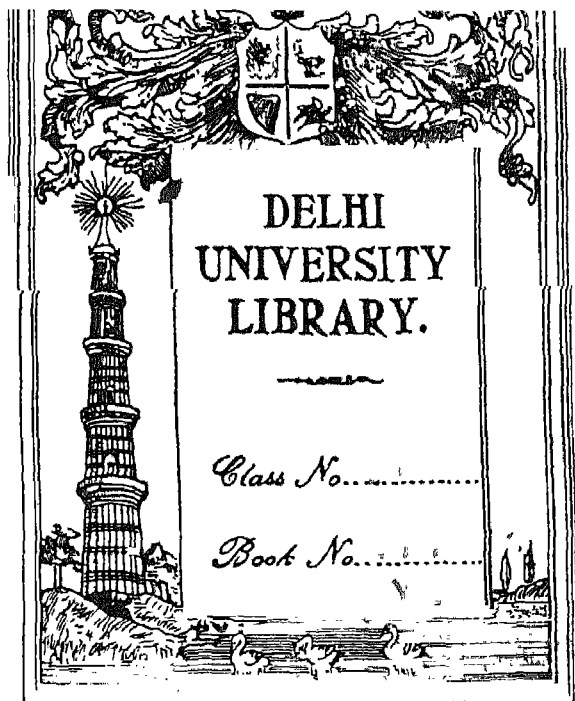




DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. B52

168 N19.1

Date of release for loan

Ac. No. 2346

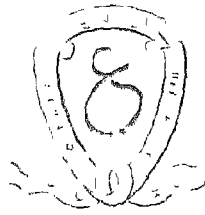
This book should be returned on or before the date last stamped below.

An overdue charge of one anna will be charged for each day the book is kept overtime.

1

1

1



ع

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

علم و ملت مستوی

حصہ اول

انٹرمیڈیٹ کے لئے برنابے ٹرگنو مٹری لوئی حصہ اول

مترجم

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے۔ (پنجاب)

بی۔ اے، ایل ایل۔ بی (کیرج) ریٹائرڈ ۱۹۱۲ء قلمی ایگزیشنز (پنجاب)

گورنمنٹ آف انڈیا سکالر کیرج (ریاضیات) اینیول ایگزیشنز کیرج (ریاضیات)

اینیول فوڈلشن سکالر کیرج (ریاضیات)

رکن سرشتہ تالیف و ترجمہ

جامعہ عثمانیہ

۱۳۳۸ھ ۱۳۲۹ھ ۱۹۱۹ء

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

یہ کتاب سکیلن کمپنی کی اجازت سے
جن کو حقوق کا پی رائٹ حاصل ہیں
طبع کی گئی ہے۔

مُقَدِّمہ

• (•••) •

دنیا میں ہر قوم کی زندگی میں ایک ایسا زمانہ آتا ہے جب کہ اُس کے قوائے ذہنی میں انحطاط کے آثار نمودار ہونے لگتے ہیں، ایجاد و اختراع اور غور و فکر کا مادہ تقریباً مفقود ہو جاتا ہے، تخیل کی پرواز اور نظر کی جولانی تنگ اور محدود ہو جاتی ہے، علم کا دار و مدار چند رسمی باتوں اور تقلید پر رہ جاتا ہے۔ اُس وقت قوم یا تو بیکار اور مردہ ہو جاتی ہے یا سنبھلنے کے لئے یہ لازم ہوتا ہے کہ وہ دوسری ترقی یافتہ اقوام کا اثر قبول کرے۔ تاریخ عالم کے ہر دور میں اس کی شہادتیں موجود ہیں۔ خود ہمارے دیکھتے دیکھتے جاپان پر یہی گزری اور یہی حالت اب ہندوستان کی ہے۔ جس طرح کوئی شخص دوسرے بنی نوع انسان سے قطع تعلق کر کے تنہا اور الگ تھلک نہیں رہ سکتا اور اگر رہے تو پنپ

نہیں سکتا اسی طرح یہ بھی ممکن نہیں کہ کوئی قوم دیگر اقوام عالم سے بے نیاز ہو کر پھولے پھلے اور ترقی پائے۔ جس طرح ہوا کے جھونکے اور ادنیٰ پرندوں اور کیڑے مکوڑوں کے اثر سے وہ مقامات تک ہرے بھرے رہتے ہیں جہاں انسان کی دسترس نہیں اسی طرح انسانوں اور قوموں کے اثر بھی ایک دوسرے تک اڑ کر پہنچتے ہیں۔ جس طرح یونان کا اثر روم اور دیگر اقوام یورپ پر پڑا جس طرح عرب نے عجم کو اور عجم نے عرب کو اپنا فیض پہنچایا، جس طرح اسلام نے یورپ میں تاریکی اور جہالت کو مٹا کر علم کی روشنی پہنچائی اسی طرح آج ہم بھی بہت سی باتوں میں مغرب کے محتاج ہیں۔ یہ قانون عالم ہے جو یوں ہی جاری رہا اور جاری رہے گا۔

”دن سے دیا یوں ہی جلتا رہا ہے“

جب کسی قوم کی نوبت یہاں تک پہنچ جاتی ہے اور وہ آگے قدم بڑھانے کی سعی کرتی ہے تو ادبیات کے میدان میں پہلی منزل ترجمہ ہوتی ہے۔ اس لئے کہ جب قوم میں جدت اور ایج نہیں رہی تو ظاہر ہے کہ اس کی تصانیف معمولی ادھوری کم مایہ اور ادنیٰ ہونگی۔ اُس وقت قوم کی بڑی خدمت یہی ہے کہ ترجمہ کے ذریعہ سے دنیا کی اعلیٰ درجہ کی تصانیف اپنی زبان میں لائی جائیں۔ یہی ترجمے خیالات میں تغیر اور معلومات میں اضافہ کریں گے، جمود کو توڑیں گے اور قوم میں ایک نئی حرکت پیدا کریں گے اور پھر آخر یہی ترجمے تصنیف و تالیف

کے جدید اسلوب اور ڈسٹنگ سبجائیں گے۔ ایسے وقت میں ترجمہ تصنیف سے زیادہ قابل قدر زیادہ مفید اور زیادہ فیض رساں ہوتا ہے۔

اسی اصول کی بنا پر جب عثمانیہ یونیورسٹی کی تجویز پیش ہوئی تو ہزار اکرالڈ ہائینس رستم دوراں ارسطوئے زماں سے سالار آصف جاہ مظفر الممالک نظام الملک نظام الدولہ **نَوَابِ مِيرِ عُمَانِ عَلِيخان بَهادر فتح جنگ** جی۔ سی۔ اس۔ آئی۔ جی۔ سی۔ بی۔ ای۔ والی حیدرآباد دکن خلد اللہ ملکہ و سلطنت نے جن کی علمی قدردانی اور علمی سرپرستی اس زمانہ میں اچیلئے علوم کے حق میں آب حیات کا کام کر رہی ہے، یہ تقاضائے مصلحت و دور بینی سب سے اول سرشتہ تالیف و ترجمہ کے قیام کی منظوری عطا فرمائی جو نہ صرف یونیورسٹی کے لئے نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کر چکا بلکہ ملک میں نشر و اشاعت علوم و فنون کا کام بھی انجام دیا۔ اگرچہ اس سے قبل بھی یہ کام ہندوستان کے مختلف مقامات میں تھوڑا تھوڑا انجام پایا مثلاً فورٹ ولیم کالج کلکتہ میں زیر نگرانی ڈاکٹر گلکرسٹ، دہلی سوسائٹی میں انجن پنجاب میں زیر نگرانی ڈاکٹر لائٹن و کرنل ہارلڈ، علی گڑھ سائنٹفک انسٹیٹیوٹ میں جس کی بنا سر سید احمد خاں مرحوم نے ڈالی۔ مگر یہ کوششیں سب وقتی اور عارضی تھیں۔ نہ اُنکے پاس کافی سرمایہ اور سامان تھا نہ انہیں یہ موقع حاصل تھا

اور نہ انہیں **اَعْلَمَضَتْ وَاَقْلَسَ** جیسے علم پرور
فرمانروا کی سرپرستی کا شرف حاصل تھا۔ یہ پہلا وقت ہے کہ
اردو زبان کو علوم و فنون سے مالا مال کرنے کے لئے باقاعدہ
اور مستقل کوشش کی گئی ہے۔ اور یہ پہلا وقت ہے کہ
اردو زبان کو یہ رتبہ ملا ہے کہ وہ اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار
پائی ہے۔ احیائے علوم کے لئے جو کام آگسٹس نے رومہ میں
خلافت عباسیہ میں ہارون الرشید و مامون الرشید نے ہسپانیہ میں
عبدالرحمن ثالث نے، بکراجیت و اکبر نے ہندوستان میں،
الفرڈ نے انگلستان میں، پیٹر اعظم و کیتھرائن نے روس میں
اور مت شی ہٹون نے جاپان میں کیا، وہی فرمانروائے دولت
اَصْفِيَه نے اس ملک کے لئے کیا۔ **اَعْلَمَضَتْ وَاَقْلَسَ**
کا یہ کارنامہ ہندوستان کی علمی تاریخ میں ہمیشہ فخر و مباہات
کے ساتھ ذکر کیا جائیگا۔

منجملہ اُن اسباب کے جو قومی ترقی کا موجب ہوتے ہیں ایک
بڑا سبب زبان کی تکمیل ہے۔ جس قدر جو قوم زیادہ ترقی یافتہ
ہے اُسی قدر اُس کی زبان وسیع اور اس میں نازک خیالات
اور علمی مطالب کے ادا کرنے کی زیادہ صلاحیت ہوتی ہے،
اور جس قدر جس قوم کی زبان محدود ہوتی ہے اُسی قدر تنہیب
و شایستگی بلکہ انسانیت میں اس کا درجہ کم ہوتا ہے۔ چنانچہ
وحشی اقوام میں الفاظ کا ذخیرہ بہت ہی کم پایا گیا ہے۔ علمائے
فلسفہ و علم اللسان نے یہ ثابت کیا ہے کہ زبان، خیال اور

خیال، زبان ہے اور ایک مدت کے بعد اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ انسانی دماغ کے صحیح تاریخی ارتقا کا علم، زبان کی تاریخ کے مطالعہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔ الفاظ ہمیں سوچنے میں ویسی ہی مدد دیتے ہیں جیسی آنکھیں دیکھنے میں۔ اس لئے زبان کی ترقی درحقیقت عقل کی ترقی ہے۔

علم ادب اسی قدر وسیع ہے جس قدر حیات انسانی۔ اور اس کا اثر زندگی کے ہر شعبہ پر پڑتا ہے۔ وہ نہ صرف انسان کی ذہنی، معاشرتی، سیاسی ترقی میں مدد دیتا، اور نظر میں سمٹتا، دماغ میں روشنی، دلوں میں حرکت اور خیالات میں تغیر پیدا کرتا ہے بلکہ قوموں کے بنانے میں ایک قوی آلہ ہے۔ قومیت کے لئے ہم خیالی شرط ہے اور ہم خیالی کے لئے ہم زبانی لازم۔ گویا ایک زبانی قومیت کا شیرازہ ہے جو اسے منتشر ہونے سے بچائے رکھتا ہے۔ ایک زمانہ تھا جب کہ مسلمان اقطاع عالم میں پھیلے ہوئے تھے لیکن اُن کے علم ادب اور زبان نے انہیں ہر جگہ ایک کر رکھا تھا۔ اس زمانے میں انگریز ایک دنیا پر چھائے ہوئے ہیں لیکن بادیود بعد مسافت و اختلاف حالات ایک زبانی کی بدولت قومیت کے ایک سلسلے میں منسلک ہیں، زبان میں جادو کا سا اثر ہے اور صرف افراد ہی پر نہیں بلکہ اقوام پر بھی اُس کا وہی تسلط ہے۔

یہی وجہ ہے کہ تعلیم کا صحیح اور فطرتی ذریعہ اپنی ہی زبان ہو سکتی ہے۔ اس امر کو **أَعْلَمُكُمْ سِتِّ وَأَقْلَسُ** نے

پہچانا اور جامعہ عثمانیہ کی بنیاد ڈالی۔ جامعہ عثمانیہ ہندوستان میں پہلی یونیورسٹی ہے جس میں ابتداء سے ابتدا تک ذریعہ تعلیم ایک دیسی زبان ہوگا۔ اور یہ زبان اردو ہوگی۔ ایک ایسے ملک میں جہاں ”ہانت۔ہانت کی بولیاں“ بولی جاتی ہیں، جہاں ہر صوبہ، ایک نیا عالم ہے، صرف اردو ہی ایک عام اور مشترک زبان ہو سکتی ہے۔ یہ اہل ہند کے سب جمل سے پیدا ہوئی اور اب بھی یہی اس فرض کو انجام دیگی۔ یہ اس کے خمیر اور وضع و ترکیب میں ہے۔ اس لئے یہی تعلیم اور تبادلہ خیالات کا واسطہ بن سکتی اور قومی زبان کا دعویٰ کر سکتی ہے۔

جب تعلیم کا ذریعہ اردو قرار دیا گیا تو یہ کھلا اعتراض تھا کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کتابوں کا ذخیرہ کہاں ہے اور ساتھ ہی یہ بھی کہا جاتا تھا کہ اردو میں یہ صلاحیت ہی نہیں کہ اس میں علوم و فنون کی اعلیٰ تعلیم ہو سکے۔ یہ صیح ہے کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کافی ذخیرہ نہیں۔ اور اردو ہی پر کیا منحصر ہے، ہندوستان کی کسی زبان میں بھی نہیں۔ یہ طلب و رسد کا عام مسئلہ ہے۔ جب مانگ ہی نہ تھی تو رسد کہاں سے آتی۔ جب ضرورت ہی نہ تھی تو کتابیں کیونکر مہیا ہوتیں۔ ہماری اعلیٰ تعلیم غیر زبان میں ہوتی تھی، تو علوم و فنون کا ذخیرہ ہماری زبان میں کہاں سے آتا۔ ضرورت ایجاد کی مان ہے۔ اب ضرورت محسوس ہوئی ہے تو کتابیں بھی

میتا ہو جائیں گی۔ اسی کمی کو پورا کرنے اور اسی ضرورت کو رفع کرنے کے لئے سررشتہ تالیف و ترجمہ قائم کیا گیا۔ یہ صحیح نہیں ہے کہ اردو زبان میں اس کی صلاحیت نہیں۔ اس کے لئے کسی دلیل و برہان کی ضرورت نہیں۔ سررشتہ تالیف و ترجمہ کا وجود اس کا شافی جواب ہے۔ یہ سرشتہ ہی کام کر رہا ہے۔ کتابیں تالیف و ترجمہ ہو رہی ہیں اور چند روز میں عثمانیہ یونیورسٹی کالج کے طالب علموں کے ہاتھوں میں ہونگی اور رفتہ رفتہ عام شائقین علم تک پہنچ جائیں گی۔

لیکن اس میں سب سے کٹھن اور سنگلاخ مرحلہ وضع اصطلاحات کا تھا۔ اس میں بہت کچھ اختلاف اور بحث کی گنجائش ہے۔ اس بارے میں ایک مدت کے تجربہ اور کامل غور و فکر اور مشورہ کے بعد میری یہ رائے قرار پائی ہے کہ تنہا نہ تو ماہر علم صحیح طور سے اصطلاحات وضع کر سکتا ہے اور نہ ماہر لسان۔ ایک کو دوسرے کی ضرورت ہے۔ اور ایک کی کمی دوسرا پورا کرتا ہے۔ اس لئے اس اہم کام کو صحیح طور سے انجام دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ دونوں یک جا جمع کئے جائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کے مشورہ اور مدد سے ایسی اصطلاحات بنائیں جو نہ اہل علم کو ناگوار ہوں نہ اہل زبان کو۔ چنانچہ اسی اصول پر ہم نے وضع اصطلاحات کے لئے ایک ایسی مجلس بنائی جس میں دونوں جماعتوں کے اصحاب شریک ہیں۔ علاوہ ان کے

ہم نے اُن اہل علم سے بھی مشورہ کیا جو اس کی خاص اہلیت رکھتے ہیں اور بُعد مسافت کی وجہ سے ہماری مجلس میں شریک نہیں ہو سکتے۔ اس میں شک نہیں کہ بعض الفاظ غیر مانوس معلوم ہوں گے اور اہل زبان انہیں دیکھ کر ناک بہوں پڑھائیں گے۔ لیکن اس سے گزیر نہیں۔ ہمیں بعض ایسے علوم سے واسطہ ہے جن کی ہوا تک ہماری زبان کو نہیں لگی۔ ایسی صورت میں سوائے اس کے چارہ نہیں کہ جب ہماری زبان کے موجودہ الفاظ خاص خاص مفہوم کے ادا کرنے سے قاصر ہوں تو ہم جدید الفاظ وضع کریں۔ لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ ہم نے محض ٹالنے کے لئے زیر دستی الفاظ گھڑ کر رکھ دئے ہیں بلکہ جس نہج پر اب تک الفاظ بنتے چلے آئے ہیں اور جن اصول ترکیب و اشتقاق پر اب تک ہماری زبان کار بند رہی ہے، اس کی پوری پابندی ہم نے کی ہے۔ ہم نے اُس وقت تک کسی لفظ کے بنانے کی جرأت نہیں کی جب تک اُسی قسم کی متحد مثالیں ہمارے پیش نظر نہ رہی ہوں۔ ہماری رائے میں جدید الفاظ کے وضع کرنے کی اس سے بہتر اور صحیح کوئی صورت نہیں۔ اب اگر کوئی لفظ غیر مانوس یا اجنبی معلوم ہو تو اس میں ہمارا قصور نہیں۔ جو زبان زیادہ تر شعر و شاعری اور قصص تک محدود ہو، وہاں ایسا ہونا کچھ تعجب کی بات نہیں۔ جس ملک سے ایجاد و اختراع کا مادہ سلب ہو گیا ہو جہاں لوگ نئی چیزوں کے بنانے اور دیکھنے کے عادی نہ ہوں، وہاں جدید الفاظ کا

غیر مانوس اور اجنبی معلوم ہونا موجب حیرت نہیں۔ الفاظ کی حالت بھی انسانوں کی سی ہے۔ اجنبی شخص بھی رفتہ رفتہ مانوس ہو جاتے ہیں۔ اول اول الفاظ کا بھی یہی حال ہے۔ استعمال آہستہ آہستہ غیر مانوس کو مانوس کر دیتا ہے اور صحت و غیر صحت کا فیصلہ زمانہ کے ہاتھ میں ہوتا ہے۔ ہمارا فرض یہ ہے کہ لفظ تجویز کرتے وقت ہر پہلو پر کامل غور کر لیں، آئندہ چل کر اگر وہ استعمال اور زمانہ کی کسوٹی پر پورا اترتا تو خود ٹکسالی ہو جائیگا اور اپنی جگہ آپ پیدا کر لیگا۔ علاوہ اس کے جو الفاظ پیش کئے گئے ہیں وہ الہامی نہیں کہ جن میں رد و بدل نہ ہو سکے، بلکہ **فرہنگ اصطلاحات عثمانیہ** جو زیر ترتیب ہے پہلے اس کا مسودہ اہل علم کی خدمت میں پیش کیا جائے گا اور جہاں تک ممکن ہوگا اس کی اصلاح میں کوئی دقیقہ فرو گذاشت نہیں کیا جائے گا۔

لیکن ہماری مشکلات صرف اصطلاحات علمیہ تک ہی محدود نہیں ہیں۔ ہمیں ایک ایسی زبان سے ترجمہ کرنا پڑتا ہے جو ہمارے لئے بالکل اجنبی ہے، اس میں اور ہماری زبان میں کسی قسم کا کوئی رشتہ یا تعلق نہیں۔ اس کا طرز بیان، ادائے مطلب کے اسلوب، محاورات وغیرہ بالکل جدا ہیں۔ جو الفاظ اور جملے انگریزی زبان میں بالکل معمولی اور روزمرہ کے استعمال میں آتے ہیں، اُن کا ترجمہ جب ہم اپنی زبان میں کرنے بیٹھتے ہیں تو سخت دشواری پیش آتی ہے۔ ان تمام دشواریوں پر

غالب آنے کے لئے مترجم کو کیسا کچھ خون جگر کھانا نہیں پڑتا۔ ترجمہ کا کام جیسا کہ عموماً خیال کیا جاتا ہے، کچھ آسان کام نہیں ہے۔ بہت خاک چھاننی پڑتی ہے تب کہیں گوہر مقصود ہاتھ آتا ہے۔ اس سرشت کا کام صرف یہی نہ ہوگا (اگرچہ یہ اس کا فرض اولین ہے) کہ وہ نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کرے، بلکہ اس کے علاوہ وہ ہر علم پر متعدد اور کثرت سے کتابیں تالیف و ترجمہ کرائے گا، تاکہ لوگوں میں علم کا شوق بڑھے، ملک میں روشنی پھیلے، خیالات و قلوب پر اثر پیدا ہو، جمالت کا استیصال ہو۔ جمالت کے معنی اب لاعلمی ہی کے نہیں بلکہ اس میں افلاس، کم ہمتی، تنگ دلی، کوتاہ نظری، بے غیرتی، بد اخلاقی سب کچھ آجاتا ہے۔ جمالت کا مقابلہ کر کے اسے پس پا کرنا سب سے بڑا کام ہے۔ انسانی دماغ کی ترقی علم کی ترقی ہے۔ انسانی ترقی کی تاریخ علم کی اشاعت و ترقی کی تاریخ ہے۔ ابتدائے آفرینش سے اس وقت تک انسان نے جو کچھ کیا ہے، اگر اس پر ایک وسیع نظر ڈالی جائے تو نتیجہ یہ نکلے گا کہ جوں جوں علم میں اضافہ ہوتا گیا، پچھلی غلطیوں کی صحت ہوتی گئی، تاریکی گھٹتی گئی، روشنی بڑھتی گئی، انسان میدان ترقی میں قدم آگے بڑھاتا گیا۔ اسی مقدس فرض کے ادا کرنے کے لئے یہ سرشت قائم کیا گیا ہے اور وہ اپنی بساط کے موافق اس کے انجام دینے میں کوتاہی نہ کرے گا۔

لیکن غلطی، تحقیق و جستجو کی گھٹات میں لگی رہتی ہے۔ ادب کا

کمال ذوق سلیم ہر ایک کو نصیب نہیں ہوتا۔ بڑے بڑے نقاد اور مبشر فاش غلطیاں کر جاتے ہیں۔ لیکن اس سے ان کے کام پر حرف نہیں آتا۔ غلطی ترقی کے مانع نہیں ہے، بلکہ وہ صحت کی طرف رہتلائی کرتی ہے پچھلوں کی بھول چوک آنے والے مسافر کو رستہ بھٹکنے سے بچا دیتی ہے۔ ایک جاپانی ماہر تعلیم (ہیرن کی کوچی) نے اپنے ملک کا تعلیمی حال لکھتے ہوئے اس صحیح کیفیت کا ذکر کیا ہے جو ہونہار اور ترقی کرنے والے افراد اور اقوام پر گزرتی ہے۔

”ہم نے بہت سے تجربے کئے اور بہت سی ناکامیاں اور غلطیاں ہوئیں، لیکن ہم نے ان سے نئے سبق سیکھے اور فائدہ اٹھایا۔ رفتہ رفتہ ہمیں اپنے ملک کی تعلیمی ضروریات اور امکانات کا صحیح اور بہتر علم ہوتا گیا اور ایسے تعلیمی طریقے معلوم ہوتے گئے جو ہمارے اہل وطن کے لئے زیادہ موزوں تھے۔ ابھی بہت سے ایسے مسائل ہیں جو ہمیں حل کرنے میں بہت سی ایسی اصلاحیں ہیں جو ہمیں عمل میں لانی ہیں، ہم نے اب تک کوشش کی اور ابھی کوشش کر رہے ہیں اور مختلف طریقوں کی برائیاں اور بھلائیاں دریافت کرنے کے درپے ہیں، تاکہ اپنے ملک کے فائدے کے لئے اچھی باتوں کو اختیار کریں اور رواج دیں اور برائیوں سے بچیں۔ اس لئے جو حضرات ہمارے کام پر تنقیدی نظر ڈالیں انہیں وقت کی تنگی، کام کا ہجوم اور اس کی اہمیت اور ہماری مشکلات پیش نظر رکھنی چاہئیں۔ یہ پہلی سعی ہے اور پہلی سعی میں کچھ نہ کچھ خامیاں

ضرور رہ جاتی ہیں، لیکن آگے چل کر یہی خامیاں ہماری رہنما بنیں گی اور پختگی اور اصلاح تک پہنچائیں گی۔ یہ نقش اول ہے نقش ثانی اس سے بہتر ہوگا۔ ضرورت کا احساس علم کا شوق، حقیقت کی لگن، صحت کی ٹوہ، جدوجہد کی رسائی خود بخود ترقی کے مدارج طے کر لے گی۔

جاپانی بڑے فخر سے یہ کہتے ہیں کہ ہم نے تیس چالیس سال کے عرصے میں وہ کچھ کر دکھایا جس کے انجام دینے میں یورپ کو اتنی ہی صدیاں صرف کرنی پڑیں۔ کیا کوئی دن ایسا آئے گا کہ ہم بھی یہ کہنے کے قابل ہوں گے؟ ہم نے پہلی شرط پوری کر دی ہے یعنی بیجا قیود سے آزاد ہو کر اپنی زبان کو اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار دیا ہے۔ لوگ ابھی ہمارے کام کو تذبذب کی نگاہ سے دیکھ رہے ہیں اور ہماری زبان کی قابلیت کی طرف مشتتبہ نظریں ڈال رہے ہیں۔ لیکن وہ دن آنے والا ہے کہ اس ذرے کا بھی ستارہ بن سکے گا، یہ زبان علم و حکمت سے مالا مال ہوگی اور

اَعْلٰی حَضَرَتِ وَاَقْلَسْ کی نظر کیسا اثر کی بدولت یہ دنیا کی مذہب و شایستہ زبانوں کی ہمسری کا دعوے کرے گی۔ اگرچہ اُس وقت ہماری سنی اور محنت خیز معلوم ہوگی، مگر یہی شامِ غربت صبحِ وطن کی آمد کی خبر دے رہی ہے، یہی شبِ بیدار روزِ روشن کا جلوہ دکھائیں گی، اور یہی مشقت اُس قصرِ رفیع الشان کی بنیاد ہوگی جو آئندہ تعمیر ہونے والا ہے۔ اس وقت ہمارا کام صبر و استقلال سے میدانِ صاف کرنا،

داغ بیل ڈالنا اور نیو کھودنا ہے، اور فرہاد وار شیریں حکمت کی خاطر سنگلاخ پہاڑوں کو کھود کھود کر جوئے علم لانے کی سعی کرتا ہے۔ اور گو ہم نہ ہوں گے مگر ایک زمانہ آئیگا جب کہ اس میں علم و حکمت کے دریا بہیں گے اور ادبیات کی افتادہ زمین سرسبز و شاداب نظر آئے گی۔

آخر میں میں سرشتہ کے مترجمین کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے اپنے فرض کو بڑی مستعدی اور شوق سے انجام دیا۔ نیز میں ارکان مجلس وضع اصطلاحات کا شکر گزار ہوں کہ ان کے مفید مشورے اور تحقیق کی مدد سے یہ مشکل کام بخوبی انجام پا رہا ہے۔ لیکن خصوصیت کے ساتھ یہ سرشتہ جناب مسٹر محمد اکبر حیدری بی۔ اے معتمد عدالت و تعلیمات و کوٹوالی و امور عامہ سرکار عالی کا ممنون ہے جنہیں ابتدا سے قیام و انتظام جامعہ عثمانیہ میں خاص انہماک رہا ہے۔ اور اگر ان کی توجہ اور امداد ہمارے شریک حال نہ ہوتی تو یہ عظیم الشان کام صورت پذیر نہ ہوتا۔ میں سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (آکسن) آئی۔ ائی۔ ایس۔ ناظم تعلیمات سرکار عالی کا بھی شکریہ ادا کرتا ہوں کہ ان کی توجہ اور عنایت ہمارے حال پر مبذول رہی اور ضرورت کے وقت ہمیشہ بلا تکلف خوشی کے ساتھ ہمیں مدد دی۔

عبدالحق

ناظم سرشتہ تالیف و ترجمہ (عثمانیہ یونیورسٹی)

ارکانِ تعلیم و تربیت

مولوی مرزا مہدی خاں صاحب کوکب ولیفہ یاب نگار عالی (سابق ناظم مروجہ شہر)
 مولوی حمید الدین صاحب بی۔ اے صدر دارالعلوم
 نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی)
 مولوی حمید الدین صاحب سلیم ناظم سرشتہ تالیف و ترجمہ
 مولوی عبدالحق بی۔ اے

علاوہ ان مستقل ارکان کے ، مترجمین سرشتہ تالیف و ترجمہ نیز
 دوسرے اصحاب سے بطاقت اُنکے فن کے مشورہ کیا گیا۔ مثلاً
 خان فضل محمد خان صاحب ایم۔ اے ریکٹر (پرنسپل ٹی ہائی اسکول حیدرآباد)
 مولوی عبد الواسع صاحب (پروفیسر دارالعلوم حیدرآباد)
 پروفیسر عبدالرحمن صاحب بی۔ اے سی (نظام کالج)
 مرزا محمد ہادی صاحب بی۔ اے (پروفیسر کرپن کالج لکھنؤ)
 مولوی سلیمان صاحب ندوی
 بیداس مسعود صاحب بی۔ اے (ناظم تعلیمات حیدرآباد) وغیرہ

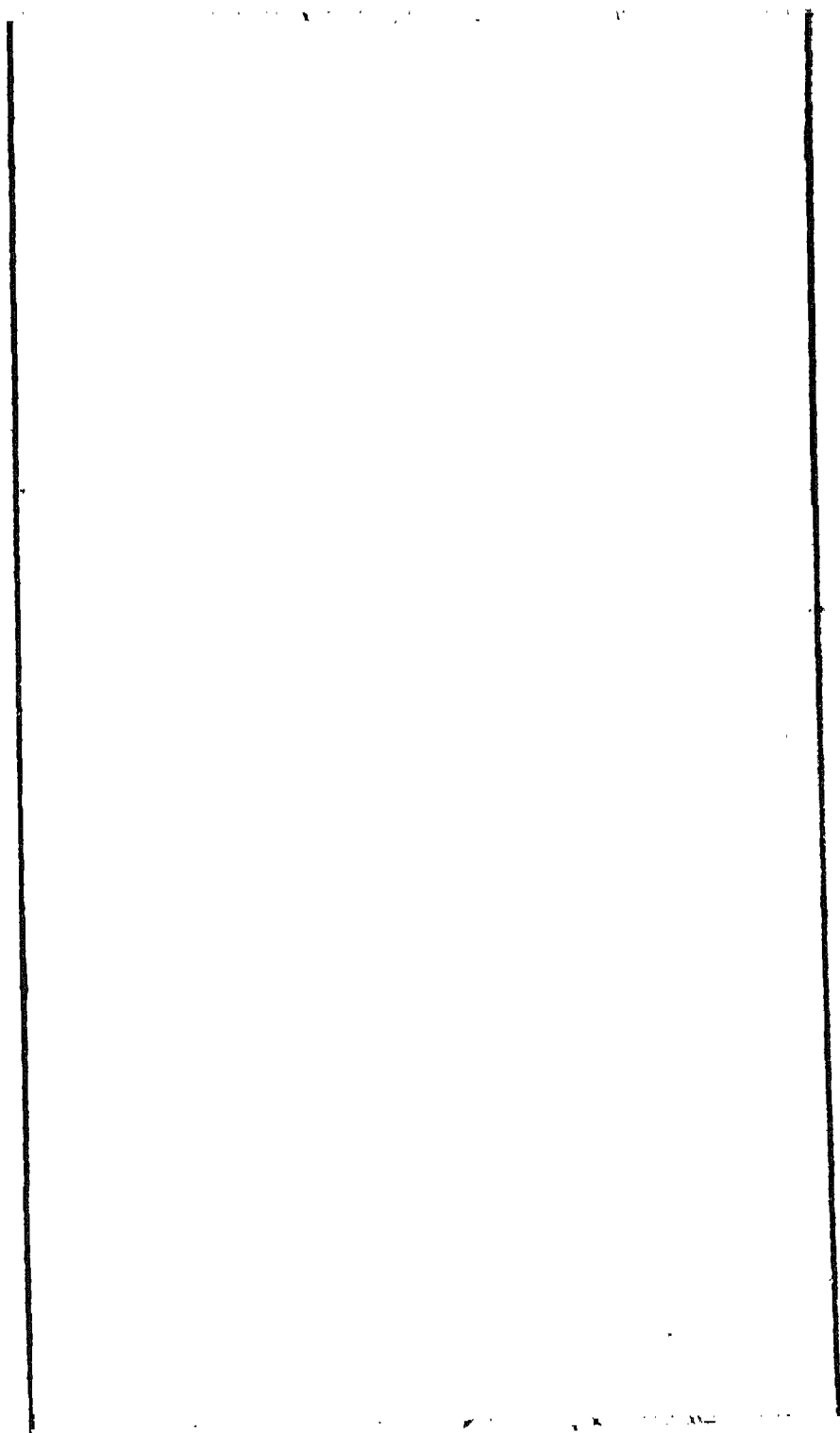
فہرست مضامین

حصہ اول

باب	مضمون	صفحہ
۱	زاویوں کی پیمائش - سنجی اور مٹی پیمانے	۱
۲	قوسی پیمانہ - نیم قطری زاویہ ایسے زاویوں کی مثلثی نسبتیں جو زاویہ قائمہ سے کم ہوں -	۱۲
۳	۴۵°، ۳۰°، ۶۰°، ۹۰°، ۰° کے زاویوں کی قیمتیں	۳۲
۴	بلندیوں اور فاصلوں کی آسان مثالیں	۴۸
۵	علم مثلث میں علامات جبریدہ کا استعمال مثلثی نسبتوں کے تغیرات کا مرسم کرنا	۶۹
۶	کسی مقدار کے زاویوں کی مثلثی نسبتیں - طہ°، ۹۰° - طہ°، ۹۰° + طہ°..... کی مثلثی نسبتیں	۷۸
۷	ان سب زاویوں کے لئے جن کی مثلثی	۹۴

۱۰۸	نسبتیں ایک ہی ہوں۔ ایک جملہ عامہ کا دریافت کرنا	
۱۲۳	دو زاویوں کے حاصل جمع اور حاصل تقیق کی مثلثی نسبتیں۔	۷
۱۳۱	ضوابط متعلقہ حاصل ضرب	
۱۵۰	اضعافی اور کسری زاویوں کی مثلثی نسبتیں	۸
۱۶۲	مشتبہ علامات کی تشریح	
۱۶۶	۱۸ ، ۳۶ ، ۹ کے زاویے	
۱۸۲	متماثلات اور مثلثی معادلات	۹
۲۰۴	لوکار تھم	۱۰
۲۱۲	لوکار تھم کی جدولیں	
۲۲۵	اصول اجزائے مناسب	۱۱
۲۵۲	مثلث کے اضلاع اور زاویے	۱۲
۲۶۳	مثلثوں کا حل	۱۳
۲۸۰	دو اضلاع اور انکا درمیانی زاویہ معلوم ہے	
۲۹۰	صورت مشتبہ	
۳۰۴	بلندیاں اور فاصلے	۱۴
۳۳۳	مثلث کے خواص	۱۵
۳۳۶	مثلث کے متعلقہ دائرے	
۳۴۷	عمودی مرکز اور مثلث پائین	
۳۵۱	ہندسی مرکز اور وسطانیات	

۳۶۵	ذو اربعۃ الاضلاع	۱۶
۳۶۳	منتظم اشکال کثیر الاضلاع	
۳۸۱	منحیر زاویوں کی مثلث نسبتیں	۱۷
۳۸۸	جب ط > ط > دس ح	
۳۹۱	دائرہ کا رقبہ -	
۳۹۶	افق کا میلان	
۴۰۷	مقلوب و مستدیر جملے	۱۸
۴۱۷	آسان مثلثی سلعے	۱۹
۴۲۲	اسقاط	۲۰
۴۳۲	تظیل	۲۱
۴۸۱	متفرق مثالیں	
۵۱۵	جوابات نو کار تھی اور مثلثی جدولیں پانچ ملحوظ ہندسوں تک	



علم مشاہدہ کے مشہور ضابطے

حصہ اول

۱۔ دائرے کا محیط = $2\pi r$ (صفحہ ۱۴)

اس میں 2π عبارتی حرف ”حیت“ ہے

۲۔ 3159 اور 3 [اس کے تقرب $\frac{22}{7}$ اور $\frac{255}{113}$] (صفحہ ۱۵)

(صفحہ ۱۸) ایک نیمقطری زاویہ = $54^\circ 14' 8''$ تقریباً

(صفحہ ۲۱) دو قوس کے = $980 = 200^\circ = 2$ نیمقطری

(صفحہ ۲۳) زاویہ = $\frac{\text{قوس}}{\text{نصف قطر}} \times \text{زاویہ نیمقطری}$

۲۔ جب 1° طہ + حجم 2° طہ = 1

قط 1° طہ = $1 + \text{مس} 1^\circ$ طہ

(صفحہ ۲۸) قوس 1° طہ = $1 + \text{محم} 1^\circ$ طہ

(صفحہ ۴۰) ۳۔ جب $0^\circ = 0$ ، حجم $0^\circ = 1$

(صفحہ ۳۸) جب $1^\circ = 1$ ، حجم $1^\circ = \frac{37}{4}$

جب ۲۵ = جم ۲۵ = $\frac{1}{25}$ (دفعہ ۳۷)

جب ۹۰ = جم ۹۰ = $\frac{1}{90}$ (دفعہ ۳۹)

جب ۹۰ = جم ۹۰ = ۰ (دفعہ ۴۱)

جب ۱۵ = جم ۱۵ = $\frac{1+37}{212}$ (دفعہ ۱۱۲)

جب ۱۸ = جم ۱۸ = $\frac{1+57}{2}$ (دفعات ۱۲۶ تا ۱۲۷)

۴- جب (ط - ط) = - جب ط ' جم (ط - ط) = جم ط (دفعہ ۷۴)

جب (ط - ط) = جم ط ' جم (ط - ط) = جب ط (دفعہ ۷۵)

جب (ط + ط) = جم ط ' جم (ط + ط) = - جب ط (دفعہ ۷۶)

جب (ط - ۱۸۰) = جب ط ' جم (ط - ۱۸۰) = - جم ط (دفعہ ۷۸)

جب (ط + ۱۸۰) = - جب ط ' جم (ط + ۱۸۰) = جم ط (دفعہ ۷۹)

۵- اگر جب ط = جب ط تو ط = ن ۲ + (۱ - ط) (دفعہ ۸۸)

اگر جم ط = جم ط تو ط = ن ۲ ± ط (دفعہ ۸۹)

اگر مس ط = مس ط تو ط = ن ۲ + ط (دفعہ ۹۰)

۶- جب (ا + ب) = جب ا جم ب + جم ا جب ب

جم (ا + ب) = جم ا جم ب - جب ا جب ب (دفعہ ۹۴)

جب (ا - ب) = جب ا جم ب - جم ا جب ب

جم (ا - ب) = جم ا جم ب + جب ا جب ب (دفعه ۹۶)

جب ج + جب د = ۲ جب ج + ۲ ج + ۲ ج - ۲ ج

جب ج - ب د = ۲ جم ج + ۲ ج - ۲ ج

جم ج + جم د = ۲ جم ج + ۲ ج - ۲ ج

جم د - جم ج = ۲ جب ج + ۲ ج - ۲ ج (دفعه ۱۰۰)

۲ جب ا جم ب = جب ا (ب + ب) + جب ا (ب - ب)

۲ جم ا جب ب = جب ا (ب + ب) - جب ا (ب - ب)

۲ جم ا جم ب = جم ا (ب + ب) + جم ا (ب - ب)

۲ جب ا جب ب = جم ا (ب - ب) - جم ا (ب + ب) (دفعه ۱۰۳)

مس (ا + ب) = مس ا + مس ب
ایمس ا مس ب

مس (ا - ب) = مس ا - مس ب
(دفعه ۱۰۴) ا + مس ا مس ب

جب ۲ = ۲ جب ا جم ا

$$\text{جم } ۱۲ = \text{جم } ۱ - \text{جب } ۱ = ۱ - ۲ \text{ جب } ۲ = ۲ - ۱ \text{ جم } ۱ - ۱ \text{ (دفعه ۱۱۱)}$$

$$\text{جب } ۱۲ = ۲ \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ مس } ۲ = ۱ - ۲ \text{ جم } ۱ = ۱ - ۲ \text{ مس } ۱ + ۱ \text{ مس } ۲ \text{ (دفعه ۱۱۵)}$$

$$\text{مس } ۱۲ = ۲ \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ مس } ۲ \text{ (دفعه ۱۱۱)}$$

$$\text{جب } ۱۳ = ۳ \text{ جب } ۱ - ۲ \text{ جب } ۳ = ۳ - ۱ \text{ جب } ۲$$

$$\text{جم } ۱۳ = ۳ \text{ جم } ۱ - ۲ \text{ جم } ۳ = ۳ - ۱ \text{ جم } ۲$$

$$\text{مس } ۱۳ = ۳ \text{ مس } ۱ - ۲ \text{ مس } ۳ = ۳ - ۱ \text{ مس } ۲ \text{ (دفعه ۱۱۳)}$$

$$\text{جب } \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ جب } ۱ - ۱ \text{ جم } \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ جم } ۱ + ۱ \text{ (دفعه ۱۱۶)}$$

$$۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ جب } ۱ + ۱ \text{ جب } ۱ = ۱ - ۱ \text{ جب } ۱$$

$$۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ جب } ۱ + ۱ \text{ جب } ۱ = ۱ - ۱ \text{ جب } ۱ \text{ (دفعه ۱۱۹)}$$

$$\text{مس } (۱ + ۱ + \dots + ۱ + ۱) = ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + \dots - ۱ + ۱ \text{ (دفعه ۱۳۱)}$$

$$۶ - \text{لوک } م = \text{لوک } م + \text{لوک } ن$$

$$\text{لوک } م = \text{لوک } م - \text{لوک } ن$$

$$\text{لوک } م = \text{لوک } ن \text{ (دفعه ۱۴۲)}$$

لوک م = لوک ب م × لوک ب (دفعہ ۱۵۳)

۸۔ $\frac{1}{4}$ جب ۱ = جب ب = جب ج (دفعہ ۱۶۹)

جم ۱ = ب + ج - ۱ (دفعہ ۱۷۰)

جب $\frac{1}{4}$ = ۱ | (ن - ب) (ن - ج) (دفعہ ۱۷۱)

جم $\frac{1}{4}$ = ۱ | (ن - ۱) (ن - ج) (دفعہ ۱۷۲)

مس $\frac{1}{4}$ = ۱ | (ن - ب) (ن - ج) (دفعہ ۱۷۳)

جب ۱ = $\frac{1}{2}$ | (ن - ۱) (ن - ب) (ن - ج) (دفعہ ۱۷۵)

۱ = ب جم ج + ج جم ب (دفعہ ۱۷۶)

مس ب - ج = ب - ج جم ۱ (دفعہ ۱۷۷)

ن = ۱ | (ن - ۱) (ن - ب) (ن - ج) = $\frac{1}{4}$ ب ج جب ۱

$\frac{1}{4}$ ج ۱ جب ب = $\frac{1}{4}$ ۱ ب جب ج (دفعہ ۲۰۴)

۹۔ $\frac{1}{4}$ = ۱ | ۲ جب ۱ = ۲ جب ب = ۲ جب ج = ۲ | ۲ (دفعات ۲۶۶ و ۲۶۷)

$$ر = \frac{ن}{ب} = (ن - ا) \text{ مس } \frac{۱}{۲} = \dots\dots\dots (وفیات ۲۰۸ و ۲۰۹)$$

$$ر = \frac{ن}{ب} = ن \text{ مس } \frac{۱}{۲} \dots\dots\dots (وفیات ۲۱۱ و ۲۱۲)$$

ایک ایسی ذوار بیتہ الا ضلاع کا رقبہ جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتی ہے

$$۸ = (ن - ا) (ن - ب) (ن - ج) (ن - د) \dots\dots\dots (وقفہ ۲۲۵)$$

$$\frac{جب ط}{ط} = ۱ \text{ جب زاویہ ط نہایت چھوٹا ہو} \dots\dots\dots (وقفہ ۲۳۶)$$

$$\dots\dots\dots (وقفہ ۲۳۹) \quad \text{دائرے کا رقبہ} = \frac{۱}{۲} ر$$

$$۱۰ - \text{جب } ع + \text{جب} (ع + ب) + \text{جب} (ع + ۲ ب) + \dots\dots\dots \text{ن رقموں تک}$$

$$= \text{جب} \left\{ ع + \frac{ن - ۱}{۲} ب \right\} \text{ جب } \frac{ن}{۲} \dots\dots\dots (وقفہ ۲۴۷)$$

$$\text{جب } \frac{ن}{۲}$$

$$\text{جم } ع + \text{جم} (ع + ب) + \text{جم} (ع + ۲ ب) + \dots\dots\dots \text{ن رقموں تک}$$

$$= \text{جم} \left\{ ع + \frac{ن - ۱}{۲} ب \right\} \text{ جب } \frac{ن}{۲} \dots\dots\dots (وقفہ ۲۴۸)$$

$$\text{جب } \frac{ن}{۲}$$

باب اول

زاویوں کی پیمائش ستینی اور مئی پیمانوں میں توسی پیمانہ

۱۔ لفظ ٹرگنومٹری (علم مثلث) دو یونانی لفظوں سے مرکب ہے جن کا مطلب "مثلثوں کی پیمائش" سے علم مثلث کا اصلی مقصد یہی تھا اور اب تک بھی اس کا بڑا استعمال یہ ہے کہ اس کے ذریعہ مثلثوں کے ضلعوں اور زاویوں کے باہمی ارتباطات اور تعلقات معلوم کئے جاتے ہیں مگر اب علم مثلث کے معنی بہت وسیع ہو گئے ہیں اور اس میں وہ جملہ فروع ریاضی شامل ہیں جن کا تعلق زاویوں سے ہے۔

علم ہندسہ میں زاویوں کی پیمائش زاویہ قائمہ یا اس کی کسروں کی رقوم میں کی جاتی ہے مگر صریحاً اپنی بڑی مقدار

کی وجہ سے یہ اکائی علم مثلث میں اتنی موزوں نہیں ہے اسلئے زاویوں کا اندازہ لگانے کے لئے کئی اور ترکیبیں اختیار کی گئی ہیں ان میں ایک پیمانہ ستینی (سکس جیسیل) ہے جو علم مثلث میں اکثر استعمال ہوتا ہے، اس کے نام سے ظاہر ہے کہ اس میں ہر ایک اکائی اپنے سے اگلی چھوٹی اکائی کی ساٹھ گنی ہوتی ہے اس پیمانہ کو انگریزی ترکیب تقسیم بھی کہتے ہیں

۲۔ ستینی پیمانہ یعنی انگریزی ترکیب تقسیم میں زاویہ قائمہ کو ۹۰ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر ایک حصہ کو درجہ (ڈگری) کہتے ہیں، ہر ایک درجہ کو ۶۰ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور ہر ایک حصہ کو دقیقہ (منٹ) کہتے ہیں اور اسی طرح ہر ایک دقیقہ یا منٹ کے ۶۰ برابر حصوں میں سے ہر ایک حصہ کو ثانیہ (سکنڈ) کہتے ہیں۔

موزوں ۱' ۱' ۱' درجہ، دقیقہ، ثانیہ کو بالترتیب تعبیر کرتی ہیں پس

- ۶۰ ثانیے (۶۰) برابر ہیں ایک دقیقہ (۱) کے
- ۶۰ دقیقے (۶۰) " " " " درجہ (۱) کے
- ۹۰ درجے (۹۰) " " " " زاویہ قائمہ کے

نوٹ۔ اگرچہ یہ سب اکائیاں زاویہ قائمہ سے حاصل ہوئی ہیں مگر قائمہ خود اکائی ستینی پیمانہ کی نہیں ہے، بڑی سے بڑی اکائی اس ترکیب تقسیم کی درجہ ہے پس ستینی پیمانہ کے موافق ۲ قائمے = ۱۸۰° اور علیٰ ہذا القیاس۔

علم حساب کے معمولی قاعدوں سے زاویوں کی تحویل قائموں

سے درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں اور برعکس اس کے آسانی ہو سکتی ہے۔

مثال ۱۔ $54^{\circ} 52' 9''$ کو درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں تعبیر کرو۔
 $54^{\circ} 52' 9''$ درجوں کی تحویل دقیقوں میں ۶۰ سے ضرب دینے سے کرد اس طرح حاصل ہوگا 3284

اور 54 دقیقوں کے ثانیے ۶۰ میں ضرب دینے سے بناؤ

پس ہیں حاصل ہوگا $54^{\circ} 54' 54''$

مثال ۲۔ $9^{\circ} 4' 34''$ کو زاویہ قائمہ کی رقوم میں بیان کرو
 ثانیوں کو ۶۰ پر تقسیم کرو اور حاصل قسمت کے اول دقیقے لکھو پھر ۶۰ پر تقسیم کرو اور حاصل کے ماقبل درجے لکھو اور آخر میں ۶۰ پر تقسیم کرو۔

$$\begin{array}{r} 9 \\ 60 \overline{) 515} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 60 \overline{) 515} \\ 510 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 60 \overline{) 510.25} \\ 510 \\ \hline 25 \end{array}$$

جواب

مثال ۳۔ انگریزی ترکیب تقسیم کے موافق (۱)، محس منظم (۲)، سب منظم

کے ہر ایک زاویہ کی مقدار معلوم کرو

(۱) فرض کرو کہ محس منظم کا زاویہ اسے تعبیر ہوتا ہے۔

تب جو سب اقلیدس م اش ۳۲ نتیجہ صریح

360° قائلے = جتنے اضلاع ہوں ان سے دو گئے قائلے

۴۔ فرانسیسی ترکیب تقسیم کا استعمال انگریزی ترکیب تقسیم کی نسبت زیادہ آسان اور سہل ہے مگر اس سے پیشتر کہ اسکو علی طور پر اختیار کر لیا جائے جدولوں کی ایک بڑی تعداد کا نئے سرے سے حساب لگانا پڑے گا اس وجہ سے یہ ترکیب عملیات میں کبھی استعمال نہیں کی گئی اور اب تقریباً معدوم ہو چکی ہے۔

۵۔ ستینی پیمانہ کی تحویل مئی پیمانہ میں اور برعکس اس کے۔ چونکہ ایک زاویہ قائمہ 90° کے برابر ہوتا ہے اور نیز 100° کے اس لئے $100^\circ = 90^\circ$

$$1^\circ = \frac{10}{9}^\circ \text{ اور } 1^\circ = \frac{9}{10}^\circ$$

پس معلوم ہوا کہ انگریزی درجوں کو فرانسیسی درجوں میں تحویل کرنے کے لئے ہمیں کل انگریزی درجوں کی تعداد کا $\frac{1}{9}$ واں حصہ اُن کی تعداد پر زیادہ کرنا چاہیئے اور برعکس اس کے فرانسیسی درجوں کو انگریزی درجوں میں منتقل کرنے کے لئے فرانسیسی درجوں کی تعداد کا $\frac{1}{10}$ واں حصہ اُن کی تعداد سے منفی کرنا چاہیئے

$$\text{مثال} - 100^\circ = (100 \times \frac{1}{9} + 100) = 111.11^\circ$$

$$\text{اور } 111.11^\circ = (111.11 \times \frac{9}{10} - 111.11) = 100^\circ$$

اگر کسی زاوئے میں درجوں کی صحیح تعداد شامل نہ ہو تو اس کو سب سے پہلے درجوں کی کسور میں لانا چاہیئے اور اس کے بعد فرانسیسی درجوں میں منتقل کرنا چاہیئے۔

عملی صورتوں میں زاویوں کو قائم الزاویہ یا اس کی کسور میں تعبیر کرنا زیادہ مناسب ہوتا ہے مسئلہ ذیل سے اس کی توضیح

ہوگی۔

مثال ۱۔ $۵۳^{\circ} ۴۳' ۱۴''$ کی تحويل مئی پیمانہ میں کرو

$$۱۵ = \frac{۱۴}{۶۰} = ۰.۲۳۳۳$$

$$۱۴' = ۱۴ \times ۶۰ = ۸۴۰ = ۸۵۰ - ۱۰ = ۸۴۰ - ۱۰ = ۸۳۰$$

$$۱۴'' = ۱۴ \times ۶۰ \times ۶۰ = ۵۰۴۰۰ = ۵۰۴۰۰ - ۱۰۰ = ۵۰۳۰۰$$

$$۵۰۳۰۰ = ۵۰۳۰۰ - ۱۰۰ = ۵۰۲۰۰$$

$$۵۰۲۰۰ = ۵۰۲۰۰ - ۱۰۰ = ۵۰۱۰۰$$

$$۵۰۱۰۰ = ۵۰۱۰۰ - ۱۰۰ = ۵۰۰۰۰$$

مثال ۲۔ $۹۳^{\circ} ۲۳' ۸۴''$ کی تحويل ستینی پیمانہ میں کرو

$$۹۳^{\circ} ۲۳' ۸۴'' = ۹۳^{\circ} ۲۳' ۸۴'' \times ۶۰ = ۵۵۹۸۰$$

انگریزی درجے

$$۸۳۵۸۱۳۸۳$$

دقیقہ

$$۲۸۵۸۸۹۸$$

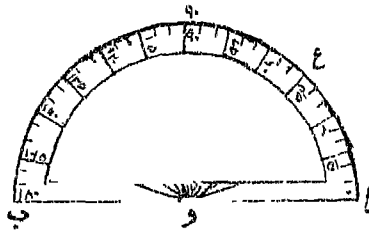
ثانئے

$$۵۳۵۳۸۸۰$$

$$۵۳۵۳۸۸۰ = ۵۳۵۳۸۸۰ - ۱۰۰ = ۵۳۵۲۸۸۰$$

اس لئے $۹۳^{\circ} ۲۳' ۸۴'' = ۸۴^{\circ} ۸۳' ۵۳''$ یا چاند زاویوں کی پیمائش کا ایک آلہ ہے بالعموم یہ دہانت کی بہتری ہوتی ہے جسکی شکل نصف دائرہ کی ہوتی ہے اور اسکے محیط پر صفر سے ۱۸۰ تک نشان لگے ہوئے ہوتے ہیں۔

اگر کسی زاویہ کی پیمائش منظور ہو تو زاویہ کے راس کو مرکز و پر اور زاویہ کی ایک ساق کو قطر و پر ٹھیک ٹھیک منطبق کرتے ہیں اگر زاویہ کی دوسری ساق و پر ہو تو



کے مقابل محیط پر جو عدد ہوگا وہ زاویہ ع و ا کی مقدار کو درجوں میں تعبیر کرے گا۔

چونکہ کسی دائرہ میں مساوی قوسوں کے محاذی مرکزی زاوے مساوی ہوتے ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ نصف دائرہ پر درجوں کے نشانات متساوی الفصل ہیں اس سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ جس قوس کے محاذی زاویہ ۱۰ ہو وہ اُس قوس کا دس گنا ہوگا جس کے سامنے کا زاویہ صرف ۱ ہو پس معلوم ہوا کہ کسی دائرہ کے مرکزی زاوے اُن قوسوں کے متناسب ہوتے ہیں جن کے وہ محاذی ہوں۔

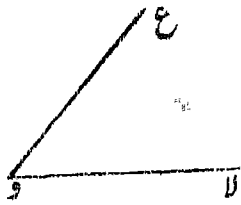
یہ نتیجہ اعظم اقلیدس ص ۴۳ میں زیادہ وضاحت سے ثابت کیا گیا ہے۔

زاویوں کی مثلثی تعبیر

۷۔

اقلیدس کی تعریف زاویہ ”یعنی دو ایسے خطوط کا میدان جو آپس میں ٹھیک طور پر صادق نہیں آتی جب تک کہ زاوے دو قائموں سے کم ہوں۔“

علم مثلث میں زاویہ کی تعریف اس طرح کرتے ہیں کہ اگر کوئی خط مستقیم اپنے ایک سرے کے گرد ایک ہی سطح میں ایک مقام سے کسی دوسرے مقام تک چکر لگائے تو اس کی حرکت سے جو میلان ان دو مقامات کے درمیان پیدا ہو اس کو زاویہ کہتے ہیں، فرض کرو کہ شکل منسلکہ میں چکر لگانے والا خط مقام ولا سے مقام وع تک حرکت کرتا ہے، مثلاًشی اصطلاح میں اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ اس نے



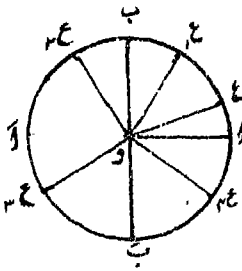
ایک "زاویہ لاوع" مرتسم کیا ہے "چکر لگانے والے خط کو نصف قطر دائرہ یا خط دائرہ کہتے ہیں۔

گھڑی کی سوئیاں یا پیچے کے

آرے اس طرح سے زاویہ مرتسم کرنے کی عمدہ مثالیں ہیں، گھڑی میں سنوٹوں کی سوئی ایک قائمہ یعنی ۹۰ درجے $\frac{1}{4}$ گھنٹے میں اور ۱۸۰ درجے $\frac{1}{2}$ گھنٹے میں اور ۳۶۰ درجے ایک گھنٹے میں مرتسم کرتی ہے اور گھنٹوں کی سوئی اپنی گردش سے ۳۶۰ درجے ۱۲ گھنٹے میں ۴۲۰ درجے ایک دن میں مرتسم کرتی ہے پس معلوم ہوا کہ علم مثلث میں زاویہ کی مقدار پر کوئی قید نہیں ہے۔

۸۔ کسی مقدار کے زاویے

فرض کرو کہ دو ثابت خط AOA' اور BOB' ایک نقطہ O پر متقاطع علی القوائم ہیں اور فرض کرو کہ ایک چکر لگانے والا خط وع



(جو ثابت نقطہ وکے گرد ایک ہی سطح
میں گردش کرتا ہے) مقام
وا سے شروع ہو کر گھڑی کی سوئیوں
کی مقابل سمت میں حرکت کرتا ہے
جب خط دائرہ وا اور وب کے
درمیان کسی مقام وع پر منطبق ہوتا

ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ لاوع ہوتا ہے جو زاویہ قائمہ سے کم ہے
جب خط دائرہ وب اور وا کے درمیان کسی مقام وع پر ہوتا
ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ ایک قائمے سے بڑا ہوتا ہے۔

وا اور وب کے درمیان کسی مقام وع پر زاویہ مرتسمہ لاوع
یعنی لاوب + ب وا + لاوع یعنی دو قائمے + لاوع ہوتا
ہے یعنی زاویہ مرتسمہ دو قائموں سے بڑا ہوتا ہے۔

اسی طرح سے وب اور وا کے درمیان کسی مقام وع
پر زاویہ مرتسمہ تین قائموں سے بڑا ہوتا ہے

جب خط دائرہ ایک پورا چکر لگا چکتا ہے اور دوسری مرتبہ ابتدائی
مقام وا پر منطبق ہوتا ہے تو اس کی گردش سے جو زاویہ پیدا
ہوتا ہے وہ چار قائموں کے برابر ہوتا ہے۔

اگر اس کے بعد خط دائرہ اپنی گردش کو جاری رکھے تو دوسری
مرتبہ جب وہ مقام وع پر پہنچتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ صرف
لاوع نہیں ہوتا بلکہ ۳ قائمے + زاویہ لاوع ہوتا ہے
اسی طرح سے جب خط دائرہ دو پورے چکر لگا چکنے کے بعد

مقام ربع پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ ≈ ۸ قاعے
+ زاویہ لاوع

۹۔ خطوط مستقیم اول اور ب و ب' متقاطع ہو کر چار قاعے پیدا کرتے
ہیں اور سطح مستوی کو چار برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں، حصہ
اوب کو ربع اول، ب و ا کو ربع دوم، ا و ب' کو ربع سوم
اور ب' و ا کو ربع چہارم کہتے ہیں۔ اب خط ثابت و ا اور خط دائر
وع کے درمیان کوئی زاویہ فرض کرو، اگر وع ربع اول میں مقام
وع پر واقع ہو تو اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ زاویہ لاوع
ربع اول میں ہے اگر وع دوسرے ربع میں مقام وع پر واقع
ہو تو زاویہ لاوع کو ربع دوم میں کہتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔
۱۰۔ مفصلہ ذیل زادئے مرتسم کرنے کے بعد خط دائر کے مختلف مقامات
دریافت کرو۔

(۱) ۲۲۵° ، (۲) ۳۸۰° اور (۳) ۱۰۵۰°

(۱) چونکہ $۲۲۵^\circ = ۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ$ اس لئے معلوم ہوا کہ اس صورت میں
خط دائر دو قاعے مرتسم کرنے کے بعد زاویہ ۴۵° میں گھوم چکا ہے۔
اس لئے اس وقت وہ ربع سوم میں ہے اور زاویہ لاوب کی تنصیف
کرتا ہے۔

(۲) چونکہ $۳۸۰^\circ = ۳۶۰^\circ + ۲۰^\circ$ اس لئے ایک پورا چکر لگانے کے بعد
خط دائر نے زاویہ ۲۰° مرتسم کیا ہے، اس لئے وہ ربع دوم میں و ب
اور و ا کے درمیان ہے اور و ب کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتا ہے۔

(۳) چونکہ $۱۰۵۰^\circ = ۱۱ \times ۹۰^\circ + ۶۰^\circ$ اس لئے معلوم ہوا کہ خط دائر ۱۱ پورے

چکر لگانے کے بعد زاویہ 90° مرتب کر چکا ہے اور ربع چارم میں وہب اور وا کے درمیان ہے اور وہب کے ساتھ زاویہ 90° بناتا ہے

امثلہ نمبری ۱

ذیل کے زاویوں کو زاویہ قائمہ کی رقوم میں بیان کرو۔

$$1-90^\circ \quad 2-45^\circ \quad 3-30^\circ$$

$$4-135^\circ \quad 5-210^\circ \quad 6-120^\circ$$

$$7-30^\circ \quad 8-90^\circ \quad 9-138^\circ$$

ذیل کے زاویوں کو فرانسیسی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں بیان کرو

$$1-30^\circ \quad 2-90^\circ \quad 3-138^\circ$$

$$4-135^\circ \quad 5-210^\circ \quad 6-120^\circ$$

$$7-30^\circ \quad 8-90^\circ \quad 9-138^\circ$$

ذیل کے زاویوں کو قائموں اور نیز انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں کی رقوم میں بیان کرو

$$1-30^\circ \quad 2-90^\circ \quad 3-138^\circ$$

$$4-135^\circ \quad 5-210^\circ \quad 6-120^\circ$$

$$7-30^\circ \quad 8-90^\circ \quad 9-138^\circ$$

جب خط دائر مفضلہ ذیل زاویے مرتب کر چکا ہو تو ہر ایک صورت میں اسکے مقام کا نشان شکل میں دو۔

$$1-90^\circ \quad 2-45^\circ \quad 3-30^\circ$$

$$4-135^\circ \quad 5-210^\circ \quad 6-120^\circ$$

۳۳- ۴۴۵

۲۲- ۳۱۵

۲۵- ۱۵۰

۲۳- ۱۱۸۵

۲۷- ۸۷۵

۲۶- ۴۲۰

۲۸- معلوم کرو کہ گھڑی کی گھنٹہ اور منٹ کی سوئیاں $\frac{1}{4}$ ۱۱ منٹ میں بالترتیب کتنے انگریزی درجے دقیقے اور ثانیے مرتسم کرتی ہیں۔

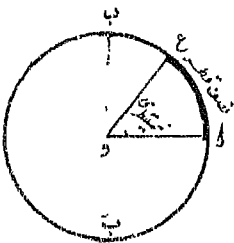
۲۹- کسی مثلث قائم الزاویہ کے ایک زاویہ حادہ میں انگریزی درجوں کی تعداد دوسرے زاویہ کی فرانسیسی درجوں کی تعداد کے برابر ہے۔ دونوں زاویوں کو انگریزی درجوں میں بیان کرو۔

۳۰- ثابت کرو کہ کسی زاویہ میں ستینی دقیقوں کی تعداد کو اُسی زاویہ میں مئی دقیقوں کی تعداد سے نسبت ۵۰:۲۷ ہے۔

۳۱- زاویہ ۴۴ ۸ کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کرو کہ ایک حصہ کی ستینی ثانیوں کی تعداد دوسرے حصہ کی مئی ثانیوں کی تعداد کے برابر ہو۔

قوسی پیمانہ - دائری پیمانہ

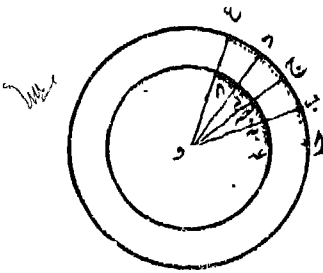
۱۱- زاویوں کی ایک تیسری ترکیب تقسیم ایجاد ہوئی ہے اور علم ریاضی کی اعلیٰ فردع میں یہی استعمال کی جاتی ہے اس ترکیب تقسیم کی اکائی اس طرح حاصل ہوتی ہے۔



کوئی دائرہ ABC بے لوجسکا مرکز و ہو اور کسی نقطہ O سے قوس AC برابر نصف قطر دائرہ کے

ناپو، وا اور وع کو ملاؤ زاویہ لاوع کو قوسی پیمائش کی اکائی قرار دیتے ہیں یعنی اس زاویہ کی رقوم میں اور زاویوں کا اندازہ لگاتے ہیں۔
اس زاویہ کو انگریزی میں ریڈین کہتے ہیں ہم اسکو زاویہ نیمقطری یا اختصاراً نیم قطری کہیں گے اور اس کو آئندہ نشان (ان) سے تعبیر کریں گے۔

۱۲۔ اب کسی پیمانہ واحد یا اکائی کے مناسب انتخاب کے لئے ضروری ہے کہ وہ مقدار مستقل ہو اسلئے ہم کو ثابت کرنا چاہیے کہ نیمقطری ایک مستقل زاویہ ہے، دفعات ذیل میں ہم اس بات کو ثابت کریں گے۔
۱۳۔ مسئلہ کسی دائرہ کے محیط اور قطر کی باہمی نسبت مستقل ہوتی ہے



دو دائرے لو جن کا مرکز مشترک ہو، بڑے دائرے کے اندر ایک ایسی منتظم کثیر الاضلاع بناؤ جس کے ن اضلاع ہوں۔

فرض کرو کہ وا، وب، وج، ...
چھوٹے دائرہ کو نقاط عہ، ہجہ، ...

پر ملتے ہیں عہ بہ، بہ جہ، جہ لہ، ... کو ملاؤ
تب ہو جب اقلیدس م ۶ ش ۲ عہ، بہ، جہ، لہ، ... چھوٹے
دائرہ کے اندر ن اضلاع کی ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے۔

چونکہ وعہ = وہہ اور وا = وب
اس لئے ضرور ہے کہ خطوط عہ بہ اور اب متوازی ہوں
اسلئے $\frac{وا}{وعہ} = \frac{اب}{عہ بہ}$ (اقلیدس م ۶ ش ۴)

نیز کثیر الاضلاع ا ب ج د منتظم ہے اس کا گھیرا یعنی
مجموعہ اضلاع ن × ا ب ہے اور اسی طرح سے اندرونی کثیر الاضلاع
کا مجموعہ اضلاع ن × ع د ہے پس

$$\frac{\text{بیرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع}}{\text{اندرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع}} = \frac{\text{ن} \times \text{ا ب}}{\text{ن} \times \text{ع د}}$$

$$= \frac{\text{ا ب}}{\text{ع د}} = \frac{\text{وا}}{\text{وع د}} \dots (۱)$$

اور یقیناً صحیح ہے خواہ اوپر کی اشکال کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع
کچھ ہی ہو۔

اب فرض کرو کہ تعداد اضلاع لا انتہا بڑھتی ہے (یعنی ن لا انتہا
بڑھتا ہے) یہاں تک کہ آخر الامر بیرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع
بیرونی دائرہ کے محیط کے قریب قریب برابر ہو جاتا ہے۔ اور
اندرونی کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع اندرونی دائرہ کے محیط کے
قریب قریب برابر ہو جاتا ہے۔
اُس وقت ربط (۱) کی صورت یہ ہو جائیگی۔

$$\frac{\text{بیرونی دائرہ کا محیط}}{\text{اندرونی دائرہ کا محیط}} = \frac{\text{وا}}{\text{وع د}}$$

$$= \frac{\text{بیرونی دائرہ کا نصف قطر}}{\text{اندرونی دائرہ کا نصف قطر}}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{بیرونی دائرہ کا محیط}}{\text{بیرونی دائرہ کا نصف قطر}} = \frac{\text{اندرونی دائرہ کا محیط}}{\text{اندرونی دائرہ کا نصف قطر}}$$

اب چونکہ ابتدا میں دونوں دائروں کی مقدار پر کوئی قید نہیں رکھی گئی اس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ مقدار

محیط دائرہ

نصف قطر دائرہ

تمام دائروں کے لئے وہی ہوتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ دائرہ کے محیط کی نسبت اپنے نصف قطر سے اور نیز اس لئے اپنے قطر سے ایک مقدار معین اور مستقل ہے۔

۱۴۔ دفعہ گزشتہ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ نسبت $\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}}$ تمام دائروں کے لئے یکساں ہوتی ہے۔ اس مستقل نسبت کی قیمت کو ہم ہمیشہ عبرانی حرف π (حیت) سے تعبیر کریں گے۔ اس سے ظاہر ہے کہ π ایک عدد ہے

پس $\frac{\text{محیط}}{\text{قطر}} = \text{عدد مستقل } \pi$

یعنی مسئلہ ذیل قائم ہوا کہ کسی دائرہ کا محیط ہمیشہ اس کے قطر کا π گنا یا اس کے نصف قطر کا 2π گنا ہوتا ہے۔

۱۵۔ اب مشکل یہ ہے کہ π کی قیمت نہ تو صحیح عدد ہے اور نہ یہ کسر عام کی شکل میں بیان ہو سکتی ہے اس لئے ہم اس کو کسر اعشاریہ متوالی یا غیر متوالی کی رقوم میں بھی تعبیر نہیں کر سکتے۔ عدد π مقدار متناہی ہے یعنی یہ ایک ایسی مقدار ہے جس کی قیمت دو صحیح عددوں کی نسبت سے تعبیر نہیں ہو سکتی۔

آٹھ مرتبہ کے اعشاریہ تک اس کی صحیح قیمت ... ۳۱۴۱۵۹۲۶۵

کسر $\frac{22}{7}$ سے π کی قیمت پہلے دو مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح حاصل ہوتی ہے، کیونکہ

$$\frac{22}{7} = 3.142857 \dots$$

کسر $\frac{355}{113}$ سے π کی زیادہ صحیح قیمت حاصل ہوتی کیونکہ وہ ۶ مرتبہ کے اعشاریہ تک درست ہے کیونکہ

$$\frac{355}{113} = 3.1415926 \dots$$

نوٹ۔ کسر $\frac{355}{113}$ اس طرح یاد رکھ سکتی ہے۔ پہلے تین طاق اعداد کو اس ترتیب سے کہو کہ اس میں ہر ایک عدد دو دفعہ لکرائے جیسے ۱۱۳۳۵۵ پھر اس عدد کو دو حصوں میں تقسیم کر دو اور پہلے حصہ کو دوسرے پر تقسیم کر دو۔ جیسے ۱۱۳۳۵۵/۱۱۳ حاصل قسمت π کی قیمت ۶ مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح حاصل ہوگی۔

خلاصہ یہ ہے کہ π کی تقریبی قیمت جو دو مرتبہ کے اعشاریہ تک درست ہو کسر $\frac{22}{7}$ ہے۔ مگر اس سے اچھا تقریب $\frac{355}{113}$ ہے۔ عمل تقسیم سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{1}{\pi} = 0.3183098862 \dots$$

۱۶۔ مثال ۱۔ ایک ٹرائیکل کے پے کا قطر ۲۸ انچ ہے۔ اگر پے کے محیط کا کوئی ایک نقطہ ایک پورا چکر لگائے تو دریافت کرو کہ پے کا مرکز اس آٹا میں کتنا فاصلہ طے کرے گا۔

اس جگہ نصف قطر = ۱۴ انچ

$$\text{اس لئے محیط} = 2 \times \pi \times 14 = 28\pi \text{ انچ}$$

$$\pi = \frac{22}{7} \text{ تو محیط} = 28 \times \frac{22}{7} \text{ انچ}$$

= ۷ فٹ ۴ انچ (تقریباً)

اگر π کو زیادہ صحیح قیمت 3513159245 دی جائے

تو محیط = 28×3513159245 انچ

= ۷ فٹ ۴ انچ ۹۶۵۹۰۰۰۰

مثال ۲۔ ایک دوڑنے والے گول چکر کے گرد ۵ مرتبہ دوڑنے سے ایک مشاق ایک میل فاصلہ طے کرتا ہے۔ چکر کا نصف قطر دریافت کرو۔

چکر کا محیط = $1440 \times \frac{1}{5} = 288$ گز

پس اگر چکر کا نصف قطر گزوں میں r سے تعبیر کریں

تو $2\pi r = 288$

$r = \frac{144}{\pi}$ گز

فرض کرو کہ $\frac{22}{7} = \pi$ تو $r = \frac{144 \times 7}{22} = 45.818$ گز (تقریباً)

اگر π کی زیادہ صحیح قیمت لیا جائے تو $\frac{1}{\pi} = 31831$ اور ہمیں حاصل ہوگا۔

$r = 144 \times 31831 = 45850.22$ گز

امثلہ نمبری ۲

۱۔ اگر زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو تو اس کے محیط کا طول دریافت کرو۔

۲۔ ایک ریل گاڑی کے پیچے کا قطر ۳ فٹ ہے اور وہ ایک سکنڈ میں ۳ چکر لگاتا ہے۔ گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

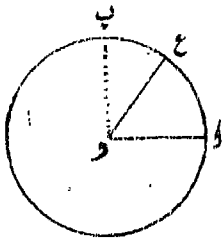
۳۔ ایک پون چکی کا بادبان ۱۸ فٹ ہے اور وہ ایک منٹ میں ۱۰ چکر لگاتا ہے معلوم کرو کہ اس کا سر ایک گھنٹہ میں کتنا فاصلہ طے کرتا ہے۔

۴۔ ایک پیچے کا قطر ایک انچ ہے، ایسی رسی کا طول دریافت کرو جو

اس کے گول کنارے کے گرد ٹھیک ایک دفعہ آئیے
 ۵۔ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ زمین اپنی حرکت سے ایک سال میں
 ایک ایسا دائرہ بناتی ہے جس کا نصف قطر ۹۲۵۰۰۰۰۰ میل ہے اور
 جس کا مرکز سورج ہے تو دریافت کرو کہ زمین ایک سال میں کتنا فاصلہ
 طے کرتی ہے۔

۱۱۔ ایک گاڑی کے پہیے کا نصف قطر ۹ اینچ ہے اور وہ $\frac{1}{4}$ سکنڈ
 میں اپنے مرکز کے گرد گھومنے سے ۸۰ کا زاویہ پیدا کرتا ہے، معلوم کرو
 کہ اس کے کنارے پر کا ایک نقطہ ایک گھنٹہ میں کتنا فاصلہ طے کرتا ہے
 ۱۲۔ مسئلہ زاویہ نیم قطر می ایک مستقل زاویہ ہے۔

فرض کرو کہ زاویہ $\angle AOC$ زاویہ
 نیم قطر می ہے (دفعہ ۱۱)



اور قوس AB ربع دائرہ ہے
 یعنی اس کا طول ایک چوتھائی
 محیط کے برابر ہے۔ بموجب دفعہ ۱۱
 طول AB = $\frac{11}{4}$ جہاں ۱۱

سے دائرہ کا نصف قطر تعبیر ہوتا ہے۔

بحکم اقلیدس ۴ ش ۳۳ ہم کو معلوم ہے کہ کسی دائرہ کے مرکزی
 زاویوں کو آپس میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کی قوسوں کو
 ایک دوسرے سے ہو جن پر کہ وہ قائم ہوں اسلئے

$$\frac{\text{زاویہ } \angle AOC}{\text{زاویہ } \angle AOB} = \frac{\text{قوس } \angle AOC}{\text{قوس } \angle AOB} = \frac{11}{4}$$

تو اس کی حرکت سے $\pi 2$ نیمقطری زاوئے پیدا ہوتے ہیں اور جب وہ تین چکر لگاتا ہے تو $\pi 6$ نیمقطری زاوئے پیدا ہوتے ہیں اور بالعموم جب وہ n چکر ختم کرتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ πn نیمقطری زاویوں کے برابر ہوتا ہے۔

۲۰۔ عملیات میں اکثر نشان ”نق“ کو حذف کرتے ہیں اور ”زاویہ π نق“ کی بجائے ”زاویہ π “ لکھتے ہیں۔

طالب علم کو یہ بات یاد رکھنی چاہئے کہ جب اُس اکائی کا جس کی رقوم میں ایک زاویہ ناپا گیا ہو کوئی ذکر نہ ہو تو الفاظ ”نیمقطری زاوئے“ وہاں محذوف ہونے ہیں، ورنہ یہ فرض کرنے میں وہ غلطی کر چکا کہ π قائم مقام ۱۸۰ کا ہے۔ یہ صحیح ہے کہ π نیمقطری زاوئے (π نق) اور ۱۸۰ ایک ہی زاوئے کو تعبیر کرتے ہیں۔ مگر یاد رہے کہ π بنفہ ایک عدد اور صرف ایک عدد ہے۔

۲۱۔ قوسی پیمانہ کی تحویل ستینی اور مہی پیمانوں میں اور برعکس اسکے طالب علم کو یہ ارتباطات یاد رکھنے چاہئیں۔

$$\text{دوقائے} = ۱۸۰ = ۲۰۰ = \pi = \text{نیمقطری}$$

باقی عمل معمولی قواعد علم حساب کے متعلق ہے

$$\text{مثال} \quad (۱) \quad ۳۵ \pi = ۳۵ \times ۱۸۰ = ۶۳۰۰ = ۶۳۰ \text{ ق}$$

$$(۲) \quad ۳ \pi = ۳ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۳ \times \frac{۱۸۰}{۱۸۰} = ۳$$

$$۲۰۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} =$$

$$(۳) \quad ۴۰ \times \frac{\pi}{۱۵} = ۲۶۶ \frac{۲}{۳} \pi$$

$$۲۶۶ \frac{۲}{۳} \pi \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۲۶۶ \times ۱۸۰ = ۴۷۸۸۰$$

$$= ۲۲۳۶ \times \pi \text{ نیمقطری}$$

$$(۴) ۳۰^\circ = ۳۶۰ \times ۱۵۳۶ = ۳۰^\circ$$

$$= ۳۰ \times ۱۵۳۶ \times \frac{\pi}{۱۸۰} \text{ نیمقطری}$$

$$= ۲۰۰۰۰۶۸ \times \pi \text{ نیمقطری}$$

۲۲- مثال ۱- ایک مثلث کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے چھوٹے زاویہ میں فرانسیسی درجوں کی تعداد کو سب سے بڑے زاویہ کی نیمقطری زاویوں کی تعداد سے نسبت ۴۰:۳۰ ہے۔ زاویوں کو انگریزی درجوں میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ زاویے (لا-۵)°، لا° اور (لا+۵)° ہیں

چونکہ مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ ۱۸۰° ہے

$$\text{اس لئے } ۱۸۰ = لا - ۵ + لا + لا + ۵ = ۳ لا$$

$$\therefore لا = ۶۰$$

پس مطلوبہ زاویے ہوئے

$$(۶۰-۵)^\circ، ۶۰^\circ، (۶۰+۵)^\circ$$

$$\text{اب } (۶۰-۵)^\circ \times \frac{۱}{۹} = (۶۰-۵)^\circ$$

$$\text{اور } (۶۰+۵)^\circ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = (۶۰+۵)^\circ \text{ نیمقطری}$$

$$\text{اس لئے } \frac{۱}{۹} (۶۰-۵) : \frac{\pi}{۱۸۰} (۶۰+۵) = ۴۰ : ۳۰$$

$$\text{اس لئے } \frac{۴۰}{۳۰} = \frac{۶۰-۵}{۶۰+۵} \times \frac{۲۰}{\pi}$$

$$\text{یعنی } ۵ (۶۰-۵) = ۶۰+۵$$

$$\text{یعنی } ۳۰ = ۵$$

اس لئے مطلوبہ زاویے ہیں ۰۲۰ ، ۰۹۰ ، ۰۱۰۰
مثال ۲۔ زاویوں کی پیمائش کی تینوں ترکیبوں ستینی، مہنی اور قوسی میں سے ہر ایک کے موافق کسی معشر منتظم کے ایک زاویہ کی مقدار دریافت کرو۔
 بموجب اقلیدس م ۱۳۲ نتیجہ صریح، اگر کسی مستقیم الاضلاع کے اندرونی زاویوں کے مجموعہ پر ۳۳ قائلے زیادہ کردئے جائیں تو اس حاصل جمع میں شکل مذکورہ کی تعداد اضلاع سے دو گئے قائلے ہوں گے۔
 فرض کرو کہ معشر منتظم کے ایک زاویہ میں لا قائلے ہیں۔ اس لئے تمام زاویے ۱۰۰ قائلوں کے برابر ہوں گے۔
 بموجب نتیجہ صریح مذکورہ بالا۔

$$۲۰ = ۱۰ + ۱۰$$

اس لئے لا = $\frac{۱۰}{۵}$ قائلے

لیکن ایک زاویہ قائمہ = ۹۰ = ۱۰۰ = $\frac{\pi}{۲}$ نیم قطری زاویے
 اس لئے زاویہ مطلوبہ = ۱۳۳ = ۱۶۰
 $\frac{\pi}{۵}$ نیم قطری زاویے =

امثلہ نمبری ۳

ذیل کے زاویوں کو انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں تعبیر کرو۔

$$۳ - \frac{\pi}{۱۰}$$

$$۲ - \frac{\pi}{۳}$$

$$۱ - \frac{\pi}{۳}$$

$$۳ - \frac{\pi}{۱۰}$$

$$۵ - \frac{\pi}{۸}$$

ذیل کے زاویوں کو فرانسیسی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں تعبیر کرو۔

$$۶ - \frac{\pi}{5} \quad ۷ - \frac{\pi}{4} \quad ۸ - \frac{\pi}{3}$$

ذیل کے زاویوں کو نیمقطری زاویوں میں بیان کرو

$$۹ - ۹۰ \quad ۱۰ - ۹۱۰$$

$$۱۱ - ۱۴۵ \quad ۱۲ - ۱۴۷$$

$$۱۳ - ۱۳۹۵ \quad ۱۴ - ۱۴۰$$

$$۱۵ - ۱۱۰ \quad ۱۶ - ۱۳۲۵$$

۱۷ - ایک مثلث قائم الزاویہ کے دو حادے زاویوں کا فرق $\frac{\pi}{5}$ نیمقطری

زاویوں کے برابر ہے۔ ان کو انگریزی درجوں میں بیان کرو

۱۸ - ایک مثلث کا ایک زاویہ $(\frac{\pi}{2})$ ف ہے، اور دوسرا $(\frac{\pi}{3})$ لا اور

تیسرا $(\frac{\pi}{5})$ فقی ان سب کو انگریزی درجوں میں بیان کرو۔

۱۹ - کسی مثلث کے زاویوں کا قوسی ناپ بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ ہے

تیسرے زاویہ میں انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۰ - ایک مثلث کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں سب سے چھوٹے

زاویہ میں انگریزی درجوں کی تعداد کو سب سے بڑے زاویے کی نیمقطری

زاویوں کی تعداد سے نسبت ۴۰ : ۳۱ ہے، ان زاویوں کو انگریزی درجوں میں

دریافت کرو۔

۲۱ - ایک مثلث کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں سب سے چھوٹے زاویے

میں جو نیمقطری زاویوں کی تعداد ہے اس کو درمیانی زاویے کی انگریزی درجوں

کی تعداد کے ساتھ نسبت ۱۲۰ : ۱۱ ہے، زاویوں کے قوسی ناپ دریافت کرو۔

۲۲ - اشکال ذیل کے اندرونی زاویوں کو نیمقطری زاویوں اور انگریزی درجوں

میں بیان کرو۔ (۱) منظم (۲) منظم (۳) منظم (۴) منظم (۵) بارہ

اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع (۵) ۱۷ اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع -

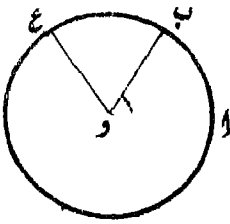
۲۳ - دو اشکال کثیر الاضلاع منتظم ہیں ایک کے زاویہ کو دوسرے کے زاویہ سے نسبت ۲:۳ ہے، نیز پہلی کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع دوسری کی تعداد اضلاع کی دو چند ہے، ہر ایک کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع دریافت کرو۔
 ۲۴ - دو اشکال کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع میں نسبت ۵:۴ ہے کہ ان کے زاویوں کا فرق ۹ ہے ہر ایک کی تعداد اضلاع دریافت کرو۔
 ۲۵ - دو ایسی اشکال کثیر الاضلاع معلوم کرو جو منتظم ہوں اور جن کی تعداد اضلاع میں نسبت ۳ اور ۴ کی ہو نیز پہلی کثیر الاضلاع کے ایک زاویے میں جو انگریزی درجوں کی تعداد ہو اُس کو دوسری کثیر الاضلاع کے کسی زاویے کی فرانسیسی درجوں کی تعداد کے ساتھ نسبت ۴:۵ ہو۔

۲۶ - ایک ذواربعۃ الاضلاع کے زاویے سلسلہ حسابیہ میں ہیں سب سے بڑا زاویہ سب چھوٹے زاویہ کا دو چند ہے، سب سے چھوٹے زاویے کو نیمقطری زاویوں میں تعبیر کرو۔

۲۷ - اوقات مندرجہ ذیل پر گھنٹہ اور منٹ کی سوئیوں کے درمیان جو زاویے بنیں ان کو نیمقطری زاویوں، انگریزی اور فرانسیسی درجوں میں بیان کرو۔

(۱) ساڑھے تین بجے (۲) چھ بجے میں ۲۰ منٹ (۳) سوا گیارہ بجے
 ۲۸ - وقت معلوم کرو (۱) چار اور پانچ بجے کے درمیان جب گھنٹہ اور منٹ کی سوئیوں کے درمیان زاویہ ۵۷° ہو (۲) سات اور آٹھ بجے کے درمیان جب یہ زاویہ ۵۴° ہو۔

۱۳ - مسئلہ کسی زاویہ میں نیمقطری زاویوں کی تعداد اُس کسر کے برابر ہوتی ہے جس کا شمار کنندہ وہ قوس ہو جس کے محاذی کسی



دائرہ کے مرکز پر زاویہ مجوزہ بنے
اور جس (کسر) کا نسب نما دائرہ کا
نصف قطر ہو۔

فرض کرو کہ خط دائرہ وا سے شروع
ہو کر مقام و ج تک حرکت کرنے سے
زاویہ اوع مرشم کرتا ہے۔

و کو مرکز مان کر کسی نصف قطر پر ایک دائرہ کھینچو جو خطوط وا اور
وج کو نقاط ا اور ع پر قطع کرے۔

فرض کرو کہ > اوب زاویہ نیمقطری ہے یعنی قوس اب
نصف قطر دائرہ کے برابر ہے۔

بحکم اقلیدس م ۶ ش ۳۳

$$\frac{\text{قوس اوع}}{\text{نصف قطر}} = \frac{\text{قوس اوع}}{\text{قوس اب}} = \frac{\text{اوع}}{\text{اوب}} = \text{زاویہ نیمقطری}$$

$$\text{یعنی } \text{اوع} = \text{قوس اوع} \times \text{زاویہ نیمقطری}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے۔

۲۲۔ مثال ۱۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اس کی اف قوس
کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویہ دریافت کرو۔

$$\frac{1}{3} = \frac{\text{قوس}}{\text{نصف قطر}} = \text{زاویہ نیمقطری زاویوں کی تعداد}$$

$$\text{اس لئے زاویہ مجوزہ} = \frac{1}{3} \text{ نیمقطری}$$

برابر فرض کیا جائے

$$\frac{2}{\pi} \times \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi^2}$$

زاویہ قائمہ

$$\frac{2}{\pi^2} \times \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi^3}$$

اگر π کو $\frac{22}{7}$ کے

مثال ۲۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۵ فٹ ہے اگر اس کی ایک قوس کے مقابل مرکزی زاویہ $33^\circ 15'$ ہو تو قوس کا طول دریافت کرو۔ فرض کرو کہ طول مطلوب لا فٹ ہے۔

اس لئے $\frac{1}{5} = \frac{\text{زاویہ}}{360^\circ}$ میں نیمقطری زاویوں کی تعداد

$$\pi \frac{33 \frac{1}{4}}{180} = (\text{دفعہ } 21)$$

$$\pi \frac{133}{620} =$$

اس لئے لا $= \frac{133}{133} \pi = \text{فٹ } \frac{22}{7} \times \frac{133}{133} = \text{فٹ تقریباً}$

$$2 \frac{65}{22} = \text{فٹ تقریباً}$$

مثال ۳۔ فرض کرو کہ سورج اور زمین کے درمیان اوسط فاصلہ ۹۲۵۰۰۰۰ میل ہے اور سورج ایک شخص کی آنکھ پر $34'$ کا زاویہ بناتا ہے سورج کا قطر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ میلوں میں سورج کا قطر q ہے

چونکہ سورج کے محاذی زاویہ نہایت چھوٹا ہے اس لئے اس کا قطر ایک ایسے دائرہ کی چھوٹی سی قوس کے برابر ہے جس کا مرکز دیکھنے والے کی آنکھ ہے۔ نیز ہمیں معلوم ہے کہ اس دائرہ کے مرکز پر سورج کے مقابل زاویہ $34'$ بنتا ہے۔

اس لئے بموجب دفعہ ۲۳

$$\frac{ق}{۹۲۵.۰۰۰۰} = \text{نیقطری زاویوں کی تعداد } ۳۲ \text{ میں}$$

$$= \text{نیقطری زاویوں کی تعداد } \frac{۸}{۱۵} \text{ میں}$$

$$\frac{۳۲}{۹۲۵} = \frac{\pi}{۱۸۰} \times \frac{۸}{۱۵} =$$

$$\text{اس لئے } ق = \frac{۱۸۵.۰۰۰۰۰}{۹۲۵} \times \pi \text{ میل}$$

$$= \frac{۲۲}{۷} \times \frac{۱۸۵.۰۰۰۰۰}{۹۲۵} \text{ میل تقریباً}$$

$$= ۸۶۲.۰۰۰ \text{ میل تقریباً}$$

مثال ۴۔ فرض کرو کہ ایک درست بیانی والا شخص چھاپہ کے حروف

کو اتنے فاصلہ سے پڑھ سکتا ہے کہ حروف کے محاذی اس کی آنکھ پر ۵

کا زاویہ بنتا ہے اُن حروف کی اونچائی دریافت کرو جو وہ مفصلہ ذیل فاصلوں

سے پڑھ سکتا ہے (۱) ۱۲ فٹ (۲) ۱۲

فرض کرو کہ لا فٹ مطلوبہ اونچائی ہے۔

پہلی صورت میں لا تقریباً ایک ایسے دائرہ کی قوس کے برابر ہے جس کا

نصف قطر ۱۲ فٹ ہے اور جس کے مرکز پر قوس کے محاذی زاویہ ۵ بنتا ہے

اس لئے $\frac{۱}{۱۲} = \text{تعداد نیقطری زاویوں کی } ۵ \text{ میں}$

$$\frac{\pi}{۱۸۰} \times \frac{۱}{۱۲} =$$

$$\text{اس لئے لا} = \frac{\pi}{۱۸۰} \text{ فٹ} = \frac{۲۲}{۷} \times \frac{۱}{۱۸۰} \text{ فٹ تقریباً}$$

$$= \frac{۲۲}{۷} \times \frac{۱}{۱۵} \text{ انچ تقریباً}$$

دوسری صورت میں اگر اونچائی ما ہو تو

$$\frac{۱}{۳۳} = \text{تعداد نیقطری زاویوں کی } ۵ \text{ میں}$$

$$\frac{\pi}{180} \times \frac{1}{12} =$$

اس لئے $\pi = \frac{11}{18} \times \frac{22}{7} = 3.14159$ فٹ تقریباً

$= 2.3$ انچ تقریباً

امثلہ نمبری ۲

[فرض کرو کہ $\pi = 3.14159$ اور $\frac{1}{12} = 0.08333$]

۱۔ کسی دائرہ میں ایک قوس کا طول نصف قطر کا ۳۵ گنا ہے اس کے محاذی مرکز پر جو زاویہ بنے اس میں انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۲۔ کسی دائرہ کا نصف قطر ۲۵ فٹ ہے، ایک ۵ فٹ قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنے اس میں نیمقطری زاویوں اور انگریزی درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳۔ ایک دائرہ کے بیرونی کنارہ پر درجے بنے ہوئے ہیں، اس میں ہر ایک درجہ کی زاویہ قیمت ۵ ہے اور آپس میں درجوں کا فاصلہ ۱۰ ہے، دائرہ کا نصف قطر معلوم کرو۔

۴۔ ایک درجہ دار دائرہ کا قطر ۶ فٹ ہے اور ہر ایک درجہ کی زاویہ قیمت ۵ ہے، متصل درجوں کا فاصلہ دریافت کرو۔

۵۔ اگر ایک کرہ کے ایک ہی نصف النہار پر دو مقامات کے عرضوں کا فرق ۱۰° ہو اور مقامات کے درمیان فاصلہ $\frac{1}{12}$ انچ ہو تو کرہ کا نصف قطر دریافت کرو۔

(۶) فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہے۔ دو ایسے مقامات کے عرض بلد

کا فرق معلوم کرو جن میں سے ایک مقام دوسرے مقام کی نسبت ۱۰۰ میل شمال کی طرف واقع ہو۔

۷۔ فرض کرو کہ زمیں ایک کرہ ہے اور اس کے دائرہ متوازی العرض کے درمیان فاصلہ $\frac{1}{4}$ ۶۹ میل ہے اور اس فاصلہ کے محاذی زمیں کے مرکز پر زاویہ ۹۱ بنتا ہے، زمین کا نصف قطر دریافت کرو۔

۸۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اگر اُس کی ایک قوس کے وتر کا طول بھی ۳ فٹ ہو تو قوس کے طول کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۹۔ دو دائروں کے مرکزدں پر مساوی قوسوں کے محاذی زاویے ۶۰ اور ۷۵ بنتے ہیں اُن کے نصف قطروں کی باہمی نسبت دریافت کرو

۱۰۔ ایک دائرہ کا قطر ۸ فٹ ہے اگر اُس کی ۱۰ فٹ قوس کے محاذی مرکزی زاویہ ۵۱۴۳ ۱۴ ۲۲ بنے تو ۳۲ کی قیمت ۴ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک دائرہ کے محیط کو ایسے پانچ حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے جو سلسلہ حسابیہ میں ہیں اگر سب سے بڑا حصہ سب سے چھوٹے کا ۶ گنا ہو تو حصوں کے محاذی مرکزی زاویوں کی مقداروں کو نیمقطری زاویوں میں دریافت کرو

۱۲۔ ایک قطاع دائرہ کے احاطہ کرنے والے خطوط کا مجموعہ ایک ایسی نصف دائرہ قوس کے برابر ہے جس کا نصف قطر وہی ہے جو دائرہ کا ہے، قطاع کے زاویہ کو انگریزی درجوں، دقیقوں، ثانیوں میں تعبیر کرو۔

۱۳۔ ایک آدمی کا قد ۶ فٹ ہے کتنے فاصلہ پر اُس کے محاذی ۱۰ کا زاویہ بنے گا؟

۱۴۔ ایک شے کے محاذی ایک میل کے فاصلہ پر آ کا زاویہ بنتا ہے

اُس کی اونچائی دریافت کرو۔

۱۵۔ ایک کرہ کا قطر $\frac{1}{2}$ ہینچ ہے ، معلوم کرو کہ کتنے فاصلہ پر اُس کے محاذی ۶ کا زاویہ بنے گا ؟

۱۶۔ ایک مینار کی اونچائی ۵۱ فٹ ہے اور ایک آنکھ پر اُس کے محاذی زاویہ $\frac{5}{11}$ بنتا ہے ، مینار اور آنکھ کے درمیان جو فاصلہ ہو اُس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۱۷۔ کسی گرجے کے مینار کی اونچائی ۱۰۰ فٹ ہے اور ایک آنکھ پر اُس کے محاذی زاویہ ۹ بنتا ہے آنکھ اور گرجے کے درمیان جو فاصلہ ہو اُس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۱۸۔ ایک سطح اُبل کا چڑھاؤ ۲۱۰ گز طول میں $\frac{1}{2}$ فٹ ہے سطح افقی سے اُس کے میلان کی تقریبی قیمت دقیقوں میں معلوم کرو۔

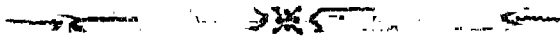
۱۹۔ فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر ۳۹۶۰ میل ہے اور چاند کا فاصلہ زمین سے زمین کے نصف قطر کا ۶ گنا ہے اگر چاند کا نصف قطر زمین پر زاویہ ۱۶ بنائے تو اُس کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۲۰۔ جب کسی خاص مقام پر چاند غروب ہو رہا ہو تو زمین کا نصف قطر جو مقام منحصر میں سے گزرتا ہے چاند کے مرکز پر $\frac{1}{2}$ کا زاویہ بناتا ہے ۔ اگر زمین کا نصف قطر ۳۹۶۰ میل فرض کیا جائے تو چاند اور زمین کے فاصلے کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔

۲۱۔ فرض کرو کہ زمین کے نصف قطر کے محاذی سورج کے فاصلے پر زاویہ $85\frac{1}{2}$ بنتا ہے اور ایک جغرافی میل کے مقابل زمین کے مرکز پر زاویہ ۱ بنتا ہے تو ثابت کرو کہ سورج کا فاصلہ زمین سے تقریباً

۸۱۰ لاکھ جغرافیائی میل ہے، نیز زمین کا قطر اور محیط دونوں جغرافیائی میلوں میں دریافت کرو۔

۲۲۔ مدار زمین کا نصف قطر ۹۲۷۰۰۰۰۰ میل ہے اور اس کے محاذی ستارہ مشعر (سریش) پر زاویہ ۴۷° بنتا ہے، ستارہ کا فاصلہ تقریباً دریافت کرو۔

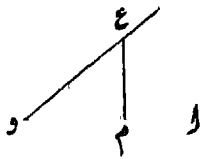


باب دوم

ایسے زاویوں کی مثلثی نسبتیں جو زاویہ قائمہ سے کم ہوں

۲۵۔ اس باب میں ہم صرف ان زاویوں کے متعلق بحث کریں گے جو زاویہ قائمہ سے کم ہوں۔

فرض کرو کہ ایک خط دائرہ مقام
و ا سے چکر لگاتا ہوا مقام و ع پر
پہنچتا ہے۔ اور زاویہ ا و ع مرتب
کرتا ہے۔ خط دائرہ پر ایک نقطہ
ع مقرر کرو اور خط ابتدائی و ا پر
اس سے عمود نکالو۔



مثلث م و ع میں و ع وتر ہے، ع م عمود اور و م قاعدہ۔
زاویہ ا و ع کی مثلثی نسبتوں یا جملوں کی تعریف اکثر اس طرح کرتے ہیں

م و ع	یعنی	عمود	کو جیب زاویہ ا و ع کی کہتے ہیں
و م	و	قاعدہ	کو جیب التمام زاویہ ا و ع کی کہتے ہیں
م و م	و	عمود	کو مماس زاویہ ا و ع کا کہتے ہیں
و م	و	قاعدہ	کو مماس التمام زاویہ ا و ع کا کہتے ہیں

دوع / م ع یعنی وتر عمود کو قاطع التمام زاویہ دوع کا کہتے ہیں
 دوع / د م " " " " قاعدہ کو قاطع

اُس مقدار کو بقدر جس کے جیب التمام ایک سے کم ہو یعنی مقدار
 ۱۔ جم دوع کو سہم الجیب یا جیب معکوس زاویہ دوع کی کہتے ہیں۔
 نیز اُس مقدار کو بقدر جس کے جیب زاویہ ایک سے کم ہو یعنی
 ۱۔ جب دوع کو سہم التمام زاویہ دوع کا کہتے ہیں۔

۲۴۔ یہ یاد رکھنا چاہیے کہ مثلثی نسبتیں سب اعداد ہیں۔
 اوپر کی آٹھ نسبتوں کو اختصار کی خاطر بالترتیب یوں لکھتے ہیں
 جب دوع، جم دوع، مس دوع، مم دوع، قم دوع،
 قط دوع، سہم دوع، سم دوع۔

آخری دو نسبتیں شاذ و نادر استعمال ہوتی ہیں
 ۲۵۔ تعریفات سے ظاہر ہے کہ قاطع التمام جیب کا متکافی یا
 مقلوب ہے۔

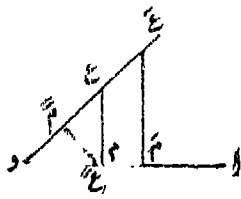
یعنی قم دوع = جب دوع
 اس طرح سے قاطع زاویہ جیب التمام کا مقلوب ہے یعنی

قط دوع = جم دوع

اور مماس التمام مماس کا مقلوب ہے یعنی

م لوع = م س لوع

۲۸۔ ثابت کرو کہ ایک زاویہ کی مثلثی نسبتیں ہمیشہ وہی رہتی
یعنی جب تک زاویہ نہ بدلے وہ نہیں بدلتیں۔



یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ اگر
خط دائرے میں کوئی اور نقطہ ع
لیا جائے اور اس سے وہاں پر عمود

ع م نکالا جائے تو مثلثی نسبتیں جو

مثلثات و ع م اور و ع م سے حاصل ہونگی وہ قیمت میں جداگانہ ایک
دوسرے کے برابر ہونگی۔

ان مثلثوں میں زاویہ مشترک ہے م اور م پر کے دونوں
زاوے قائم ہیں۔ معلوم ہوا کہ یہ مثلث متشابه ہیں اور اسلئے
بحکم اقلیدس م ہ ش م = م ع / و ع = م ع / و ع جس سے ثابت ہوا کہ
زاویہ لوع کی جیب ہمیشہ وہی رہتی ہے خواہ کوئی سا نقطہ خط دائر
پر لیا جائے۔

اور چونکہ بموجب مسئلہ مذکورہ

$$\frac{م ع}{و م} = \frac{م ع}{و م} \quad \text{اور} \quad \frac{و م}{و ع} = \frac{و م}{و ع}$$

اس سے ظاہر ہے کہ جیب انعام اور ماس زاویہ بھی ہمیشہ وہی رہتے
ہیں خواہ نقطہ خط دائر پر کہیں لیا جاسے اور باقی نسبتوں کی بھی

یہی کیفیت ہے۔

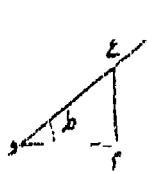
اگر وہ خط دائر خیال کریں اور اس کے کسی نقطہ E سے OE پر عمود OM نکالیں تو مثلث OME سے جو نسبتیں حاصل ہونگی ان کی قیمتیں بھی وہی ہونگی جو اوپر بیان ہوئیں۔

کیونکہ دو مثلثات OME اور $OM'E$ میں زاویہ مشترک ہے اور زاویے OME اور $OM'E$ قائمہ ہیں؛ اس سے ظاہر ہے کہ یہ دونوں مثلث متساوی الزاویہ اور اسلئے متشابه ہیں۔ اس لئے

$$\frac{OM}{OE} = \frac{OM'}{OE} \text{ اور } \frac{OM}{OE} = \frac{OM'}{OE}$$

۲۹۔ مثلثی نسبتوں کے اساسی ارتباطات یہ ہیں آگے چلکر معلوم ہوگا کہ اگر کسی زاویہ کی ایک مثلثی نسبت معلوم ہو تو باقی سب نسبتوں کی عددی قیمتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ طہ زاویہ A کو تعبیر کرتا ہے۔ [طہ کو ہم "تاہ پڑھیں گے"]
مثلث $OM'E$ میں بحکم اقلیدس
م اش ۲۷



$$(1) \quad OM^2 = OE^2 + ME^2$$

و E پر تقسیم کرنے سے

$$1 = \left(\frac{OM}{OE}\right)^2 + \left(\frac{ME}{OE}\right)^2$$

یعنی (جب طہ) ^{2} + (جم طہ) ^{2} = ۱

مقدار (جب ط) کو جب ط^۲ لکھتے ہیں اور اسی طرح باقی سب نسبتوں کو۔

پس یہ ربط حاصل ہوا جب ط^۲ + جم ط = ۱ (۲)

نیز طرفین مساوات (۱) کو دم^۲ پر تقسیم کرنے سے

$$\left(\frac{\text{م ع}}{\text{دم}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{ع}}{\text{دم}}\right)^2$$

(۲) $\frac{\text{م ع}}{\text{دم}} = 1 + \frac{\text{ع}}{\text{دم}}$

$$\text{مس ط} = 1 + \text{قط ط}$$

یعنی

$$\text{قط ط} = 1 + \text{مس ط} \dots\dots\dots (۳)$$

پس

طرفین مساوات (۱) کو م ع^۲ پر تقسیم کرنے سے

$$\left(\frac{\text{ع}}{\text{م ع}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{دم}}{\text{م ع}}\right)^2$$

$$1 + (\text{م ط})^2 = (\text{ق ط})^2$$

یعنی

$$\text{ق ط} = 1 + \text{م ط} \dots\dots\dots (۴)$$

پس

$$\frac{\text{م ع}}{\text{ع}} = \text{جب ط} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جم ط}}{\text{ع}} = \text{جم ط}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{\text{جب ط}}{\text{جم ط}} = \frac{\text{م ع}}{\text{جم ط}} \div \frac{\text{م ع}}{\text{ع}} = \frac{\text{جم ط}}{\text{دم}} = \frac{\text{م ع}}{\text{مس ط}}$$

$$\text{اس لئے} \quad \text{مس ط} = \text{جب ط} \dots\dots\dots (۵)$$

$$\text{اور اسی طرح سے} \quad \text{م ط} = \text{جم ط} \dots\dots\dots (۶)$$

۳۰۔ مثال ۱۔ ثابت کرو کہ $\sqrt{\frac{1-j}{1+j}} = \frac{1-j}{1+j}$ قم ۱۔ مم ۱

$$\sqrt{\frac{1-j}{1+j}} = \frac{1-j}{1+j}$$

بوجب نتیجہ (۲) دفعہ آخر $\frac{1-j}{1+j} = \frac{1-j}{1+j}$ جب ۱۔ مم ۱

$$= \frac{1}{1+j} - \frac{j}{1+j} = \frac{1-j}{1+j}$$

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ $\sqrt{1+j} + \sqrt{1-j} = 2$ مس ۱۔ مم ۱

ہم نے اوپر ثابت کیا ہے کہ $\sqrt{1+j} = 1 + \frac{j}{2}$ مس ۱۔ مم ۱

$$\sqrt{1-j} = 1 - \frac{j}{2}$$

اس لئے $\sqrt{1+j} + \sqrt{1-j} = 1 + \frac{j}{2} + 1 - \frac{j}{2} = 2$ مس ۱۔ مم ۱

$$= 2 + \frac{j}{2} - \frac{j}{2} = 2$$

$$= (1+j)$$

اس لئے $\sqrt{1+j} + \sqrt{1-j} = 2$ مس ۱۔ مم ۱

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ $(\frac{1-j}{1+j})(\frac{1-j}{1+j})(\frac{1-j}{1+j}) = 1$

جملہ مجوزہ $= (\frac{1-j}{1+j})(\frac{1-j}{1+j})(\frac{1-j}{1+j})$ جب ۱۔ مم ۱

$$= \frac{1-j}{1+j} \times \frac{1-j}{1+j} \times \frac{1-j}{1+j}$$

$$= \frac{1}{1+j} \times \frac{1}{1+j} \times \frac{1}{1+j} = 1$$

امثلة نمبری ۵

ارتباطات ذیل کو ثابت کرو

- ۱- حجم Δ - جیب Δ + ۱ = ۲ حجم Δ
- ۲- (جیب Δ + حجم Δ) (۱- جیب Δ حجم Δ) = جیب Δ + حجم Δ
- ۳- $\frac{\text{جیب } \Delta}{\text{حجم } \Delta} + \frac{۱ + \text{حجم } \Delta}{\text{جیب } \Delta} = ۲ \text{ قعر } \Delta$
- ۴- حجم Δ + جیب Δ = ۱ - ۳ جیب Δ × حجم Δ
- ۵- $\sqrt{\frac{۱ - \text{جیب } \Delta}{۱ + \text{جیب } \Delta}} = \text{قطر } \Delta - \text{مس } \Delta$
- ۶- $۲ \text{ قطر } \Delta = \frac{\text{قعر } \Delta}{\text{قعر } \Delta - ۱} + \frac{\text{قعر } \Delta}{۱ + \text{قعر } \Delta}$
- ۷- $\frac{\text{قعر } \Delta}{\text{محور } \Delta + \text{مس } \Delta} = \text{حجم } \Delta$
- ۸- (قطر Δ + حجم Δ) (قطر Δ - حجم Δ) = مس Δ + جیب Δ
- ۹- $\frac{۱}{\text{محور } \Delta + \text{مس } \Delta} = \text{جیب } \Delta \text{ حجم } \Delta$
- ۱۰- $\frac{۱}{\text{قطر } \Delta - \text{مس } \Delta} = \text{قطر } \Delta + \text{مس } \Delta$
- ۱۱- $\frac{۱ - \text{مس } \Delta}{۱ + \text{مس } \Delta} = \frac{\text{محور } \Delta - ۱}{۱ + \text{محور } \Delta}$
- ۱۲- $\frac{۱ + \text{مس } \Delta}{۱ + \text{محور } \Delta} = \frac{\text{جیب } \Delta}{\text{حجم } \Delta}$

$$۱۳- \frac{\text{قطر} - \text{مس}}{\text{قطر} + \text{مس}} = ۱ - \frac{۲ \text{ قطر} + \text{مس}}{۲ \text{ مس}}$$

$$۱۴- \frac{\text{مس}}{۱ - \text{مس}} + \frac{\text{مم}}{۱ - \text{مس}} = \frac{\text{قطر} + \text{قم}}{۱}$$

$$۱۵- \frac{\text{جم}}{۱ - \text{مس}} + \frac{\text{جب}}{۱ - \text{مم}} = \frac{\text{جب} + \text{جم}}{۱}$$

$$۱۶- (\text{جب} + \text{جم}) (\text{مم} + \text{مس}) = \text{قطر} + \text{قم}$$

$$۱۷- \text{قطر} - ۱ = \text{مس} + \text{مس}$$

$$۱۸- \text{مم} + \text{مم} = \text{قم} - ۱$$

$$۱۹- \frac{۲ \text{ قم} - ۱}{۱} = \text{جم} + \text{قم}$$

$$۲۰- \text{قطر} + \text{قم} = \text{مس} + \text{مم} + ۲$$

$$۲۱- \text{مس} - \text{جب} = \text{جب} + \text{قطر}$$

$$۲۲- (۱ + \text{مم} - \text{قم}) (۱ + \text{مس} + \text{قطر}) = ۲$$

$$۲۳- \frac{۱}{\text{قم} - \text{مم}} = \frac{۱}{\text{جب} - ۱} = \frac{۱}{\text{قم} + \text{مم}}$$

$$۲۴- \frac{\text{مم} + \text{جم}}{\text{مم} - \text{جم}} = \frac{\text{مم} + \text{جم}}{\text{جم} - \text{جم}}$$

$$۲۵- \frac{\text{مم} + \text{مس}}{\text{مم} - \text{مس}} = \frac{\text{مم} + \text{مس}}{\text{مس} - \text{مس}}$$

$$۲۶- \left(\frac{۱}{\text{قطر} - \text{جم}} + \frac{۱}{\text{قم} - \text{جب}} \right) = \frac{۱}{\text{جم} + \text{جب}} = \frac{۱}{۲}$$

$$۲۷- \text{جب} - \text{جم} = (\text{جب} - \text{جم}) (۱ - ۲ \text{ جب} + \text{جم})$$

$$۲۸- \frac{\text{جم} + \text{قطر}}{\text{جم} + \text{جب}} = \text{قم} - \text{قطر}$$

$$۲۹- \frac{\text{مس } ۱ + \text{قط } ۱ - ۱}{\text{مس } ۱ - \text{قط } ۱ + ۱} = \frac{۱ + \text{جب } ۱}{\text{جم } ۱}$$

$$۳۰- (\text{مس } ۲ + \text{قم } ۱) - (\text{قم } ۲ - \text{قط } ۲) = ۲ \text{ مس } ۲ + \text{قم } ۱ - \text{قط } ۲$$

$$۳۱- ۲ \text{ قط } ۲ - \text{قط } ۲ = ۲ \text{ قم } ۲ + \text{قم } ۲ = \text{مس } ۲$$

$$۳۲- (\text{جب } ۲ + \text{قم } ۲) + (\text{جم } ۲ - \text{قط } ۲) = \text{مس } ۲ + \text{قم } ۲ + ۴$$

$$۳۳- (\text{قم } ۲ + \text{قم } ۱) - (\text{قط } ۲ + \text{مس } ۱) = (\text{قط } ۱) - (\text{قم } ۱) = ۲$$

$$۳۴- (۱ + \text{قم } ۱ + \text{مس } ۱) - (\text{جب } ۱ - \text{جم } ۱) = \frac{\text{قط } ۱}{\text{قم } ۱} - \frac{\text{قم } ۱}{\text{قط } ۱}$$

$$۳۵- ۲ \text{ مس } ۱ + \text{جم } ۱ = ۱ + \text{مس } ۱$$

۳۱- مثلثی نسبتوں کی قیمتوں کی حدود

مسادات (۲) دفعہ ۲۹ سے

$$\text{جب } ۱ + \text{جم } ۱ = ۱$$

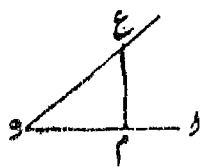
اب چونکہ جب ۱ اور جم ۱ دونوں مربع ہیں اس لئے ضروری ہے کہ وہ مثبت ہوں اور چونکہ ان کا مجموعہ ایک کے برابر ہے۔ اس لئے ظاہر ہے کہ ان میں سے کوئی بھی ایک سے بڑا نہیں ہو سکتا۔

[کیونکہ اگر ان میں سے ایک مربع مثلاً جب ۱ سے بڑا ہو تو ضرور ہے کہ دوسرا منفی ہو اور یہ غیر ممکن ہے]

پس معلوم ہوا کہ جبیب اور جیبب ان تمام دونوں میں سے کوئی بھی تعداداً ایک سے بڑی نہیں ہو سکتی۔

اب چونکہ جب طہ ایک سے بڑی نہیں ہو سکتی اس لئے قہ طہ
جو جب طہ کے برابر ہے ایک سے کم نہیں ہو سکتا۔
اسی طرح سے قہ طہ جو ہم طہ کے برابر ہے تعداداً ایک سے کم
نہیں ہو سکتا۔

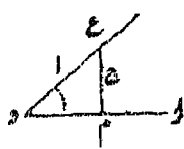
۴۲۔ شکل دفعہ ہذا سے نتائج مذکورہ بالا آسانی حاصل ہوتے



ہیں۔ کیونکہ زاویہ اوج کی خواہ کچھ ہی
قیمت ہو اضلاع و م اور م ع
طول میں وتر و سے کبھی زیادہ نہیں
ہو سکتے۔

اب چونکہ م ع وتر و سے کبھی بڑا نہیں ہو سکتا اس لئے
نسبت $\frac{م ع}{و}$ ایک سے کبھی زیادہ نہیں ہو سکتی، اس سے ظاہر
ہے کہ جیب زاویہ ایک سے کبھی بڑھ نہیں سکتی۔
نیز چونکہ و م وتر و سے ہمیشہ کم رہتا ہے اس لئے نسبت
 $\frac{و م}{و}$ ایک سے ہمیشہ کم رہے گی یعنی جیب الثمام ایک سے کبھی
زیادہ نہ ہوگی۔

۴۳۔ ہم کسی زاویہ کی مثلثی نسبتوں کو کسی ایک نسبت کی رقوم
میں بیان کر سکتے ہیں، اس ترکیب عمل کی توضیح اشلہ ذیل سے ہوگی۔
مثال ۱۔ کسی زاویہ کی مثلثی نسبتوں کو جیب کی رقوم میں بیان کرو
فرض کرو کہ اوج کوئی زاویہ طہ ہے



اور و م کا طول ایک ہے اور م ع
کا متناسب طول ج ہے۔

اقلیدس م اش ۴م سے ۱وم = م [وع - ۲م ع] = م [ا ج - ۱ج]

اس لئے جب طہ = مع = $\frac{ج}{ا} = ج$

جم طه = $\frac{و م}{ع} = \sqrt{1 - ج} = \sqrt{1 - ج طه}$

$$\frac{\text{مس طه} = \frac{\text{م م ع}}{\text{و م}} = \frac{\text{ج}}{\text{ما - ج}} = \frac{\text{ج ب طه}}{\text{ما - ج ب طه}}$$
$$\frac{\text{محمطه} = \frac{\text{وم}}{\text{مع}} = \frac{\sqrt{1-\text{ج}^2}}{\text{ج}} = \frac{1}{\text{ج}} \sqrt{1-\text{ج}^2}$$
$$\frac{1}{\text{جیبہ طہ}} = \frac{1}{\text{ج}} = \frac{\text{وع}}{\text{مع}} = \text{مقم طہ}$$
$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

آفری پانچ مساواتوں سے جو کچھ مطلوب تھا حاصل ہوا
مثال ۲۔ سب مثلثی نسبتوں کو ماس التمام کی رقوم میں بیان کرو۔
حسب معمول شکل بناؤ اور فرض کرو کہ m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i j k l m n p q r s t u v w x y z a b c d e f g h i

کا طول ایک سے اور وسم کا متناسب
طول لا ہے

اقلیدس مراش ۱۴۸۷

$$ع = \sqrt{م} + \sqrt{ع} = \sqrt{م} + 1 = 2$$

اس لئے $\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\frac{1}{a}}$

$$\frac{1}{1م + ۱م طه} = \frac{1}{۱لا + ۱م} = \frac{م}{ع} = \text{جب طه} = \frac{م}{ع}$$

$$\frac{م}{1م + ۱م طه} = \frac{لا}{۱لا + ۱م} = \frac{وم}{ع} = \text{جم طه} = \frac{وم}{ع}$$

$$\frac{1}{م طه} = \frac{1}{لا} = \frac{م}{وم} = \text{مس طه} = \frac{م}{وم}$$

$$\frac{1}{1م + ۱م طه} = \frac{۱لا + ۱م}{لا} = \frac{ع}{وم} = \text{قط طه} = \frac{ع}{وم}$$

$$\text{اور قم طه} = \frac{ع}{م} = \frac{۱لا + ۱م}{۱} = ۱م + ۱م طه$$

جو کچھ مطلوب تھا آخری پانچ مساواتوں سے حاصل ہوا
یاد رہے کہ اوپر کی ہر ایک صورت میں اس کسر کا نسب نامہ جسکی
رقوم میں باقی مثنیٰ نسبتوں کو بیان کرنا مطلوب ہے ہمیشہ ایک
لیا گیا ہے مثلاً زاویہ طه کی جیب $\frac{م}{ع}$ ہے۔ اسلئے مثال ۱ میں
نسب نامہ ع کا طول ایک کے برابر لیا گیا ہے اور چونکہ ماس التمام $\frac{وم}{ع}$
ہے اسلئے مثال ۲ میں ضلع م ع کو ایک کے مساوی فرض کیا ہے۔
اسی طرح سے اگر باقی مثنیٰ نسبتوں کو جیب التمام کی رقوم میں
بیان کرنا ہو تو چونکہ جیب التمام $\frac{وم}{ع}$ ہے اس لئے ع کو ایک
کے برابر فرض کرنا چاہیئے اور وم کو لا کے، اس کے بعد عمل
بالکل ایسا ہی ہوگا جیسا کہ مثلہ ۱ اور ۲ میں ہوا۔

امثلہ ذیل میں اضلاع کی قیمتیں عددی ہیں
مثال ۳۔ اگر حجم $= \frac{۳}{۵}$ تو باقی نسبتوں کی قیمتیں دریاف کرو۔

سنتی سبتیں

۴۴

و

م

ب ب دوم

خط ابتدائی واپر دوم برابر ۳ کے لہ اور ایک عمود م ع کھینچو، نیز فرض کرو کہ ایک خط و ع جس کا طول ۵ ہے نقطہ و کے گرد چکر لگاتا ہوا عمود م ع کو نقطہ ع پر قطع کرتا ہے تب اور ع زاویہ مجوزہ ہوگا

بحکم اقلیدس م اش ۴۷، م ع = ۱۱ اور ع - ۲ = ۲۵ = ۲۳ - ۲ = ۲
اس لئے صریحاً

جب ط = $\frac{۲}{۵}$ ، مس ط = $\frac{۳}{۵}$ ، مم ط = $\frac{۳}{۵}$ ، قم ط = $\frac{۵}{۵}$ اور ق ط ط = $\frac{۵}{۵}$
مثال ۴ - اگر زاویہ ط کی جیب $\frac{۱}{۳}$ ہو تو باقی مثلثی نسبتوں کی عددی قیمتیں دریافت کرو۔

چونکہ جب ط = $\frac{۱}{۳}$ اس لئے ربط (۲) دفعہ ۲۹ سے ظاہر ہے کہ

$$۱ = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ + \text{جم}^۲ \text{ط} = ۱$$

$$\text{یعنی جم}^۲ \text{ط} = ۱ - \frac{۱}{۹} = \frac{۸}{۹}$$

$$\text{یعنی جم ط} = \frac{\sqrt{۸۲}}{۳}$$

$$\text{اس لئے مس ط} = \frac{\text{جیب ط}}{\text{جم ط}} = \frac{۱}{\frac{\sqrt{۸۲}}{۳}} = \frac{\sqrt{۸۲}}{۳}$$

$$\text{مم ط} = \frac{۱}{\text{مس ط}} = \frac{۳}{\sqrt{۸۲}}$$

$$\text{قم ط} = \frac{۳}{\text{جیب ط}} = ۳$$

$$\text{ق ط ط} = \frac{۳}{\frac{\sqrt{۸۲}}{۳}} = \frac{۹}{\sqrt{۸۲}}$$

$$\text{سم ط} = ۱ - \text{جم ط} = ۱ - \frac{\sqrt{۸۲}}{۳}$$

$$\text{سم ط} = ۱ - \text{جیب ط} = ۱ - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

۳۴ - نقشہ ذیل میں ہر مثلثی نسبت کو باقی سب نسبتوں کی قوم میں بیان کیا گیا ہے

امثلہ نمبری ۶

- ۱- سب مشتیں نسبتوں کو جیب النمام کی رقوم میں بیان کرو
- ۲- سب نسبتوں کو مماس کی رقوم میں بیان کرو
- ۳- سب نسبتوں کو قاطع النمام کی رقوم میں بیان کرو
- ۴- سب نسبتوں کو قاطع الزاویہ کی رقوم میں بیان کرو
- ۵- ایک زاویہ کی جیب $\frac{1}{2}$ ہے اسکی اور مشتیں نسبتوں کی عددی قیمتیں دریافت کرو۔

- ۶- اگر جیب طہ = $\frac{12}{13}$ تو مس طہ اور سم طہ کی قیمتیں دریافت کرو
- ۷- اگر جیب طہ = $\frac{11}{14}$ تو مس طہ، جم طہ اور قط طہ دریافت کرو
- ۸- اگر جم طہ = $\frac{5}{6}$ تو معلوم کرو جیب طہ اور مم طہ
- ۹- اگر جم طہ = $\frac{9}{11}$ تو مس طہ اور قہ طہ دریافت کرو
- ۱۰- اگر مس طہ = $\frac{3}{4}$ تو زاویہ طہ کی جب، جم، سمہ اور قہ دریافت کرو
- ۱۱- اگر مس طہ = $\frac{1}{2}$ تو قہ طہ = قط طہ کی قیمت دریافت کرو
- ۱۲- اگر مم طہ = $\frac{15}{8}$ تو جم طہ اور قہ طہ کی قیمتیں دریافت کرو
- ۱۳- اگر قط طہ = $\frac{2}{3}$ تو معلوم کرو مس طہ اور قہ طہ
- ۱۴- اگر جیب طہ = ۲- جم طہ تو جیب طہ دریافت کرو۔
- ۱۵- اگر جیب طہ = ۳ + جم طہ تو معلوم کرو جیب طہ
- ۱۶- اگر مس طہ + قط طہ = ۱۵ تو معلوم کرو جیب طہ
- ۱۷- اگر مم طہ + قہ طہ = ۵ تو معلوم کرو جم طہ

۱۸۔ اگر ۳ قطہ = ۸ + ۱۰ قطہ تو مس طہ کی قیمت دریافت کرو۔

۱۹۔ اگر مس طہ + قطہ = ۵ تو معلوم کرو حجم طہ

۲۰۔ اگر مس طہ + مم طہ = ۲ تو معلوم کرو جب طہ۔

۲۱۔ اگر قطہ = ۲ + ۲ مس طہ تو معلوم کرو مس طہ۔

۲۲۔ اگر مس طہ = $\frac{۲(۱+لا)}{۱+لا}$ تو معلوم کرو جب طہ اور حجم طہ

۳۵۔ اب ہم چند کارآمد زاویوں کی مثلثی نسبتیں دریافت کریں گے، سوالات میں یہ اکثر استعمال ہوتی ہیں۔ طالب علم کو ان سے بخوبی واقف ہونا چاہیے مگر سب سے پہلے ہم ”لائتا ہی“ کے معنی بیان کریں گے۔

تعریف۔ ہماری موجودہ اغراض کے لئے یہ تعریف کافی ہوگی کہ لائتا ہی ایک ایسا عدد ہے جو کسی اور عدد سے جو بیان ہو سکے یا ذہن میں آسکے بڑا ہو، اس کو ہم علامت ∞ سے تعبیر کریں گے۔

بڑے سے بڑے عدد کا تصور باندھنا محض ناممکن ہے کیونکہ اگر ایسے عدد کا خیال میں آنا ممکن ہو تو اُس سے بڑے عدد کے تخین میں کیا مشکل ہو سکتی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خواہ کتنا ہی بڑا عدد کیوں نہ لیا جائے وہ لائتا ہی سے ہمیشہ کم رہے گا۔ پس ایسے بیانات مثلاً $\infty = \infty$ کا یہ مطلب ہرگز نہیں کہ لائتا ہی کی کوئی خاص قیمت ہے اور لا اُس کے برابر ہے نیز معادلات $\infty = لا$ اور $\infty = ما$ سے یہ نتیجہ لازماً صادق نہیں

آتا کہ لا = ما

تعریف - صفروہ عدد ہے جو ایک کی ہر ایک کسر مقررہ سے کم ہو۔ مقدار محدود وہ ہے جو نہ تو صفر ہو اور نہ مقدار غیر متناہی۔
 اگر کسی محدود مقدار کو صفر پر تقسیم کیا جائے تو خارج قسمت مقدار غیر متناہی کے برابر ہوگا۔

فرض کرو کہ $\frac{1}{a}$ کوئی مقدار محدود ہے ہم یہ ثابت کریں گے کہ $\frac{1}{a}$ صفر ایک ایسی مقدار کے برابر ہے جو ہر ایک مقدار محدود (مثلاً n) سے جو ہمارے ذہن میں آسکے بڑی ہے۔

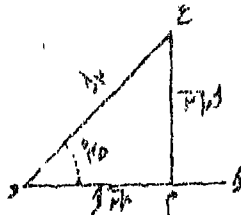
$\frac{1}{a}$ کو صفر پر تقسیم کر دو اور n کو خارج قسمت ٹھہراؤ (ن) $\frac{1}{a} \div n$
 اب چونکہ $\frac{1}{a} \times n = 1$ اسلئے باقی ۱ ہے

پس معلوم ہوا کہ خواہ کتنا بڑا عدد (n) بطور خارج قسمت کے لیا جائے $\frac{1}{a}$ ہمیشہ باقی بچے گا۔ اس سے ثابت ہوا کہ نسبت $\frac{1}{a}$ صفر ہر ایک عدد سے بڑی ہے خواہ وہ عدد کتنا ہی بڑا کیوں نہ ہو اور اس کو ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں کہ

$$\frac{1}{a} \div \infty = 0$$

اور اگر مقدار غیر متناہی نہ ہو تو $\frac{1}{a} \div \infty = 0$

چند کارآمد صورتوں میں مثلثی نسبتوں کی قیمتیں



۳۷ - ۴۵ کا زاویہ

فرض کرو کہ زاویہ مرتبہ $45^\circ = 45^\circ$

اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں

زاویوں کا مجموعہ ۲ قانوں کے برابر ہوتا ہے، اس لئے
زاویہ $\text{وع م} = ۱۸۰ - \text{زاویہ ع وم} - \text{زاویہ ع م و}$
 $= ۱۸۰ - ۴۵ - ۹۰ = ۴۵ = \text{زاویہ ع وم}$

∴ $\text{وم} = \text{ع م}$
اگر وع کو ۱۲ کے برابر فرض کریں تو

$$\text{م} = ۱ = \text{وع} = \text{وم} + \text{ع م} = ۲ \times \text{وم}$$

یعنی $\text{وم} = ۱/۲$

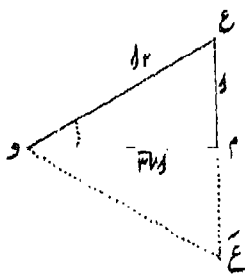
اس لئے جب $\frac{۱}{۲} = \frac{۱/۲}{۱۲} = \frac{\text{ع م}}{\text{وع}} = ۴۵$

جم $\frac{۱}{۲} = \frac{۱/۲}{۱۲} = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = ۴۵$

اور $\text{مس} = ۱ = ۴۵$

۳۸-۳۹ کا زاویہ

فرض کرو کہ ۳۰ کا زاویہ وع م ہے،
ع م کو ع تک خارج کرو
اور م ع کو ع م کے برابر
بناؤ۔



مثلث وم ع اور وم ع م

اضلاع وم اور م ع اضلاع وم اور م ع کے بالترتیب برابر
ہیں۔ نیز ان کے درمیانی زاویے قائمے ہیں۔ اس لئے

$$\text{وع} = \text{وع اور زاویہ ع م} = \text{وع ع} = ۹۰$$

اس سے معلوم ہوا کہ مثلث وع ع متساوی الاضلاع ہے۔

اب اگر وع کا طول ۵۲ ہو

تو $\frac{1}{p} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$

نیز $وم = اوع = م = مام = لا = مام$

∴ جب $\frac{م}{وع} = \frac{1}{4}$

$$\frac{\sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{3 \cdot 4}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{4}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} = \sqrt{3}$$

اور مس = $\frac{\text{جیب } 45^\circ}{\text{جہم } 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1$

23/1/84. - 40

فرض کرو کہ ۶۰ کا زاویہ اوج ہے

وایر ایک ایسا نقطہ ن کو کہ

هم ن = وم = ا (فرض کرو)

اب مشافہت و مرغ کے اصطلاح

وہم اور مع شہادت ان مع

اضلاع ان م اور م ع کے بائیں ترتیب برابر ہیں اور ان کے

درمیانی زاوے قائمے ہیں۔ اس سے معلوم ہوا کہ مثلث

یاجم مساوی ہیں۔

اس لئے $ع ن = و م$ اور

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

اس سے ثابت ہوا کہ مثلاً و عن متساوی الاضلاع سے

اس لئے $ع = ون = ۲$ و $م = ۱۲$

$$\sqrt{1 \times 3} = \sqrt{1} \times \sqrt{3} = 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{3} = 1.732 \text{ م.ع.} = 1.732 \text{ م.ع.}$$

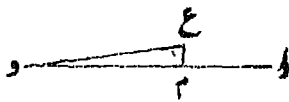
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.732}{2} = 0.866 = \frac{\text{م.ع.}}{\text{وج}} = 0.866$$

$$\frac{1}{2} = \frac{0.866}{1.732} = \frac{\text{وج}}{\text{م.ع.}} = 0.866$$

$$\sqrt{3} = \frac{\text{وج}}{0.866} = 1.732 \text{ م.ع.}$$

۴۰۔ صفر درجہ (۰) کا زاویہ۔

فرض کرو کہ خط دائرہ نے و
کے گرد گھومنے سے نہایت ہی
قلیل زاویہ پیدا کیا ہے۔

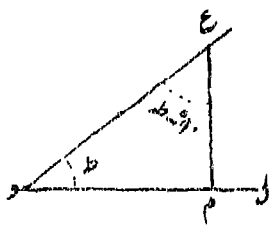


یعنی فرض کرو کہ زاویہ م.ع. نہایت چھوٹا ہے
ظاہر ہے کہ مقدار م.ع. نہایت ہی قلیل ہے اور ابتدا میں جب
وج نے اس زاویہ کا مرتسم کرنا عین شروع ہی کیا تھا تو اُس وقت
مقدار م.ع. ہر مقدار معینہ سے کم تھی یعنی ایک ایسی مقدار تھی
جسے ہم صفر سے تعبیر کرتے ہیں۔

اب اگر فرض کیا جائے کہ
زاویہ داوع واقعی صفر کے برابر ہے

تو اس صورت میں دم اور وج
(اور نقاط ع اور م) ایک دوسرے پر منطبق ہونگے اور عمود
ع م معدوم ہو جائے گا

۴۳۔ متم زاو۔ یہیہ - تعریف - اگر دو زاویوں کا مجموعہ ایک قائمہ کے برابر ہو تو ان میں سے ہر ایک کو دوسرے کا متم کہتے ہیں۔ مثلاً فرض کرو کہ کوئی زاویہ ط ہے اس کا متم زاویہ ۹۰° - ط ہوگا۔



۴۴۔ دو متم زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے باہمی ارتباطات دریافت کرو

فرض کرو کہ ایک چکر لگانے والا خط دلا سے شروع ہو کر مقام دوع پر پہنچتا ہے اور اپنے گھاؤ سے

زاویہ دوع یعنی زاویہ ط پیدا کرتا ہے۔ خط دائر دوع پر کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور اس سے دایر عمود ع م نکالو۔

اب چونکہ ایک مثلث کے تینوں زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے اور چونکہ زاویہ دوع قائم ہے اس لیے معلوم ہوا کہ زاویہ م دوع اور زاویہ ع م کا حاصل جمع ایک قائمہ کے برابر ہے۔ پس یہ دونوں زاوے ایک دوسرے کے متم ہوئے۔

یعنی زاویہ دوع م = ۹۰° - ط

[جس وقت زاویہ دوع م زیر بحث ہو تو یاد رہے کہ خط ع م "قائدہ" ہے اور م و "عمود"]

پس۔

جیب (۹۰۔ طہ) = جیب م ع د = $\frac{م د}{ع د}$ = جیب اوع = حجم طہ
 حجم (۹۰۔ طہ) = حجم م ع د = $\frac{ع د}{م د}$ = جیب اوع = جیب طہ
 مس (۹۰۔ طہ) = مس م ع د = $\frac{م د}{ع م}$ = مم اوع = مم طہ
 مم (۹۰۔ طہ) = مم م ع د = $\frac{ع م}{م د}$ = مس اوع = مس طہ
 قم (۹۰۔ طہ) = قم م ع د = $\frac{ع د}{م د}$ = قط اوع = قط طہ
 قط (۹۰۔ طہ) = قط م ع د = $\frac{ع د}{ع م}$ = قم اوع = قم طہ

اس لئے معلوم ہوا کہ

کسی زاویہ کی جیب = اسکے متمم کی جیب التمام کے

کسی زاویہ کا مماس = اسکے متمم کے مماس التمام کے

کسی زاویہ کا قاطع = اسکے متمم کے قاطع التمام کے

۴۵۔ طالب علم کو آگے جانے سے پیشتر جدول ذیل سے بخوبی واقف ہو جانا چاہیے

زاویہ	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰
جیب	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱
جیب التمام	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{۱}{۲}$	۰
مماس	۰	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞
مماس التمام	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{۱}{\sqrt{۳}}$	۰
قاطع التمام	∞	۲	$\sqrt{۲}$	$\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	۱
قاطع الزاویہ	۱	$\frac{۲}{\sqrt{۳}}$	$\sqrt{۲}$	۲	∞

اگر طالب علم صرف اس حصہ کو بخوبی یاد کر لے جو جلی خط کے اندر ہے تو اس کی مدد سے باقی مثلثی نسبتوں کا حساب آسانی لگ سکیگا کیونکہ

(۱) جیوب ۶۰° اور ۹۰° بالترتیب جیوب التمام ۳۰° اور ۰° کے برابر ہیں۔

(۲) جیوب التمام ۶۰° اور ۹۰° جیوب ۳۰° اور ۰° کے برابر ہیں

اس سے دوسری اور تیسری سطریں معلوم ہوتی ہیں۔

(۳) کسی زاویہ کا مماس جیب کو جیب التمام پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ چوتھی سطر کی کوئی مقدار دوسری سطر کی کسی مقدار کو تیسری سطر کی مطابق مقدار پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے

(۴) چونکہ زاویہ کا مماس التمام اس کے مماس کا مقلوب ہوتا ہے اس لئے پانچویں سطر کی مقداریں چوتھی سطر کی مقداروں کے مقلوبوں کے برابر ہیں

(۵) چونکہ قوس = جیب طہ اس لئے چھٹی سطر دوسری کی مقادیر کو التمام سے حاصل ہوتی ہے۔

(۶) اور چونکہ قوس طہ = جیب طہ اس لئے معلوم ہوا کہ ساتویں سطر تیسری سطر کی مقادیر کو التمام سے حاصل ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۷

۱۔ اگر $۱ = ۳۰^\circ$ تو تصدیق کرو کہ

(۱) $\text{جیب } ۱۲^\circ = \text{جیب } ۱ - \text{جیب } ۱ = ۲ - \text{جیب } ۱۲^\circ - ۱$

$$(۲) \text{ جب } ۱۲ = ۲ \text{ جب } ۱ \text{ جم } ۱$$

$$(۳) \text{ جم } ۳۱ = ۴ \text{ جم } ۱ - ۳ \text{ جم } ۱$$

$$(۴) \text{ جب } ۱۳ = ۳ \text{ جب } ۱ - ۴ \text{ جب } ۱$$

$$(۵) \text{ مس } ۱۲ = ۲ \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ مس } ۱$$

۴۔ اگر ۱ = ۵۴ تو اس کی تصدیق کرو کہ

$$(۱) \text{ جب } ۱۲ = ۲ \text{ جب } ۱ \text{ جم } ۱$$

$$(۲) \text{ جم } ۱۲ = ۱ - ۲ \text{ جب } ۱$$

$$(۳) \text{ مس } ۱۲ = ۲ \text{ مس } ۱ - ۱ \text{ مس } ۱$$

اس کی تصدیق کرو کہ

$$۳ - \text{ جب } ۱۰۰ + \text{ جب } ۲۵ + \text{ جب } ۱۰ = \frac{۳}{۲}$$

$$۴ - \text{ مس } ۱۰۰ + \text{ مس } ۲۵ + \text{ مس } ۱۰ = \frac{۱}{۳}$$

$$۵ - \text{ جب } ۱۰۰ \text{ جم } ۱۰ + \text{ جم } ۳۰ \text{ جب } ۱۰ = ۱$$

$$۶ - \text{ جم } ۵۴ \text{ جم } ۱۰ - \text{ جب } ۵۴ \text{ جب } ۱۰ = \frac{۱-۳}{۲ \times ۲}$$

$$۷ - \frac{۲}{۳} \text{ مم } ۳۰ + \text{ جب } ۳ - ۴ - ۲ \text{ مم } ۱۰ - \frac{۳}{۲} \text{ مس } ۳۰ = \frac{۱}{۳}$$

$$۸ - \text{ مم } ۵۴ \times \text{ قط } ۳۰ \times \text{ جب } ۱۰ \times \text{ جم } ۱۰ = \frac{۱}{۳}$$

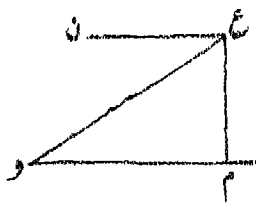
$$۹ - \text{ مم } ۵۴ - \text{ قط } ۱۰ + \text{ جب } ۳۰ = \frac{۱}{۸}$$

باب سوم

بلندیوں اور فاصلوں کے آسان سوالات

۴۔ علم مثلث کے خاص مقاصد میں سے ایک یہ بھی ہے کہ اس کی مدد سے اشیاء کی بلندیاں اور مختلف نقاط کے باہمی فاصلے حقیقی طور پر ناپے بغیر دریافت ہو سکیں۔

۵۔ فرض کرو کہ W اور E دو نقطے ہیں اور E بہ نسبت W کے



اونچی سطح پر واقع ہے نقطہ W سے
ایک خط افقی WM کھینچو جو عمودی
خط E م کو نقطہ M پر قطع
کرے۔

اگر مقام W پر کھڑے ہو کر نقطہ E کی سمت میں دیکھیں تو زاویہ
م WE جو خط نظری WE اور خط افقی WM کے درمیان بنتا ہے
نقطہ E کا زاویہ ارتقاع یا زاویہ فراز کہلاتا ہے۔

م W کے متوازی EN کھینچو تب نقطہ E میں سے گزرنے والا
خط افقی EN ہوگا۔ اب اگر مقام E سے نیچے کی طرف کو نقطہ
 W کی سیدھ میں دیکھیں تو زاویہ N WE جو خط نظری WE اور

خط اُفقی ع ن کے درمیان بنتا ہے نقطہ و کا زاویہ انخفاض یا زاویہ نشیب کہلاتا ہے۔

۴۸۔ زاویوں کی عملی پیمائش کے لئے دو آلے اکثر استعمال ہوتے ہیں زاویہ بین (تھیوڈولائیٹ) اور سڈس (سکس ٹینٹ) زاویہ بین سے اکثر سطح عمودی میں زاویوں کا اندازہ ہو سکتا ہے اس کی نہایت مسادى صورت یہ ہے۔ ایک دور بین لکڑی کی چپٹی تختی پر قائم کردی جاتی ہے۔ سہارے کے لئے اس تختی کے تین پائے ہوتے ہیں اور ان کو سہوار سطح پر اس طرح رکھتے ہیں کہ تختی اور دور بین دونوں سطح اُفقی میں ہوں۔

فرض کرو کہ یہ تختی مقام و پر ستوازی الافق ہے اور دور بین کا رخ ابتدا میں سمت و م میں ہے۔ اب دور بین کو سطح عمودی میں پھرتے جاؤ جب تک کہ اس کا رخ عین نقطہ ع کی سیدھ میں نہ ہو جائے۔ جب ایسا ہو تو ایک درجہ دار پیمانہ سے ہیکو دور بین کے گھماؤ کے زاویہ کی مقدار معلوم ہو جائیگی، یعنی ہیکو زاویہ ارتفاع م و ع معلوم ہو جائے گا۔

اسی طرح سے اگر آلہ مقام ع پر ہو تو زاویہ ن ع و جس میں دور بین سمت اُفقی سے نیچے کی طرف نقطہ و کے محاذی ہونیکے لئے پھرے گی زاویہ انخفاض ن ع و ہوگا۔

اس آلہ کی مدد سے ان زاویوں کی پیمائش بھی ممکن ہے جو سطح اُفقی میں واقع ہوں۔

۴۹۔ سڈس (سکس ٹینٹ) سے ایسے زاویوں کی پیمائش ہو سکتی ہے جو کسی دو نقاط د اور ع کے خط وصل کے محاذی تیسرے

نقطہ ف پر نہیں۔ اکثر یہ آلہ جہازوں پر استعمال ہوتا ہے اس کی بناوٹ اور اس کا استعمال ذرا پیچیدہ ہے۔ لہذا ہم اس جگہ اس کا ذکر نہیں کرتے۔

۵۰۔ اب ہم فاصلوں اور بلندیوں کی چند آسان مثالیں حل کریں گے۔

مثال ۱۔ سطح سموار پر ایک علم قائم ہے اس کے پائین سے ۱۵۰ فٹ کے فاصلہ پر ایک مقام سے اسکی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۳۰° مشاہدہ کیا گیا ہے، علم کی بلندی دریافت کرو۔

فرض کرو کہ م م ع (شکل دفعہ ۷۴) علم ہے اور و ایسا نقطہ ہے جس سے زاویہ ارتفاع دیکھا گیا ہے۔

تب و م = ۱۵۰ فٹ اور زاویہ م و ع = ۳۰°
اب چونکہ م و ع زاویہ قائمہ ہے۔ اس لئے

$$\frac{و}{م} = \frac{م}{م و ع} = \frac{م}{۳۰} = \frac{۱}{۳} \quad (\text{دفعہ ۳۸})$$

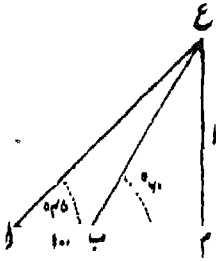
$$\therefore م و ع = \frac{و}{\frac{۱}{۳}} = \frac{۱۵۰}{\frac{۱}{۳}} = \frac{۳۱۵۰}{۱} = ۳۱۵۰$$

اور استخراج جذر سے $\sqrt{۳۱۵۰} = ۵۶.۰۷۷۶۲۵.....$

اس لئے م و ع = $۵۶.۰۷۷۶۲۵..... \times ۵۰ = ۲۸۰۳.۸۸۰۱۲۵$ فٹ

مثال ۲۔ سطح آنتی پر ایک گرج کا مینار ہے اور ایک شخص اس کی بلندی دریافت کرنا چاہتا ہے۔ سطح کے کسی مقام سے

اس نے مینار کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۵۴° مشاہدہ کیا اور ۱۰۰ فٹ برج کی سمت میں جانے پر زاویہ ارتفاع ۶۰° دیکھا۔ برج کی بلندی اور پائین برج سے اس کا ابتدائی فاصلہ دریافت کرو۔



فرض کرو کہ مینار کی چوٹی C ہے

اور B اور ج دو مقامات ہیں

جہاں سے زاویوں کے ارتفاع

مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ B ج مدوہ پر

عمود C م نکالو اور فرض کرو کہ C م = لا

ہیں معلوم ہے B ج = ۱۰۰ فٹ

$$C م = ۵۴$$

$$\text{اور } C ج = ۶۰$$

$$\text{اس سے } \frac{C م}{C ج} = \frac{۵۴}{۶۰}$$

$$\text{اور } \frac{۱}{۳۸} = ۶۰ = \frac{C م}{C ج}$$

$$\text{اس لئے } C م = لا \text{ اور } C ج = \frac{لا}{۳۸}$$

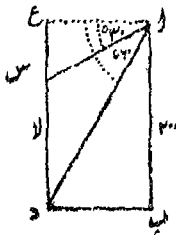
$$۱۰۰ = C م - C ج = لا - \frac{لا}{۳۸} = لا \left(۱ - \frac{۱}{۳۸} \right)$$

$$\therefore لا = \frac{۳۸ \times ۱۰۰}{۳۸ - ۱} = \frac{(۳۸ + ۱) \times ۵۰}{۳۸ - ۱}$$

$$= ۵۰ (۳۸ + ۱) = ۵۰ (۳۸ + ۱) = ۵۰ \times ۳۹ = ۱۹۵۰ \text{ فٹ}$$

نیز C م = لا، اس سے معلوم ہوا کہ سہرہ مطلوبہ فاصلے ۱۹۵۰ فٹ ہیں

مثال ۳۔ ایک ۲۰۰ فٹ بلند پہاڑ کی چوٹی سے ایک برج کے نقطہ اسفل اور راس کے انخفاضی زاوے ۹۰° اور ۳۰° مشاہدہ کئے گئے ہیں، برج کی بلندی دریافت کرو۔



فرض کرو کہ س د برج سے ہے۔
۱ نقطہ نگاہ اور ب پہاڑ کی بلندی۔
خط افقی اے د کھینچو تب زاویہ اے د س = ۳۰°
اور زاویہ اے د ب = ۹۰°

فرض کرو کہ برج کی بلندی لا فٹ ہے، دس کو اتنا خارج کرو کہ وہ اے کو نقطہ ع پر ملے یعنی س ع = د ب = لا = ۲۰۰۔ لا اب چونکہ د ب = د ا = ۹۰° (اقلیدس مش ۲۹)

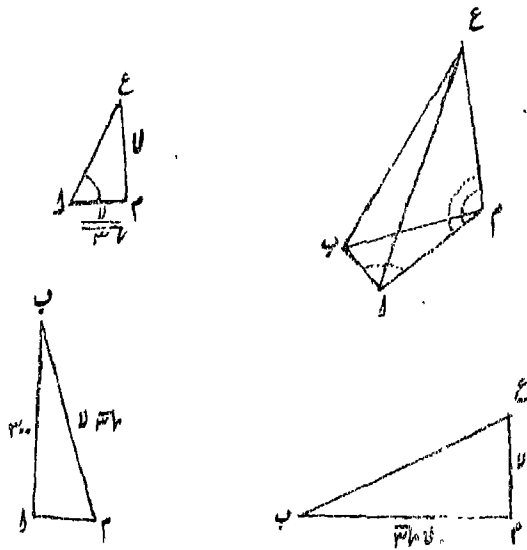
$$\therefore د ب = ا ب = م د ب = ۲۰۰ \text{ م } ۹۰ = \frac{۲۰۰}{\sin ۳۰}$$

$$\text{نیز } \frac{۲۰۰ - د ب}{د ب} = \frac{س ع}{ا ع} = \frac{س}{س + لا} = \frac{۳۰}{۳۰ + لا}$$

$$\text{اس لئے } ۲۰۰ - لا = د ب = \frac{۲۰۰}{\sin ۳۰}$$

$$\text{پس } لا = ۲۰۰ - \frac{۲۰۰}{\sin ۳۰} = \frac{۱}{\sin ۳۰} - ۱$$

مثال ۴۔ ایک برج کی جانب جنوب میں کسی مقام سے ایک شخص نے برج کا زاویہ ارتفاع ۹۰° دیکھا اس کے بعد ایک سطح افقی پر وہ ۳۰ فٹ مغرب کی طرف گیا اور وہاں زاویہ ارتفاع ۳۰° پایا، برج کی بلندی اور برج سے اُسس کا ابتدائی فاصلہ دریافت کرو۔



فرض کرو کہ ع برج کی چوٹی ہے اور ع م بلندی۔ نقطہ ا برج کے جنوب میں اور ب نقطہ ا کی جانب مغرب میں واقع ہے۔
 زاویے ع م ا، ع م ب، م ا ب سب قائمے ہیں۔ چونکہ مثلثات
 ع ا م، ع ب م، ا ب م سب مختلف سطحوں میں واقع ہیں اسلئے
 سہولت کی خاطر ان کو دوسری، تیسری، چوتھی شکلوں میں جداگانہ ملوث
 ایک مناسب پیمانہ واحد کے دکھایا گیا ہے۔

ہمیں معلوم ہے کہ ا ب سب = ۳۰ فٹ اور زاویہ ع ا م = ۶۰°

اور زاویہ ع ب م = ۳۰°

فرض کرو کہ برج کی بلندی لافٹ ہے۔

$$\frac{1}{32} = \frac{1}{40} = \frac{1}{32} = 90 \text{ مم}$$

$$\frac{1}{32} = 1 \text{ مم}$$

$$\frac{1}{32} = \frac{1}{32} = 90 \text{ مم}$$

$$1 \times 32 = 32$$

$$\text{آخری شکل سے } 1 \text{ مم} + 1 \text{ مم} = 2 \text{ مم}$$

$$2 \text{ مم} + 1 \text{ مم} = 3 \text{ مم}$$

$$3 \text{ مم} \times 3 = 9$$

$$9 \text{ مم} = \frac{9}{2} \text{ مم} = 4.5 \text{ مم}$$

$$18241 \dots = 2323929 \dots \times 45 =$$

نیز اس شخص کا بچ سے ابتدائی فاصلہ

$$32 \times 45 = \frac{1}{32} = 90 \text{ مم}$$

$$1045045 \dots = (12122 \dots) \times 45 =$$

امثلہ نمبری ۸

دریا کے ایک کنارے پر کھڑے ہو کر ایک شخص نے

مقابل کے کنارے پر ایک درخت کے محاذی زاویہ ۶۰° مشاہدہ کیا
کنارے سے ۳۰ فٹ پیچھے بیٹھنے پر وہی زاویہ ۳۰° دیکھا، درخت کی
اونچائی اور دریا کی چوڑائی دریافت کرو۔

۲۔ کسی خاص مقام سے ایک برج کا زاویہ ارتقاع دیکھا تو
اُس کا محاس التمام ۱۰ تھا، برج کی سیدھ میں ۳۲ فٹ جانے پر
پھر وہی زاویہ دیکھا تو اُس کا محاس التمام ۱۰ تھا۔ برج کی بلندی
دریافت کرو۔

۳۔ مقام ۱ سے ایک برج کا زاویہ ارتقاع دیکھا گیا اُس وقت
اس کا محاس ۱۰ تھا۔ برج کی طرف ۲۴۰ فٹ جانے پر زاویہ ارتقاع
دوبارہ دیکھا گیا تو اُس کا محاس ۱۰ تھا۔ برج کی بلندی دریافت کرو۔
۴۔ ایک ایسے دودکش کی بلندی دریافت کرو جبکہ اس کی
جڑ کی سیدھ میں ۱۰ فٹ ایک خط افقی پر جانے سے اس کی چوٹی
کا زاویہ ارتقاع ۳۰° سے ۵۴° ہو جائے۔

۵۔ ایک پہاڑ سطح سمندر سے ۲۰۰ فٹ اونچا ہے، اس کی
چوٹی سے کسی شخص نے دو جہازوں کے انخفضی زاوے بالترتیب ۵۴°
اور ۳۰° مشاہدہ کئے اگر جہازوں کو ملاسنے والا خط پہاڑ کے پائین میں سے
گذرے تو جہازوں کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

۶۔ ایک چٹان کی چوٹی سے کسی شخص نے سمندر میں دو لنگروں
کے انخفضی زاوے ۳۹° اور ۳۶° مشاہدہ کئے۔ اگر لنگروں کا
درمیانی فاصلہ ۳۰۰ گز ہو اور ان کو ملاسنے والا خط چٹان کی جڑ
میں سے گزرے تو چٹان کی بلندی اور سب سے نزدیک لنگر کا فاصلہ

چٹان کے پائین سے دریافت کرو۔ معلوم ہے۔

$$۱۵۲۳۴۹ = ۳۹ \text{ مم اور } ۲۱.۵۰۳ = ۲۶ \text{ مم}$$

۷۔ ایک درخت کے اوپر کا حصہ آندھی سے ٹوٹ کر سطح زمین سے

زاویہ ۳۰° بناتا ہے اور جڑ سے فاصلہ اُس نقطے کا جہاں درخت کی چوٹی زمین سے مس کرتی ہے۔ ۵ فٹ ہے درخت کی بلندی دریافت کرو۔

۸۔ دو برجوں کے درمیان اُنقی فاصلہ ۶۰ فٹ ہے اور دوسرے بُرج کی چوٹی سے جو ۱۵۰ فٹ بلند ہے پہلے بُرج کی چوٹی کا زاویہ انخفاض ۳۰° مشاہدہ کیا گیا ہے پہلے بُرج کی بلندی دریافت کرو۔

۹۔ ایک نامکمل برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع (۵۳°) ایک ایسے مقام سے مشاہدہ کیا گیا ہے جو پائین بُرج سے ۱۳۰ فٹ کے فاصلے پر ہے معلوم کرو کہ مینار اور کتنا اونچا کیا جائے کہ اس کا زاویہ ارتفاع اُسی مقام سے ۶۰° ہو۔

۱۰۔ ایک ٹرک ۱۰۰ فٹ چوڑی ہے اور اس کے دونوں طرف دوستوں میں جن کی اونچائی ایک ہی ہے، ستونوں کے درمیان ٹرک کے کسی نقطہ سے ان کی چوٹیوں کے ارتفاع ۶۰° اور ۳۰° مشاہدہ کئے گئے ہیں۔ ستونوں کی بلندی اور نقطہ کا مقام دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک بُرج کے داس کا زاویہ ارتفاع ایک مقام سے ۶۰° دیکھا گیا۔ اُس سے ۴۰ فٹ اونچے مقام پر ارتفاع ۵۳° تھا، بُرج کی بلندی اور مشاہدہ کرنے والے مقامات سے اسکا اُنقی فاصلہ دریافت کرو۔

۱۲۔ دامن کوہ میں کسی مقام سے ایک پہاڑ کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۵۳°

دکھائی دیا، جب ایک سطح مائل پر جو افق سے ۳۰° کا زاویہ بناتی تھی ایک میل اوپر چڑھے تو وہی زاویہ ارتفاع ۶۰° تھا۔ پہاڑ کی بلندی دریافت کرو۔
۱۳۔ اگر ایک لکڑی کا سایہ اُس کی بلندی کا $\frac{1}{2}$ گنا ہو تو سورج کا زاویہ ارتفاع دریافت کرو۔

۱۴۔ سطح ہموار پر ایک برج ہے۔ جب سورج کا ارتفاع ۳۰° ہو تو برج کے سایہ کا طول بہ نسبت اُس صورت کے جبکہ ارتفاع ۵۳° ہو ۶۰ فٹ زیادہ ہوتا ہے ثابت کرو کہ برج کی بلندی $۳۰ (1 + \frac{1}{2})$ فٹ ہے۔

۱۵۔ تین مقامات A ، B ، C سمندر کے سیدھے کنارے پر اس طرح واقع ہیں کہ A ، B ، C = ۲ میل، ایک جہاز کنارے کی عمودی سمت میں مقام B کی طرف آ رہا ہے اور راستہ کے کسی مقام پر طول A ، C کے محاذی جہاز پر زاویہ ۶۰° بنتا ہے اس کے بعد جہاز دس منٹ کے لئے اُس سمت میں اُسی رفتار سے جاتا ہے اور پھر A ، C کے محاذی زاویہ ۳۰° بنتا ہے۔ معلوم کرو کہ جہاز کس رفتار سے جا رہا ہے۔

۱۶۔ دو علم سطح ہموار پر قائم ہیں، علموں کے درمیان اور ان کے طائے والے خط پر A اور B دو نقطے ہیں اگر A سے علموں کے ارتفاعی زاوئے دیکھے جائیں تو وہ ۳۰° اور ۶۰° ہیں اور اگر B سے دیکھے جائیں تو ۶۰° اور ۵۳° ہیں اگر B کا طول ۳ فٹ ہو تو علموں کی بلندیاں اور ان کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

۱۷۔ فرض کرو کہ سطح افقی پر ایک مینار ہے، اس کا سر اوپر پائے دو مقامات A اور B اُس سطح میں لئے گئے ہیں، A ، B = ۲ فٹ

اور زاویہ پ ا ب = ۹۰ نیز یہ معلوم ہے کہ ہم میں ا ب پ = $\frac{1}{2}$ اور

ہم میں ب پ = $\frac{1}{2}$ مینار کی بلندی دریافت کرو۔

۱۸۔ سطح ہموار پر ایک مربع برج ہے، سطح کے کسی مقام سے برج کے سر کے تین کونے دکھائی دیتے ہیں اور وہاں کھڑے ہو کر کونوں کے تین ارتفاعی زاویے ۴۵°، ۶۰°، ۵۴° مشاہدہ کئے گئے ہیں ثابت کرو کہ برج کے ارتفاع کو ہر ایک ضلع کے طول سے وہی نسبت ہے جو $\frac{1}{2} : (1 + \frac{1}{2})$ کو ۴۵° سے ہے۔

۱۹۔ ایک روشنی کے مینار کا بیچ شمال کی طرف ہے اور اس سے روشنی کی شعاعیں قطار دائرہ کی شکل میں اسماں شمال مشرق اور شمال مغرب کے درمیانی حصہ میں قسع ہوتی ہیں۔ ایک جہاز مغرب کی طرف جا رہا تھا اُس پر ایک مسافر کو روشنی کی شعاعیں سب سے اول اُس وقت دکھائی دیں جبکہ جہاز روشنی گھر سے ۵ میل کے فاصلے پر تھا اور وہ شعاعیں ۳۵° ۳۰ منٹ تک دکھائی دیتی رہی جہاز کی رفتار دریافت کرو۔

۲۰۔ ایک دریا کے کنارے متوازی اور مستقیم ہیں ایک شخص نے ایک کنارے لامب کے کسی مقام لا پر کھڑے ہو کر دیکھا کہ مقام لا اور مقابل کے کنارے پر کے مقام مے کو ملانے والا خط مستقیم لامب سے زاویہ ۳۰° بناتا ہے اس کے بعد وہ دریا کے کنارے ۲۰۰ گز مقام ہا تک چلا اور اس نے دیکھا کہ زاویہ مے سے لامب = ۶۰° دریا کا عرض دریافت کرو۔

۲۱۔ ایک شخص شمال کی طرف جا رہا تھا اُس نے اپنے ٹھیک مشرق کی طرف ایک غبارہ کو شمال مغرب کی طرف جاتے دیکھا غبارہ کا ارتفاع ۳۰° تھا جب وہ ۵۰ گز آگے چلا تو غبارہ عین اُس کی سمت راس میں تھا اگر غبارہ کا ارتفاع اس اثنا میں یکساں رہا ہو تو اُس کی بلندی دریافت کرو۔

باب چہارم

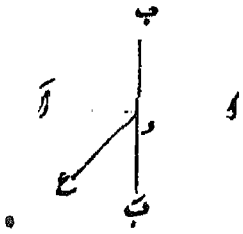
علم مثلث میں علامات جبریہ کا استعمال

۵۱۔ مثبت اور منفی زاوے۔ دفعہ ۸ میں جب ہم نے ایسے زاویوں کا ذکر کیا جن کی مقدار پر کم از قاصر ہونے کی قید نہ تھی تو ہم نے یہ فرض کر لیا تھا کہ خط دائرہ ہمیشہ گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں چکر لگاتا ہے جبکہ گھڑی کا منحنی اوپر کی طرف ہو، اس سمت کو ہم مقابل سمت ساعت کہیں گے اور آئندہ جب کوئی خط دائرہ اس سمت میں حرکت کرے گا تو ہم اس کو یوں بیان کریں گے کہ یہ مثبت سمت میں چکر لگاتا ہے یا مثبت زاویہ مرتسم کرتا ہے۔

جب خط دائرہ سمت مذکورہ بالا کے مخالف یعنی گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں حرکت کرے تو اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ منفی سمت میں چکر لگاتا ہے اور منفی زاویہ مرتسم کرتا ہے۔ اس منفی سمت کو موافق سمت ساعت بھی کہتے ہیں۔

۵۲۔ فرض کرو کہ خط دائرہ مقام ۱ سے شروع ہو کر چکر لگاتا ہوا مقام ۲ پر پہنچتا ہے جو ۱ اور ۲ کے

درمیان واقع ہے اور زاویہ $\angle AOB$ کی تنصیف کرتا ہے اب اگر یہ مثبت سمت میں گھوم کر اس مقام پر پہنچا ہو تو اس نے ایک مثبت زاویہ $+225^\circ$ قسم کیا ہے لیکن اگر اس کی گردش کی سمت منفی



تھی تو اس نے ایک منفی زاویہ -135° اپنی حرکت سے پیدا کیا ہے۔ فرض کرو کہ ہمیں صرف یہی معلوم ہے کہ خط دائرہ مقام مذکورہ پر ہے۔ اب ممکن ہے کہ اس نے ایک، دو، تین، پورے چکر لگانے کے بعد ایک مثبت زاویہ $+225^\circ$ قسم کیا ہو یا ایک، دو، تین، پورے چکر منفی سمت میں لگانے کے بعد ایک منفی زاویہ -135° اپنی گردش سے پیدا کیا ہو۔

صورت اول میں یہ زاویہ مرتبہ 225° ہو گا یا $360^\circ + 225^\circ$ ،
یا $720^\circ + 225^\circ$ یا $1080^\circ + 225^\circ$ ،
یعنی 225° یا 825° یا 1425° یا 2025° ،
صورت دوم میں زاویہ مرتبہ -135° ہو گا یا $-360^\circ - 135^\circ$ ،
یا $-720^\circ - 135^\circ$ یا $-1080^\circ - 135^\circ$ ،
یعنی -135° یا -945° یا -1755° یا -2115° ۔

۵۔ مثبت اور منفی خطوط۔ اس سے پیشتر کہ ہم زاویہ قائمہ سے بڑے زاویوں کی مثلثی نسبتوں کی تعریفیں لکھیں یہ بیان کرنا ضروری ہو گا کہ مختلف سمتوں میں ناپے ہوئے خطوط کی عددی قیمتوں کے

اور اس بیان کا طریق کتابت یہ ہے۔

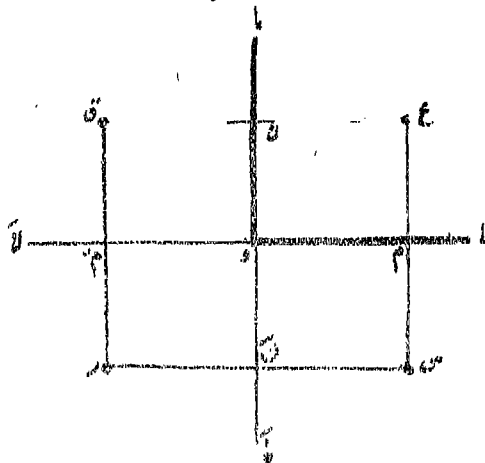
$$ا ب + ج د = ۱۲ + (-۱۲) = ۰$$

۵۵۔ جب ایک خط دائر و ع مقام ولا سے شروع ہو کر اپنی گردش سے مختلف زاوے پیدا کرے تو ان زاویوں کی نشانی مثبتوں کی تعریفات میں قوانین ذیل کا خیال رکھنا چاہئے۔

جو خطوط ولا پر یا اس کے متوازی ٹاپے جائیں ان کو ہمیشہ مثبت خیال کرنا چاہئے اگر وہ سمت ولا میں کھینچے جائیں۔ اور منفی اگر سمت مخالف ولا میں کھینچے جائیں۔

اب فرض کر دو کہ ولا کو و ما زاویہ قائمہ پر قطع کرتا ہے تو وہ سب خطوط جو ولا پر عمود ہوں مثبت کہلائیں گے اگر وہ سمت و ما میں کھینچے گئے ہوں اور منفی اگر وہ سمت مخالف و ما میں کھینچے گئے ہوں۔

شکل کھینچنے میں یاد رہے کہ ولا کا منحنی دائیں طرف متوازی الافق ہے اور و ما سمت راس میں اوپر کی طرف ہے۔



لفظ $\angle$ سے زاویہ پر عمود $\angle$ م نکالو۔
 اوپر کی شکل میں چکر لگانے والے خط کے چار مقامات دکھائے گئے ہیں،
 ہر ایک راجعہ میں ایک مقام ہے اور امتیاز کی خاطر اعداد مؤخرہ ۱، ۲، ۳، ۴،
 حرف $\angle$ سے منسلک کر دیے گئے ہیں۔
 پس جب زاویوں کی مقدار پر کم از قائمہ ہونے کی قید نہ ہو
 تو مثلثی نسبتوں کی تعریفات کسی مقدار کے زاویوں کے لئے مفصلانہ
 ہوں گی اور یاد رہے کہ زاویہ حادہ کی صورت میں جو تعریفات
 ہم نے مثلثی نسبتوں کی دفعہ ۲۵ میں دی ہیں وہ بالکل وہی ہیں
 جو ہم اب لکھتے ہیں۔

$\angle$	کو زاویہ	زاویہ	کی جیب	کہتے ہیں
$\angle$	"	"	"	جیب التمام
$\angle$	"	"	"	کامماس
$\angle$	"	"	"	مماس التمام
$\angle$	"	"	"	قاطع
$\angle$	"	"	"	قاطع التمام

تقدیر ۱۔ جم زاویہ اور ۱۔ جب زاویہ کو زاویہ زاویہ کا بائیں
 سہم (یا جیب سکوس) اور سہم التمام کہتے ہیں۔

۵۷۔ بیض اُس عمل سے جو دائرہ ۲۹ میں ہوا ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ زاویہ روع (= ط) کی تمام قیمتوں کے لئے

$$\text{جیب ط} + \text{جہم ط} = ۱$$

$$\frac{\text{جیب ط}}{\text{جہم ط}} = \frac{\text{سس ط}}{\text{سس ط}}$$

$$\frac{\text{جیب ط}}{\text{جہم ط}} = ۱ + \frac{\text{سس ط}}{\text{سس ط}}$$

$$\frac{\text{جیب ط}}{\text{جہم ط}} = ۱ + \frac{\text{سس ط}}{\text{سس ط}}$$

اور

۵۸۔ مثلثی نسبتوں کی علامتیں

ربع اول۔ فرض کرو کہ خط دائرہ ربع اول میں ہے جیسے

وع، چکر لگانے والے خط کو ہمیشہ مثبت خیال کرو۔

اس صورت میں وم اور م، روع و دونوں مثبت ہیں جس کے معلوم ہوا کہ مثلثی نسبتیں سب مثبت ہیں۔

ربع دوم۔ فرض کرو کہ خط دائرہ ربع دوم میں ہے اس صورت میں م، روع مثبت ہے اور وم منفی۔

چونکہ جیب زاویہ و مثبت مقادیر کی باہمی نسبت کے برابر ہے اس لئے وہ مثبت ہے، چونکہ جیب تمام ایک ایسی نسبت کے برابر ہے جس کا شمار کنندہ منفی ہے اور نسب نما مثبت

اس لئے وہ منفی ہے۔

ماس زاویہ ایک ایسی نسبت کے برابر ہے جس کا شمار کنندہ

مثبت ہے اور نسبت نامنفی اس لئے وہ منفی ہے۔

ماس التمام منفی ہے

قاطع التمام مثبت ہے

قاطع زاویہ منفی ہے

ربع سوم۔ فرض کرو کہ خطا دار ربع سوم میں ہے جیسے 'وع'

اس صورت میں مہ پر علامہ اور و مہ دونوں منفی ہیں۔

جیب زاویہ منفی ہے

جیب التمام منفی ہے

ماس زاویہ مثبت ہے

ماس التمام مثبت ہے

قاطع التمام منفی ہے

قاطع زاویہ منفی ہے

ربع چہارم۔ فرض کرو کہ چکر لگانے والا خط و مہ ربع چہارم

منفی ہوگا اور و مہ مثبت ہے اس لئے

جیب زاویہ منفی ہے

جیب التمام مثبت ہے

ماس زاویہ منفی ہے

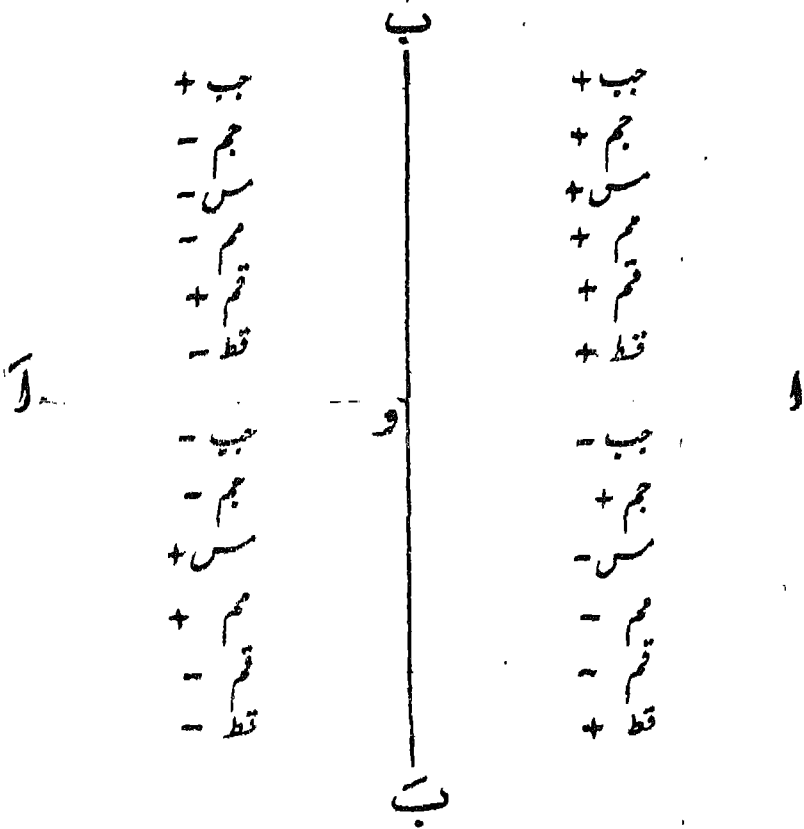
ماس التمام منفی ہے

قاطع التمام منفی ہے

قاطع زاویہ مثبت ہے

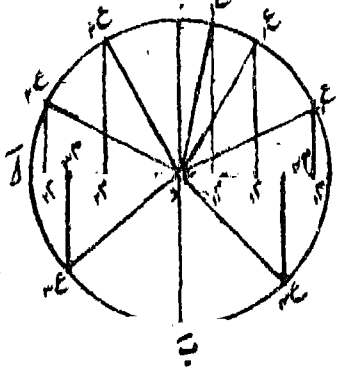
جدول ذیل میں مثلثی نسبتوں کی علامات اُن تمام صورتوں میں

مندرج ہیں جب خط دائر کسی ایک راج میں واقع ہو اور کسی زاویہ مجوزہ کا ایک طرف سے احاطہ کرے۔



۵۹۔ جب زاویہ : سے ۳۰° تک بڑھے تو اس کی ہر ایک مثلثی نسبت کی مقدار اور علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو۔ فرض کرو کہ حکم لگانے والے خط وعر کا مستقل طول ۱ ہے، جب یہ ۱ پر منطبق ہوتا ہے تو طول و م برابر ۱ کے ہوتا ہے

اور جب یہ وب پر منطبق ہوتا ہے تو نقطہ م نقطہ و پر منطبق ہوتا ہے اور وم صفر ہوتا ہے، نیز جب خط دائرہ واسے وب تک حرکت کرتا ہے تو طول وم کی قیمت اسے صفر تک گھٹتی ہے جب خط دائرہ دوسرے ربع میں



وب سے وائیک حرکت کرتا ہے تو طول وم منقی ہوتا ہے اور تعداداً صفر سے لائیک بڑھتا ہے (یعنی از روئے الجبرا صفر سے لائیک گھٹتا ہے)

تیسرے ربع میں طول وم از روئے الجبرا۔ اسے صفر تک بڑھتا ہے اور چوتھے ربع میں طول وم صفر سے لائیک بڑھتا ہے۔ ربع اول میں طول م، ع صفر سے لائیک بڑھتا ہے، م، ع م ربع دوم میں اسے صفر تک گھٹتا ہے، ربع سوم میں م، ع م از روئے الجبرا صفر سے لائیک گھٹتا ہے اور ربع چہارم میں م، ع م از روئے الجبرا۔ اسے صفر تک بڑھتا ہے۔

۶۰۔ جمیب۔ ربع اول میں جب زاویہ ۰ سے ۹۰ تک

بڑھتا ہے تو اس کی جمیب $\left(\frac{م}{و}\right)$ متواتر $\frac{و}{و}$ سے $\frac{م}{و}$ تک یعنی صفر سے لائیک بڑھتی ہے۔

دوسرے ربع میں جب زاویہ ۹۰ سے ۱۸۰ تک بڑھتا ہے تو اس کی جمیب $\frac{و}{و}$ سے لائیک یعنی اسے صفر تک گھٹتی ہے۔

ربع سوم میں جب زاویہ ۱۸۰° سے ۲۷۰° تک بڑھتا ہے تو اس کی جیب $\frac{1}{2}$ سے $\frac{1}{2}$ تک یعنی صفر سے ۱ تک گھٹتی ہے۔
 ربع چہارم میں جب زاویہ ۲۷۰° سے ۳۶۰° تک بڑھتا ہے تو اس کی جیب $\frac{1}{2}$ سے $\frac{1}{2}$ تک یعنی ۱ سے صفر تک گھٹتی ہے۔

۶۱۔ جیب النہام۔ ربع اول میں جیب النہام $\frac{1}{2}$ کے برابر ہے اور $\frac{1}{2}$ سے $\frac{1}{2}$ یعنی ۱ سے صفر تک گھٹتی ہے۔

ربع دوم میں یہ $\frac{1}{2}$ سے $\frac{1}{2}$ یعنی صفر سے ۱ تک گھٹتی ہے۔
 ربع سوم میں یہ $\frac{1}{2}$ سے $\frac{1}{2}$ تک یعنی ۱ سے صفر تک بڑھتی ہے۔
 ربع چہارم میں یہ $\frac{1}{2}$ سے $\frac{1}{2}$ تک یعنی صفر سے ۱ تک بڑھتی ہے۔

۶۲۔ مہاس ربع اول میں مہاس متواتر صفر سے ۱ تک بڑھتا ہے اور دوم متواتر ۱ سے صفر تک گھٹتا ہے پس نسبت مہاس متواتر بڑھتی ہے (کیونکہ اس کا شمار کنندہ متواتر بڑھتا ہے اور مہاس متواتر گھٹتا ہے)۔

جب $\frac{1}{2}$ پر وقع منطبق ہوتا ہے تو مہاس صفر ہوتا ہے اور جب خط دائر ایک ایسے زاویے میں گھوم چکتا ہے جو قائمہ سے ذرا کم ہو یعنی جب $\frac{1}{2}$ تقریباً $\frac{1}{2}$ پر منطبق ہوتا ہے تو اس وقت مہاس تقریباً ۱ کے برابر ہوتا ہے اور طول وسم نہایت چھوٹا ہوتا ہے، اس وقت نسبت مہاس کی قیمت نہایت زیادہ

ہوتی ہے اور وقوع جتنا قریب وب کے آتا جاتا ہے اتنا ہی اس نسبت کی مقدار بڑھتی جاتی ہے، اس سے معلوم ہوا کہ خط دائر کو وب کے کافی قریب لانے سے ہم ماس زاویہ کو جتنا چاہیں بڑا بنا سکتے ہیں، اس کو اس طرح بھی بیان کرتے ہیں کہ جب زاویہ ۹۰ ہوتا ہے تو اس کا ماس غیر متناہی ہوتا ہے۔

مقدار غیر متناہی کو تعبیر کرنے کے لئے ∞ استعمال کرتے ہیں۔ پس ربع اول میں ماس صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے۔

دوسرے ربع میں جب خط دائر ایک ایسا زاویہ منقسم کرتا ہے جو قائمہ سے ذرا زیادہ ہو تو اس وقت مربع تقریباً اُس کے برابر ہوتا ہے اور دوم منفی اور نہایت چھوٹا ہوتا ہے یعنی اُس وقت ماس زاویہ ایک منفی، غیر متناہی مقدار کے برابر ہوتا ہے۔

نیز جب خط دائر وب سے ول تک حرکت کرتا ہے تو مربع مقدار میں اسے صفر تک گھٹتا ہے اور دوم منفی ہوتا ہے اور صفر سے۔ ول تک گھٹتا ہے پس جب چکر لگانے والا خط ول پر منطبق ہوتا ہے تو ماس زاویہ صفر کے برابر ہوتا ہے۔

لہذا ثابت ہوا کہ ربع دوم میں ماس - ∞ سے صفر تک بڑھتا ہے۔

تیسرے ربع میں مربع اور دوم دونوں منفی ہوتے ہیں اس لئے ان کی نسبت مثبت ہوتی ہے، نیز جب خط دائر وب پر منطبق ہوتا ہے تو ماس غیر متناہی ہوتا ہے۔ اس لئے ثابت ہوا کہ ربع سوم میں ماس صفر سے ∞ تک بڑھتا ہے۔

چوتھے ربع میں $م$ $ع$ $م$ منفی ہوتا ہے اور $و$ $م$ مثبت اور $ا$ $ن$ کی نسبت منفی ہوتی ہے، نیز جب خط دائر مقام $و$ $ب$ پر سے ہو کر گذرتا ہے تو $ماس$ زاویہ کی قیمت $+$ ∞ سے $-$ ∞ تک بدلتی ہے (جیسا اوپر دیکھے مقام $و$ $ب$ پر دیکھا) پس معلوم ہوا کہ ربع چہارم میں $ماس$ $-$ ∞ سے صفر تک بڑھتا ہے۔

۴۳۔ $ماس$ التمام۔ جب خط دائر $و$ $ا$ پر منطبق ہوتا ہے تو اُس وقت $م$ $ع$ نہایت چھوٹا اور $و$ $م$ تقریباً $ا$ کے برابر ہوتا ہے پس $ماس$ التمام (یعنی نسبت $\frac{و}{م$) ابتدا میں ہی غیر متناہی ہوتا ہے اور جب خط دائر $و$ $ا$ سے $و$ $ب$ تک گردش کرتا ہے تو $م$ $ع$ مقدار

میں صفر سے $ا$ تک بڑھتا ہے اور $و$ $م$ کی قیمت $ا$ سے صفر تک گھٹتی ہے، لہذا ربع اول میں $ماس$ التمام ∞ سے صفر تک گھٹتا ہے دوسرے ربع میں $م$ $ع$ مثبت ہوتا ہے اور $و$ $م$ منفی، پس معلوم ہوا کہ $ماس$ التمام صفر سے $ا$ تک یعنی صفر سے $-$ ∞ تک گھٹتا ہے۔

تیسرے ربع میں $ماس$ التمام مثبت ہوتا ہے اور ∞ سے صفر تک گھٹتا ہے (کیونکہ جب خط دائر مقام $و$ $ا$ پر سے ہو کر گذرتا ہے تو $ماس$ التمام کی قیمت $-$ ∞ سے $+$ ∞ تک بدلتی ہے) ربع چہارم میں $ماس$ التمام منفی ہوتا ہے اور صفر سے $-$ ∞ تک گھٹتا ہے۔

۴۴۔ قاطع۔ جب خط دائر $و$ $ا$ پر منطبق ہوتا ہے تو اُس وقت

وم کی قیمت ۱ ہوتی ہے اس لئے قاطع زاویہ کی قیمت بھی ایک ہوتی ہے۔

جب خط دائرہ ۱ سے ۱۰ تک گردش کرتا ہے تو ۱۰ مقدار میں ۱ سے صفر تک گھٹتا ہے اور جب چکر لگانے والا خط ۱۰ پر منطبق ہوتا ہے تو قاطع زاویہ کی قیمت ۱ یعنی ۱۰ ہوتی ہے پس معلوم ہوا کہ ربع اول میں قاطع زاویہ ۱ سے ۱۰ تک بڑھتا ہے

ربع دوم میں ۱۰ منفی ہوتا ہے اور مقدار میں صفر سے ۱۰ تک گھٹتا ہے اس لئے اس ربع میں قاطع زاویہ ۱۰ سے ۱۰ تک بڑھتا ہے (کیونکہ جب خط دائرہ مقام ۱۰ پر سے ہو کر گزرتا ہے تو مقدار ۱۰ کی علامت بدل جاتی ہے اور اس لئے قاطع زاویہ کی قیمت میں تغیر ۱۰ سے ۱۰ تک ہوتا ہے) ربع سوم میں ۱۰ ہمیشہ منفی ہوتا ہے اور ۱۰ سے صفر تک بڑھتا ہے اس لئے قاطع ۱۰ سے ۱۰ تک گھٹتا ہے۔

ربع چہارم میں ۱۰ ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اور صفر سے ۱۰ تک بڑھتا ہے اس لئے اس ربع میں قاطع الزاویہ ۱۰ سے ۱۰ تک گھٹتا ہے۔

۶۵۔ قاطع التمام۔ اس کے تغیرات کی تحقیق بھی اسی طرح ہو سکتی ہے جیسے قاطع الزاویہ کے تغیرات کی ہوئی۔

ربع اول میں قاطع التمام ۱۰ سے ۱۰ تک گھٹتا ہے
ربع دوم میں ۱۰ سے ۱۰ تک بڑھتا ہے
ربع سوم میں ۱۰ سے ۱۰ تک بڑھتا ہے

ربع چہارم میں یہ - ۱ سے - ∞ تک گھٹتا ہے
۶۶ - اوپر کے سب نتائج جدول ذیل میں جمع کئے گئے ہیں۔

ربع اول میں	ب	ربع دوم میں
جیب . ۱ سے ۱ تک بڑھتی ہے	جیب . ۱ سے ۱ تک گھٹتی ہے	
جیب التمام . ۱ سے ۱ تک گھٹتی ہے	جیب التمام . ۱ سے ۱ تک گھٹتی ہے	
ماس . ∞ سے ∞ تک بڑھتا ہے	ماس . ∞ سے ∞ تک بڑھتا ہے	
ماس التمام . ∞ سے ∞ تک گھٹتا ہے	ماس التمام . ∞ سے ∞ تک گھٹتا ہے	
قاطع . ۱ سے ∞ تک بڑھتا ہے	قاطع . ∞ سے ۱ تک بڑھتا ہے	
قاطع التمام . ∞ سے ۱ تک گھٹتا ہے	قاطع التمام . ۱ سے ∞ تک گھٹتا ہے	

ربع چہارم	ب	ربع سوم
جیب . ۱ سے ۱ تک بڑھتی ہے	جیب . ۱ سے ۱ تک گھٹتی ہے	
جیب التمام . ۱ سے ۱ تک بڑھتی ہے	جیب التمام . ۱ سے ۱ تک بڑھتی ہے	
ماس . ∞ سے ∞ تک بڑھتا ہے	ماس . ∞ سے ∞ تک بڑھتا ہے	
ماس التمام . ∞ سے ∞ تک گھٹتا ہے	ماس التمام . ∞ سے ∞ تک گھٹتا ہے	
قاطع . ∞ سے ۱ تک گھٹتا ہے	قاطع . ۱ سے ∞ تک گھٹتا ہے	
قاطع التمام . ۱ سے ∞ تک گھٹتا ہے	قاطع التمام . ∞ سے ۱ تک بڑھتا ہے	

۶۷ - مثلثی جملوں کے ادوار

جب کوئی زاویہ صفر سے ۳۳° تک بڑھتا ہے یعنی جب خط دائرہ ایک پورا چکر لگاتا ہے تو زاویہ کی جیب پہلے صفر سے ۱ تک

بڑھتی ہے پھر اسے ۱۔ تک گھٹی ہے اور اخیر میں ۱۔ سے صفر تک بڑھتی ہے اور اس طرح سے پیشتر اس کے کہ جیب اپنی اصلی قیمت پھر اختیار کرے اس کے سب تغیرات ظہور میں آتے ہیں۔

اسی طرح سے جب زاویہ π سے $\pi/2$ تک بڑھتا ہے تو جیب کی قیمت میں وہی تغیرات ظہور پذیر ہوتے ہیں۔

نیز جب دو زاویوں کا تفاوت π قائموں کے برابر ہوتا ہے تو ان کی جیبیں باہم مساوی ہوتی ہیں، اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ جیب کا دور π ہے

اسی طرح سے جب کوئی زاویہ بقدر π کے بڑھتا ہے تو اس کی جیب، قاطع اور قاطع التمام کی قیمتوں کے سب تغیرات ایک دفعہ ضرور تکرار پاتے ہیں۔

لیکن ماس زاویہ کی صورت میں جب زاویہ صفر سے π تک بڑھتا ہے یعنی جب خط دائرہ دو قائموں میں حرکت کرتا ہے تو اس کے سب تغیرات ایک مرتبہ وقوع میں آتے ہیں اور ماس التمام کی بھی یہی کیفیت ہے۔

پس معلوم ہوا کہ جیب، جیب التمام، قاطع اور قاطع التمام کا دور π ہے اور ماس اور ماس التمام کا صرف $\pi/2$ ہے جب کوئی زاویہ بڑھتا ہے تو اس کے متلشی جملوں کی قیمتیں بار بار تکرار پاتی ہیں اس لئے ان کو جملات دوریہ یا جملات مدورہ کہتے ہیں۔

۴۸۔ متلشی نسبتوں کے تغیرات بذریعہ اشکال اور خطوط

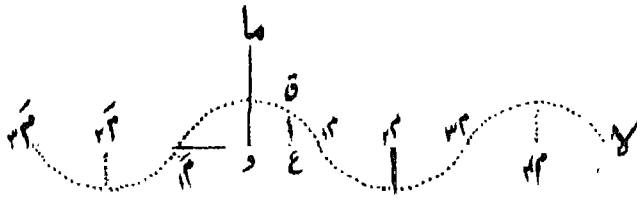
وم کو اس طرح منتخب کرو کہ طول کی ایک اکائی ایک زاویہ
 نیمقطری کو تعبیر کرے، اب چونکہ وم سے دو قائلے یعنی π
 نیمقطری زاوئے تعبیر ہوتے ہیں اس لئے طول وم سے طول
 کی π اکائیاں یعنی تقریباً $\frac{1}{2}\pi$ اکائیاں تعبیر ہوں گی۔
 اسی طریقے سے منفی زاوئے و کی منفی جانب میں طولوں وم وم سے
 تعبیر ہوں گے۔

ہر ایک نقطہ (ع) پر کا عمود ق اُس زاوئے کی جیب کے
 تناسب بناؤ جو و ع سے تعبیر ہوتا ہے اگر جیب مثبت ہو تو
 یہ عمود مثبت سمت میں و ما کے متوازی ہوگا اور اگر جیب منفی
 ہو تو یہ منفی سمت میں ہوگا۔

مثلاً چونکہ وم ایک قائمہ کو تعبیر کرتا ہے جس کی جیب ۱ ہے اس لئے
 ہم عمود م جہ کو طول کی ایک اکائی کے برابر لیں گے، چونکہ وم
 سے دو قائلے تعبیر ہوتے ہیں اور ان کی جیب صفر ہے اس لئے
 اس نقطہ پر عمود کا طول صفر ہوگا، چونکہ وم تین قائموں کی
 مقدار کے تناسب ہے اور ان کی جیب ۱ ہے اس لئے م پر
 سے عمود کا طول ۱ ہوگا یعنی م جہ خط ولا کے نیچے کی طرف
 کھینچا جائے گا اور اس کا طول ایک ہوگا، اگر و ع وم کی
 ایک تہائی کے برابر ہو تو یہ $\frac{1}{3}\pi$ قائمہ یعنی 30° کو تعبیر کرے گا اور
 اس کی جیب $\frac{1}{2}$ ہوگی پس اس صورت میں ہم نقطہ ع پر ایک عمود
 ع ق قائم کریں گے جس کا طول پچانوہ واحد کے طول کا نصف ہوگا
 ان سب خطوط کے سرے ایک خط منحنی پر واقع ہوں گے

جس کی شکل مندرجہ بالا منحنی کی سی ہوگی۔
پوری شکل کھینچنے سے معلوم ہوگا کہ خط منحنی کے وہاں π و $3\pi/2$ جیسے اور کئی حصے ہیں اور اس کا یہ مطلب ہے کہ جب کوئی زاویہ بقدر $\pi/2$ کے بڑھتا ہے تو اس کی جیب کی وہی قیمتیں تکرار پاتی ہیں۔

۶۹۔ جیب التمام کی ترسیم



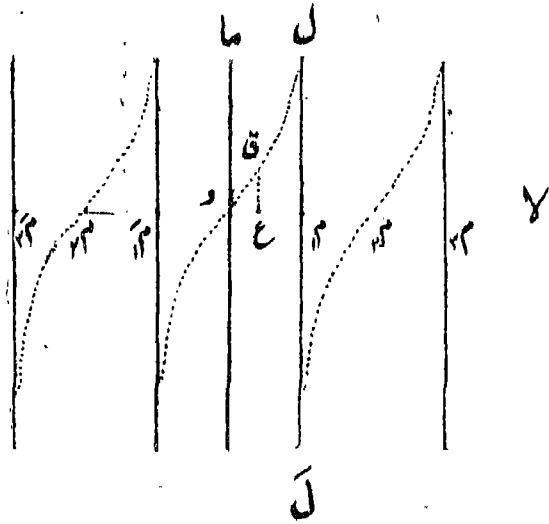
جیب التمام کی ترسیم بھی اسی طرح سے حاصل ہوتی ہے جیسی جیب کی، صرف فرق یہ ہے کہ جیب التمام کی صورت میں عمود $\pi/2$ سے اس زاویہ کی جیب التمام تعبیر ہوتی ہے جو طول و عرض سے تعبیر ہوتا ہے۔

اگر شکل دفعہ ۶۸ میں نقطہ و حرکت کر کے π پر آجائے اور وہاں کا مقام $\pi/2$ سے بدل دیا جائے تو جیب التمام کا خط منحنی جیب کے بالکل متماثل ہوگا۔

۷۰۔ ماس کی ترسیم

چونکہ زاویہ قائمہ کا ماس غیر متناہی ہوتا ہے اور طول و عرض ایک قائمہ کو تعبیر کرتا ہے اس لئے جو عمود نقطہ π پر قائم ہوگا

اس کا طول غیر متناہی ہوگا اور ماس کا منحنی م ل کو غیر متناہی فاصلے پر ملے گا۔



اگر زاویہ ایک قائمے سے دراز یا وہ ہو تو اس کا ماس منحنی اور غیر متناہی ہوگا اسلئے خط ل م ل کے عین دائیں طرف ماس کا منحنی ایک ایسے مقام سے شروع ہوگا جو ولا کے نیچے بے انتہا فاصلے پر واقع ہو۔

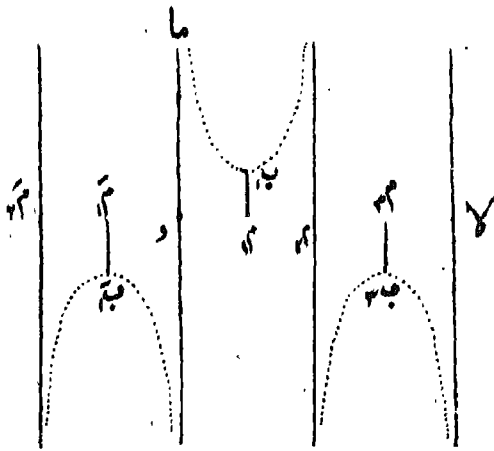
ماس کی ترسیم میں صریحاً بشمار متماثل اور متوازی حصے شامل ہیں اور ان میں سے ہر ایک حصہ باقی سب سے الگ ہے۔ اس قسم کے خط منحنی کو غیر مسلسل کہتے ہیں، برخلاف اس کے جیب اور جیب التام ہر دو کے منحنی مسلسل ہیں۔

۱۔ ماس التام کی ترسیم
اگر ماس التام کا خط منحنی کھینچا جائے تو وہ وصا کو و کے

اد پر غیر تنہا ہی فاصلے پر ملے گا، یہ خط نقطہ م میں سے گزرے گا اور نقطہ م پر جو عمود ہوگا اس کو ولا کی منفی جانب میں غیر تنہا ہی فاصلے پر مس کرے گا، اس کے بعد م کے عین دائیں طرف یہ خط نقطہ م کے اوپر ایک غیر تنہا ہی فاصلے سے شروع ہوگا اور پہلے حصے کی طرح م میں سے گزرے گا اور م پر کے عمود کو ولا کے نیچے غیر تنہا ہی فاصلے پر مس کرے گا وغیرہ وغیرہ۔

تمام التمام کا منحنی غیر متسلل ہوگا اور اس کے بشمار حصے ایک دوسرے کے ساتھ ساتھ ترتیب دئے ہوئے ہوں گے۔

۷۷۔ قاطع التمام کی ترسیم



جب زاویہ صفر ہوتا ہے تو اس کی جیب صفر ہوتی ہے اور اس لئے اس کا قاطع التمام غیر تنہا ہی ہوتا ہے لہذا منحنی و ما کو غیر تنہا ہی فاصلے پر ملتا ہے۔

جب زاویہ ایک قائمہ کے برابر ہوتا ہے تو اس کا قاطع التمام ایک ہوتا ہے اور اس لئے عمود ماب کا طول ایک ہوتا ہے۔
 جب زاویہ دو قائموں کے برابر ہوتا ہے تو اس کا قاطع التمام غیر متساوی ہوتا ہے یعنی م پر جو عمود ہو اس کو خط منحنی غیر متساوی فاصلے پر ملتا ہے۔

نیز جب زاویہ دو قائموں سے ذرا کم ہوتا ہے تو اس کا قاطع التمام ∞ ہوتا ہے اور جب زاویہ دو قائموں سے ذرا زیادہ ہوتا ہے تو اس وقت قاطع التمام ∞ ہوتا ہے یعنی جب زاویہ کی قیمت ”دو قائمہ“ میں سے ہو کر گزرتی ہے تو دفعہ قاطع الزاویہ کی قیمت ∞ سے ∞ ہو جاتی ہے پس معلوم ہوا کہ م کے عین دائیں طرف خط منحنی والا کے پیچھے غیر متساوی فاصلے سے شروع ہوتا ہے

۳۳۔ قاطع الزاویہ کی ترسیم
 اگر قاطع الزاویہ کا منحنی اسی طرح مرتسم کیا جائے تو اس کی شکل بالکل وہی ہوگی جو قاطع التمام کے منحنی کی ہے صرف وصلاً کو حرکت دیکر م ب پر لے آنا چاہیے۔

مثلاً متفرقہ نمبری (۹)

۱۔ کسی مثلث کے ایک زاوے میں فرانسیسی درجوں کی تعداد اتنی ہے جتنی کہ دوسرے زاوے میں انگریزی درجوں کی تعداد ہے اور تیسرے زاوے میں اسے فرانسیسی ثنائے ہیں جتنے کہ باقی دو کے مجموعہ میں انگریزی

اُس شخص کے پاؤں کے نیچے ہے، تین منٹ کے بعد کشتی کا زاویہ انخفض
 ۹۰ ہو جاتا ہے، معلوم کرو کہ کتنی دیر میں کشتی کنارے پر آ لگے گی۔
 ۱۱۔ ثابت کرو کہ اگر لا حقیقی ہو تو مساوات جب $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ناممکن ہے۔

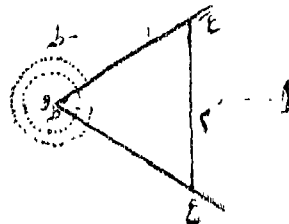
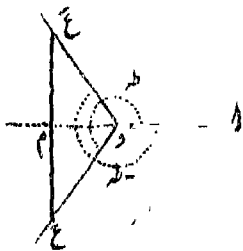
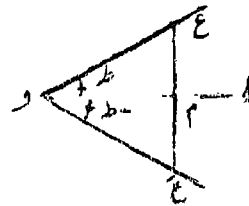
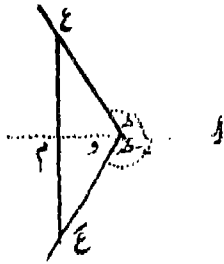
۱۲۔ ثابت کرو کہ مساوات $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ قططہ = $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ صریح
 اسی صورت میں ممکن ہے جبکہ $a = b$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

باب پنجم

کسی مقدار اور علامت کے زاویوں کی مثلثی نسبتیں

پہلی مرتبہ اس مضمون کا مطالعہ کرتے وقت طالب علم کو چاہئے کہ دفعتاً ۴، ۵، ۶، ۷ اور ۸ کی چار چار شکلوں میں سے صرف پہلی شکلوں پر ہی توجہ محدود رکھے (۴، ۵، ۶، ۷، ۸) ایک زاویہ (طہ) کی مثلثی نسبتیں طہ کی تمام قسموں کے لئے طہ کی رقوم میں دریافت کرو۔



فرض کرو کہ خط دائرہ مقام ول سے شروع ہو کر چکر لگاتا ہوا مقام وع پر پہنچتا ہے اور اس سطح سے زاویہ طہ مرقم کرتا ہے۔
ول یا ول ممدودہ پر عمود وع م نکالو اور اس کو ع تک اتنا خارج کرو کہ ع م اور م ع باہم برابر ہوں۔

مثلاً موع اور موع میں اضلاع وم اور موع اضلاع وم اور موع کے بالترتیب برابر ہیں اور ان کے درمیانی زاوے وموع اور وموع قائمے ہیں اس لئے (بحکم اقلیدس م اش م) زاوے موع اور موع برابر ہیں اور وع وع کے مساوی ہے۔ ان چاروں شکلوں میں زاویہ لوع کی مقدار (اگر زاوے کو گھڑی کی سوئیوں کی مقابل سمت میں ناپا جائے) زاویہ لوع کی مقدار کے برابر ہے (اگر اس زاوے کو گھڑی کی سوئیوں کی موافق سمت میں ناپا جائے) نیز موع اور موع مقدار میں مساوی اور علامت میں مختلف ہیں اس لئے

$$\text{ب (ط)} = \frac{\text{م ع}}{\text{م ع}} = \frac{\text{م ع}}{\text{وع}} = - \text{ جب ط}$$

$$\text{ج (ط)} = \frac{\text{وم}}{\text{وم}} = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = - \text{ جم ط}$$

$$\text{س (ط)} = \frac{\text{م ع}}{\text{وم}} = \frac{\text{م ع}}{\text{وم}} = - \text{ مس ط}$$

$$\text{م (ط)} = \frac{\text{وم}}{\text{وم}} = \frac{\text{وم}}{\text{وم}} = - \text{ مم ط}$$

$$\text{ق (ط)} = \frac{\text{وع}}{\text{م ع}} = \frac{\text{وع}}{\text{م ع}} = - \text{ قم ط}$$

$$\text{ق (ط)} = \frac{\text{وع}}{\text{وم}} = \frac{\text{وع}}{\text{وم}} = - \text{ ق ط ط}$$

اس دفعہ میں اور آگے کی دفعت میں شکل کا حوالہ دینے کے بغیر پہلی دو مثلثی نسبتوں کی مدد سے آخری چار مثلثی نسبتیں حاصل ہو سکتی ہیں۔

$$\text{مثلاً مس} (-ط) = \text{جب} (-ط) = \frac{\text{جم} (-ط)}{\text{جم} ط} = \text{مس} ط$$

$$\text{مم} (-ط) = \frac{\text{جم} (-ط)}{\text{جب} (-ط)} = \frac{\text{جم} ط}{\text{جب} ط} = \text{مم} ط$$

$$\text{قم} (-ط) = \frac{\text{جب} (-ط)}{\text{جب} ط} = \frac{\text{جب} ط}{\text{جب} ط} = \text{قم} ط$$

$$\text{اور قط} (-ط) = \frac{\text{جم} (-ط)}{\text{جم} ط} = \frac{\text{جم} ط}{\text{جم} ط} = \text{قط} ط$$

$$\text{مثال جب} (-۹۰) = \text{جب} ۹۰ = \frac{۱}{۱}$$

$$\text{مس} (-۹۰) = \text{مس} ۹۰ = \frac{۱}{۱}$$

$$\text{جم} (-۹۰) = \text{جم} ۹۰ = \frac{۱}{۱}$$

۷۵۔ طہ کی تمام قیمتوں کے لئے زاویہ (طہ - ۹۰) کی مثلث

نسبتوں کو طہ کی رقوم میں دریافت کرو۔

دفعہ ۴۴ میں جہاں زاویہ، قائمہ سے کم تھا ان ارتباطات پر ایک دفعہ بحث ہو چکی ہے فرض کرو کہ خط دائر مقام و اس سے

شروع ہو کر زاویہ اوج مرسم کرتا ہے جہاں اوج = طہ

زاویہ ۹۰۔ طہ حاصل کرنے کے لئے فرض کرو کہ خط دائر ابتدا

میں ج تا تک حرکت کرتا ہے اور اس کے بعد ب سے سمت

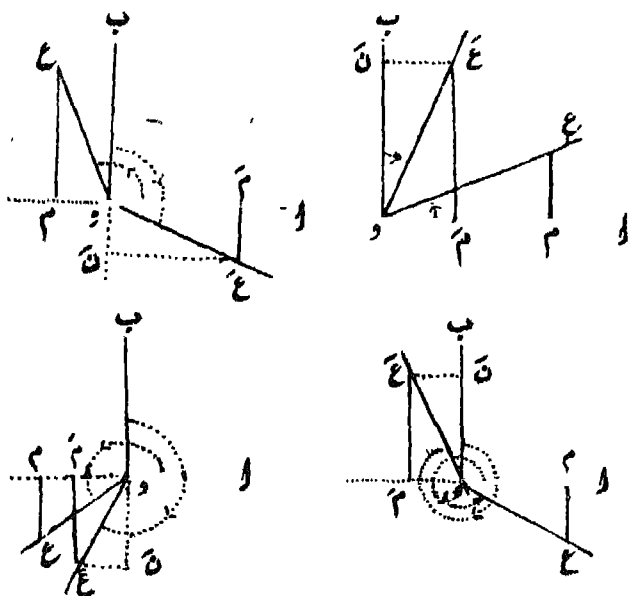
مخالف میں بقہ زاویہ طہ کے اُلٹا پھرتا ہے اور اُس وقت

اس کا مقام وع ہوتا ہے ۔

اووع زاد یہ مطلوبہ ۹۰ نہ ط ہے ۔

وع کو وع کے مساوی بناؤ اور عمود وع م اور ع م خط ابتدائی
و ا یا او ممدودہ پر نکالو نیز وب یا ب و ممدودہ پر عمود
ع ن کھینچو ۔

ہر ایک شکل میں ازروئے عمل زاوئے اووع اور ب ووع
تعداداً برابرہ ہیں ۔



زاویہ م ووع = ن ووع = و ووع
چونکہ ہر ایک شکل میں و ن اور م و متوازی ہیں
لہذا مثلث م ووع اور م و و ہر طرح سے مساوی ہیں
اور اس لئے و م = م و تعداداً
اور و م = م و تعداداً

نیز ہر ایک شکل میں وم اور مم ع متحد العلامت ہیں اور نیز مم ع اور وم کی علامت ایک ہی ہے۔

یعنی وم = مم ع + مم ع اور وم = مم ع + مم ع
اسلئے جب (ق۔ ط) = جب (اوع) = مم ع = مم ع = جم ط

جم (ق۔ ط) = جم (اوع) = مم ع = مم ع = جب ط

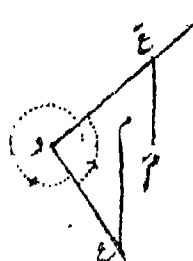
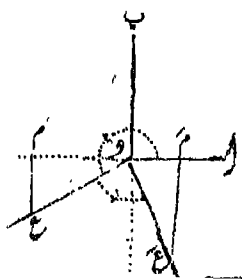
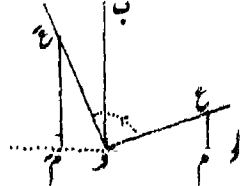
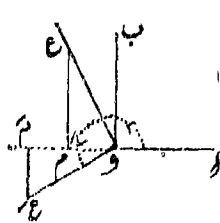
سس (ق۔ ط) = سس (اوع) = مم ع = مم ع = مم ط

مم (ق۔ ط) = مم (اوع) = مم ع = مم ع = سس ط

قط (ق۔ ط) = قط (اوع) = مم ع = مم ع = قم ط

قم (ق۔ ط) = قم (اوع) = مم ع = مم ع = قط ط

۴۔ زاویہ (ق۔ ط) کی مثلثی نسبتوں کو طہ کی تمام قیمتوں کے لئے ط کی رقوم میں دریافت کرو۔



فرض کرو کہ خط دائرہ وا سے شروع ہو کر زاویہ ط منقسم کرتا ہے اور اُس وقت اُس کا مقام وع ہوتا ہے یعنی زاویہ $\text{اوع} = \text{ط}$ فرض کرو کہ اس کے بعد خط دائرہ وع سے مقام وع تک ایک زاویہ قائمہ میں حرکت کرتا ہے یعنی فرض کرو کہ زاویہ $\text{اوع} = (۹۰ + \text{ط})$

وع کو وع کے مساوی قطع کرو اور ع م اور ع م عمود اویا اور محدودہ پر نکالو ہر ایک شکل میں چونکہ وع قائمہ ہے اس لئے زاویوں م و ع اور ع و م کا مجموعہ ایک قائمہ کے برابر ہے۔ اس لئے زاویہ $\text{م و ع} = ۹۰ - \text{ع و م} = \text{اوع م}$ لہذا مثلث م و ع اور م ع و ہر طرح سے باہم مساوی ہیں۔ اس لئے وم اور م ع تعداداً مساوی ہیں اسی طرح سے م ع اور وم تعداداً مساوی ہیں

ہر ایک شکل میں وم اور م ع متحدہ علامت ہیں لیکن م ع اور وم کی علامتیں مختلف ہیں یعنی

$$\text{م ع} = + \text{وم اور و م} = - \text{م ع}$$

اس لئے

$$\text{جب (۹۰ + ط)} = \text{جب اوع} = \frac{\text{م ع}}{\text{وع}} = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \text{جم ط}$$

$$\text{جم (۹۰ + ط)} = \text{جم اوع} = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\text{م ع}}{\text{وع}} = \text{جب ط}$$

$$\text{مس (۹۰ + ط)} = \text{مس اوع} = \frac{\text{م ع}}{\text{وم}} = \frac{\text{وم}}{\text{م ع}} = - \text{مم ط}$$

$$\text{مم} (۹۰ + ط) = \text{مم اوغ} = \frac{\text{وم}}{\text{وم}} = \text{مم} = \text{سس ط}$$

$$\text{قط} (۹۰ + ط) = \text{قط اوغ} = \frac{\text{وغ}}{\text{وم}} = \frac{\text{وغ}}{\text{مم}} = \text{قم ط}$$

$$\text{اور قم} (۹۰ + ط) = \text{قم اوغ} = \frac{\text{وغ}}{\text{وم}} = \frac{\text{وغ}}{\text{وم}} = \text{قط ط}$$

$$\text{مثلاً جب } ۱۵۰ = \text{جب} (۹۰ + ۶۰) = \text{جم } ۶۰ = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{جم } ۱۳۵ = \text{جم} (۹۰ + ۴۵) = \text{جب } ۴۵ = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{سس } ۱۲۰ = \text{سس} (۹۰ + ۳۰) = \text{مم } ۳۰ = \frac{۱}{۳}$$

زاویہ مکملہ

==

جب دو زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہو تو ان میں ہر ایک کو دوسرے کا مکمل یا مکملہ کہتے ہیں مثلاً کسی زاویہ ط کا مکملہ ۹۰ - ط ہے۔

$$\text{مثلاً } ۳۰ \text{ کا مکملہ } = ۹۰ - ۳۰ = ۶۰$$

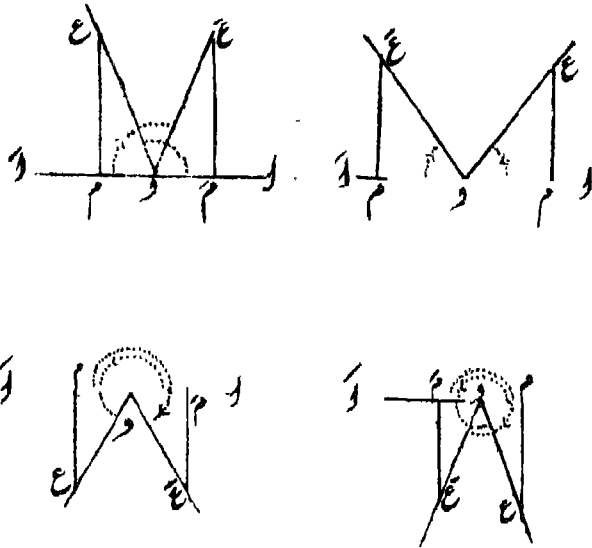
$$۱۲۰ \text{ کا مکملہ } = ۹۰ - ۱۲۰ = ۳۰$$

$$۲۶۵ \text{ کا مکملہ } = ۹۰ - ۲۶۵ = ۳۵$$

$$۱۲۶ \text{ کا مکملہ } = ۹۰ - ۱۲۶ = ۳۴$$

$$۳۱۰ \text{ کا مکملہ } = ۹۰ - ۳۱۰ = ۴۰$$

۸۰ - زاویہ (۹۰ - ط) کی مثلث نسبتیں ط کی تمام قیمتوں کے لئے ط کی رقوم میں دریافت کرو۔



فرض کرو کہ خط دائر مقام $وا$ سے شروع ہو کر زاویہ $اوع$ (= طہ) مرتسم کرتا ہے۔
 زاویہ $ا۸۰$ - طہ حاصل کرنے کے لئے فرض کرو کہ خط دائر $وا$ سے شروع ہو کر دو قائلے مرتسم کرتا ہے اور مقام $وا$ پر پہنچتا ہے اسکے بعد سمت مخالف میں بقدر زاویہ طہ کے حرکت کر کے مقام $وع$ پر آتا ہے اور اس طرح سے ایک ایسا زاویہ $اوع$ مرتسم کرتا ہے جو مقدار میں زاویہ $اوع$ کے مساوی لیکن علامت میں اس سے مختلف ہوتا ہے۔

ظاہر ہے کہ زاویہ $اوع = ا۸۰$ - طہ
 $وع$ کو $وع$ کے برابر قطع کرو اور $وا$ پر $ع$ م اور $ع$ م عمود بنالو
 زاویے $م و ع$ اور $م و ع$ برابر ہیں اور اس لئے مثلث $م و ع$
 اور $م و ع$ ہر طرح سے مساوی ہیں لہذا $وم$ اور $وم$ مقدار میں

برابر ہیں اور نیز م ع اور م ع بھی باہم مساوی ہیں۔
ہر ایک شکل میں وم اور وم مختلف سمتوں میں پھینچے گئے ہیں
لیکن م ع اور م ع ایک ہی سمت میں پھینچے گئے ہیں۔ یعنی
وم = م ع اور م ع = م ع

جب (۱۸۰-ط) = جب او ع = م ع = م ع = جب ط
جم (۱۸۰-ط) = جم او ع = م ع = م ع = جم ط
س (۱۸۰-ط) = س او ع = م ع = م ع = س ط
م (۱۸۰-ط) = م او ع = م ع = م ع = م ط
قط (۱۸۰-ط) = قط او ع = م ع = م ع = قط ط
قم (۱۸۰-ط) = قم او ع = م ع = م ع = قم ط
مثلاً جب ۱۲۰ = جب (۱۸۰-۶۰) = جب ۶۰ = ۱۲۰

جم ۱۳۵ = جم (۱۸۰-۴۵) = جم ۴۵ = ۱۳۵

س ۱۵۰ = س (۱۸۰-۳۰) = س ۳۰ = ۱۵۰

۷۹۔ ط کی تمام قیمتوں کے لئے زاویہ (۱۸۰+ط) کی مثلث
نسبتیں ط کی رقوم میں دریافت کرو۔

ارتباطات مطلوبہ دفعہ گذشتہ کے موافق بذریعہ اشکال ہندسیہ

حاصل ہو سکتے ہیں، اس مسئلہ کی اشکال کھینچنے میں وقت نہوگی طالبعلم کے لئے وہ برائے شق چھوڑ دی گئی ہیں۔

نیز تعلقات مذکورہ کا استنباط تسلیم و دفعہ ۷۶ سے بھی ہو سکتا ہے جو زاویہ کی کسی مقدار کے لئے صحیح ثابت کئے گئے ہیں مثلاً فرض کرو کہ $۹۰ + ط = ب$

اس لئے جب $(۱۸۰ + ط) = جب = (۹۰ + ب) = جم ب$ (دفعہ ۷۶)

$= جم (۹۰ + ط) = جب ط$ (دفعہ ۷۶)

اور جم $(۱۸۰ + ط) = جم (۹۰ + ب) = جب ب$ (دفعہ ۷۶)

$= جب (۹۰ + ط) = جم ط$ (دفعہ ۷۶)

نیز مس $(۱۸۰ + ط) = مس (۹۰ + ط) = مم ب$

$= مم (۹۰ + ط) = مس ط$

اور اسی طرح سے $مم (۱۸۰ + ط) = مم ط$

$قطا (۱۸۰ + ط) = قط ط$

$قم (۱۸۰ + ط) = قم ط$

۸۰۔ ط کی تمام قیمتوں کے لئے زاویہ $(۳۶۰ + ط)$ کی مثلثی

نسبتیں ط کی رقوم میں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ خط دائرہ کوئی زاویہ ط مرسم کرنے کے بعد کسی خاص

مقام پر واقع ہے، اب اگر یہ مثبت سمت میں ایک پورا چکر لگائے

یعنی زاویہ $۳۶۰ + ط$ مرسم کرے تو اس کے مقام میں کوئی فرق

نہیں آئے گا، خط دائرہ بعینہ اسی مقام پر ہو گا جہاں پہلے تھا۔

معلوم ہوا کہ زاویہ $۳۶۰ + ط$ کی مثلثی نسبتیں وہی ہوتی ہیں جو

زاویہ ط کی ہیں۔

اور اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ کسی زاویہ پر ۶۰° یا ۶۰° کا کوئی ضعف زیادہ کرنے یا مقدار زاویہ سے ۶۰° یا اس کا کوئی ضعف کم کرنے سے اس کی مثلثی نسبتوں میں کچھ فرق نہیں آتا۔

۸۱۔ اس باب کے مسائل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بڑے سے بڑے زاویہ کی مثلثی نسبتوں کی تحویل ایک ایسے زاویے کی مثلثی نسبتوں میں ہو سکتی ہے جو : اور ۵۰° کے درمیان واقع ہو۔

$$\text{مثلاً جب } ۱۷۵^{\circ} = \text{جب } (۳۶۰ + ۳۵) = \text{جب } ۳۲۵^{\circ} \text{ (دفعہ ۸۰)}$$

$$= \text{جب } (۱۸۰ + ۱۳۵) = \text{جب } ۳۱۵^{\circ} \text{ (دفعہ ۷۹)}$$

$$= \text{جب } (۳۵ - ۱۸۰) = \text{جب } ۲۰۵^{\circ} \text{ (دفعہ ۷۸)}$$

$$\text{مس } ۱۱۹۰ = \text{مس } (۳۶۰ + ۸۰) = \text{مس } ۴۴۰ \text{ (دفعہ ۸۰)}$$

$$= \text{مس } (۹۰ + ۲۰) = \text{مس } ۱۱۰ \text{ (دفعہ ۷۶)}$$

$$\text{اور قم } (-۱۳۶۵) = \text{قم } ۱۳۶۵ \text{ (دفعہ ۷۴)}$$

$$= \text{قم } (۳۶۰ + ۲۵) = \text{قم } ۴۰۵ \text{ (دفعہ ۸۰)}$$

اسی طرح سے اور زاویوں کی تحویل ہو سکتی ہے، سب سے اول زاویہ مجوزہ سے ۶۰° کے اضعاف تفریق کرتے جاؤ جب تک کہ زاویہ : اور ۶۰° کے درمیان نہ آجائے، اب اگر یہ ۸۰° سے بڑا ہو تو اس میں سے ۸۰° منفی کرو، اس کے بعد اگر یہ ۹۰° سے بڑا ہو تو ضوابط دفعہ ۷۶ کو استعمال کرو اور آخر الامر اگر ضرورت ہو تو ضابطہ دفعہ ۷۵ کی مدد لو۔

۸۲۔ قائمہ سے بڑے چند مشہور زاویوں کی صورت میں جدول دفعہ ۷۴ کی توسیع اس طرح ہو سکتی ہے۔

بہار

زاویہ : ۹۰ ۹۰ ۴۵ ۳۰ ۱۵ ۰

نسب $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

نسب التمام $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

عاس $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

عاس التمام $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

قاطع التمام $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

قاطع الزاویہ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

۱۰۰ مثالی نمبری (۱۰)

ثابت کرو کہ

- ۱- جب ۲۲۰° جم $+ ۳۹۰^{\circ}$ جم $- ۳۰۰^{\circ}$ جب $- ۳۰۰^{\circ}$ جب $= ۱$
 ۲- جم ۵۷۰° جب ۱۰۰° جب ۳۰۰° جم $۳۹۰^{\circ} = ۰$
 ۳- مس ۲۲۵° مم ۲۰۵° + مس ۷۵° مم $۶۷۵^{\circ} = ۰$
 اگر ۱ کی قیمتیں مفصلہ ذیل ہوں تو جم ۱ - جب ۱ اور مس ۱ + مم ۱ کی قیمتیں دریافت کرو۔

۴- $\frac{۳۵}{۳۲}$

۵- $\frac{۳۲}{۳۵}$

۶- $\frac{۳۲}{۳۵}$

۸- $\frac{۳۲}{۳۵}$

۷- $\frac{۳۵}{۳۲}$

۱ کی قیمتیں دریافت کرو جو ۰ اور ۳۹۰° کے درمیان ہوں جبکہ

۱۰- جم $۱ = - \frac{۱}{۲}$

۹- جب $۱ = \frac{۱}{۲}$

۱۲- مم $۱ = - \frac{۱}{۳۲}$

۱۱- مس $۱ = - \frac{۱}{۳۲}$

۱۴- مم $۱ = - \frac{۱}{۲}$

۱۳- قضا $۱ = - \frac{۱}{۳۲}$

مقادیر ذیل کو ایک ایسے مثبت زاویہ کی مثلثی نسبتوں کی رقوم میں بیان کرو جو ۳۹۰° سے کم ہو۔

۱۶- جم $- ۳۹۰^{\circ}$

۱۵- جب $- ۶۵^{\circ}$

۱۸- جب ۶۹°

۱۷- مس ۳۷°

۲۰- مس $- ۳۶۶^{\circ}$

۱۹- جم ۲۸۷°

- ۲۱ - جب ۸۴۳
۲۲ - جم (-۹۲۸)
۲۳ - سس ۱۱۴۵
۲۴ - جم ۱۴۱۰
۲۵ - مم (-۱۰۵۴)
۲۶ - قم (-۷۵۶)
۲۷ - قط ۱۳۳۷

ا کی مفصلہ ذیل قیمتوں کے لئے جب ا + جم ا کی علامات دریافت کرو

- ۲۸ - ۱۴۰ ۲۹ - ۲۷۸ ۳۰ - ۳۵۶ ۳۱ - ۳۳۱ ۳۲ - ۱۱۳۵

ا کی مفصلہ ذیل قیمتوں کے لئے جب ا - جم ا کی علامات دریافت کرو -

- ۳۳ - ۲۱۵ ۳۴ - ۸۲۵ ۳۵ - ۹۳۴ ۳۶ - ۳۵۶ ۳۷ - ۱۴۱۰ ۳۸ - ۱۱۳۵

۳۹ - اُن سب زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام دریافت کرو جو پہلے چارہ جیوبوں

میں واقع ہوں اور جن کے محاسن جم ۱۳۵ کے برابر ہوں -

ثابت کرو کہ

۳۷ - جب (۲۷۸ + ا) = جم ا اور سس (۲۷۸ + ا) = مم ا

۳۸ - جم (۲۷۸ - ا) = جب ا اور مم (۲۷۸ - ا) = سس ا

۳۹ - جم ا + جب (۲۷۸ + ا) - جب (۲۷۸ - ا) + جم (۲۷۸ + ا) = ۰

۴۰ - قط (۲۷۸ - ا) - قط (۲۷۸ + ا) - سس (۲۷۸ - ا) + سس (۲۷۸ + ا) = ۰

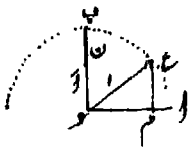
۴۱ - مم ا + سس (۲۷۸ + ا) + سس (۲۷۸ - ا) + سس (۲۷۸ - ا) = ۰

باب ششم

جملات عامہ اُن زاویوں کے لئے جو ایک مقررہ مثلثی نسبت ہوتے ہیں

۸۳۔ ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بنا جس کی جیب
ایک کسر واجب ا کے برابر ہو۔

فرض کرو کہ وا خط ابتدائی ہے
اور وب مثبت سمت میں وا پر



عمود ہے 'وب پر فاصلہ ون برابر
ا کے ناپو۔ [اگر ا منفی ہو تو نقطہ

ن 'ب و محدودہ پر واقع ہوگا۔]

نقطہ ن سے ن ع متوازی وا کے کھینچو اور و کو مرکز مان کر
ایک ایسا دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر ایک ہو اور جو خط ن ع
کو نقطہ ع پر ملے تب اوع زاویہ مطلوبہ ہوگا۔

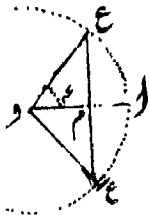
وا پر عمود ع م نکالو پس

$$\text{جب اوع} = \frac{\text{م ع}}{\text{و ع}} = \frac{\text{ون}}{\text{و ع}} = \frac{\text{ا}}{۱} = \text{ا}$$

زاویہ اوع کی جیب مقدار معلومہ کے برابر ہے اسلئے اوع

زاویہ مطلوبہ ہے

۸۴۔ ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بناؤ جس کی جیب التمام



ایک کسر واجب ب کے برابر ہو

خط ابتدائی پر ایک فاصلہ دم برابر ب

کے قطع کرو اور والا پر عمود م ع نکالو

اگر ب منقہ ہو تو م نقطہ و کی دوسری

طرف او ممدودہ پر واقع ہوگا

و کو مرکز مان کر ایک ایسا دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر ایک

ہو اور جو م ع کو نقطہ ع پر ملے۔

اوع زاویہ مطلوبہ ہے کیونکہ

$$\text{جم اوع} = \frac{\text{وم}}{\text{وع}} = \frac{\text{ب}}{۱} = \text{ب}$$

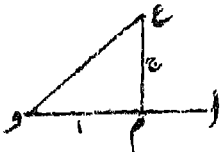
۸۵۔ ایک چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ بناؤ جس کا

ماس ج کے برابر ہو۔

خط ابتدائی پر دم برابر ایک کے لو

اور نقطہ م پر ایک عمود م ع برابر

ج کے قائم کرو۔ تب



$$\text{مس اوع} = \frac{\text{م ع}}{\text{وم}} = \text{ج}$$

پس اوع زاویہ مطلوبہ ہے

۸۶۔ دفعہ ۵۶ کی تعریفات سے ظاہر ہے کہ جب کوئی

زاویہ معلوم ہو تو اس کی جیب بھی معلوم ہو سکتی ہے مگر اس کا عکس درست نہیں ہے کیونکہ ایک سے زیادہ زاویئے ایسے ہوتے ہیں جن کی ایک ہی جیب ہو مثلاً ذیل کے سب زاویوں کی جیب $\frac{1}{2}$ کے برابر ہے۔

۱۵۰° ، ۳۰° ، ۱۵۰° ، ۳۰° ، ۱۵۰° ، ۳۰°

اس سے ظاہر ہے کہ جب کسی زاویہ کی جیب دی ہوئی ہو تو زاویہ کی مقدار صحیح طور پر معلوم نہیں ہو سکتی، صرف اتنا معلوم ہوتا ہے کہ زاویوں کی تعداد کثیر میں سے کوئی ایک زاویہ مطلوبہ زاویہ ہے۔

جب کسی زاویئے کی جیب اتمام، ماس یا اور مثلثی نسبتیں معلوم ہوں تو اسی قسم کے بیانات صادق آتے ہیں۔

پس معلوم ہوا کہ اگر کسی زاویئے کی کوئی ایک مثلثی نسبت دی ہوئی ہو تو مقدار زاویہ بغیر اشتباہ کے معلوم نہیں ہو سکتی

۸۔ فرض کرو کہ خط دائرہ و خط ابتدائی α پر منطبق ہوتا ہے اس سے ہمیں صرف اتنا معلوم ہوتا ہے کہ خط دائرہ کے

مشیت یا منفی سمت میں ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳..... چکر لگائے ہیں۔

لیکن جب خط دائرہ ایک چکر لگاتا ہے تو اس کا زاویہ مرقمہ ۲۲

۲۲ نیم قطر ہی زاویوں کے برابر ہوتا ہے، اس لئے جب خط دائرہ خط ابتدائی α پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرقمہ مشیت یا منفی سمت میں ۲۲ کا ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳..... لگنا ہوتا ہے یعنی ۲۲ یا ۲۲ یا ۲۲ یا ۲۲..... ہوتا ہے

اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ جب خط دائر خط ابتدائی
پر منطبق ہوتا ہے تو اس کا زاویہ مرتسمہ ۲ ن ۲۲ ہوتا ہے جہاں
ن مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

۸۸۔ مسئلہ ان سب زاویوں کے لئے جن کی ایک ہی
جیب ہو ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔
فرض کرو کہ زاویہ α و β (عہ)

کی جیب معلوم ہے۔

و α پر عمود α نکالو اور β کو
 β اتنا خارج کرو کہ β برابر α و β
کے ہو اور β کو متوازی اور
مساوی β کے بناؤ۔

بوجب دفعہ ۸۷ زاویہ $\alpha + \beta = ۲۲$ ۔ عہ

جب خط دائر مقام α یا β پر (اور صرف انہی دو مقامات پر)
ہوتا ہے تو اس کے زاویہ مرتسمہ کی جیب، جیب معلومہ کے برابر
ہوتی ہے۔

جب خط دائر مقام α پر ہو تو ظاہر ہے کہ اس نے چند پورے
چکر لگانے کے بعد زاویہ α مرتسم کیا ہے، یعنی بوجب دفعہ گزشتہ
اسے زاویہ

$$۲ + ۲۲ + \alpha \quad (۱)$$

مرتسم کیا ہے جہاں α صفر یا کسی مثبت یا منفی صحیح عدد کے برابر
ہو سکتی ہے۔



برابر ہے ع و کو ع تک خارج
کر اور و ع کو و کے برابر بناؤ
و م پر عمود ع م نکالو

ہو جب دفعہ ۹ ماس زاویہ لاو ع
ماس زاویہ لاو ع کے مساوی ہے
نیز زاویہ لاو ع = $\pi + ع$

جب خط دائر مقام و ع پر ہو تو ظاہر ہے کہ اس نے چند پورے چکر
لگانے کے بعد زاویہ ع مرسم کیا ہے۔
یعنی اس نے زاویہ

$$۲\pi + ع \dots\dots\dots (۱)$$

مرسم کیا ہے جہاں نصف یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے
جب خط دائر مقام و ع پر ہو تو اس نے زاویہ $۲\pi + (۲ + ع)$

$$\dots\dots\dots (۲) \text{ یعنی زاویہ } (۱ + ۲) \pi + ع$$

مرسم کیا ہے۔

اوپر کے تمام زاوے جملہ

$$(۳) \dots\dots\dots (ن) \pi + ع$$

میں شامل ہیں جہاں ن نصف یا کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔
اور اس کی وجہ یہ ہے کہ جب ن جفت ہو (یعنی $۲ = ۲$) تو جملہ
(۳) سے وہی زاوے حاصل ہوتے ہیں جو جملہ (۱) میں شامل
ہیں۔

نیز جب ن طاق ہو (یعنی $۲ = ۱ + ۲$) تو

جملہ (۳) سے وہ سب زاوے حاصل ہوتے ہیں جو (۲) میں شامل ہیں
نہایت صریح۔ جملہ (۳) میں وہ سب زاوے شامل ہیں جنکا ماس تمام
وہی ہو جو عہ کا ہے۔

۹۱۔ دفعات ۸۸، ۸۹ اور ۹۰ میں زاویہ عہ کوئی زاویہ ہے
جو شرائط معلومہ کو پورا کرتا ہے، مگر علی مثالوں میں بالعموم بہتر ہوگا
کہ عہ چھوٹے سے چھوٹا وہ مثبت زاویہ منتخب کیا جائے جو شرائط
سوال کو پورا کرے۔

مثال ۱۔ اُن سب زاویوں کے لئے ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔

(۱) جن کی جیب، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ کے برابر ہو

(۲) جن کی جیب تمام، $\frac{1}{2}$ کے برابر ہو

(۳) جن کا ماس، $\frac{1}{3}$ کے برابر ہو

(۱) چھوٹے سے چھوٹا زاویہ جس کی جیب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو ۹۰ یعنی $\frac{\pi}{2}$ کے
برابر ہوتا ہے، اس لئے بموجب دفعہ ۸۹ اُن سب زاویوں کے لئے جن کی
جیب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہو ایک جملہ عامہ

$$n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3} \text{ ہوگا}$$

(۲) چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ جس کی جیب تمام، $\frac{1}{2}$ ہو

۱۲۰ یعنی $\frac{2\pi}{3}$ کے برابر ہوتا ہے

اس لئے بموجب دفعہ ۸۹ اُن سب زاویوں کے لئے جن کی جیب تمام، $\frac{1}{2}$
ہو ایک جملہ عامہ

$$n\pi \pm \frac{2\pi}{3} \text{ ہوگا}$$

(۳) چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ جس کا ماس $\frac{1}{360}$ ہو ۳۰ یعنی $\frac{\pi}{6}$ کے برابر ہوتا ہے۔

اس لئے بموجب دفعہ ۹۰ ان سب زاویوں کے لئے جن کا ماس $\frac{1}{360}$ ہو ایک جملہ عامہ

$$n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi \text{ ہوگا}$$

مثال ۲۔ طہ کی قیمت عامہ دریافت کرو جو شرائط مساوات جب طہ = $\frac{1}{6}$ کو پورا کرے۔

اس صورت میں جب طہ = $\pm \frac{1}{6}$ علامت مثبت لینے سے

$$\text{جب طہ} = \frac{1}{6} = \text{جب } \frac{\pi}{6} \\ \therefore \text{طہ} = n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi (1 -)$$

علامت منفی لینے سے

$$\text{جب طہ} = -\frac{1}{6} = \text{جب } (-\frac{\pi}{6})$$

$$\therefore \text{طہ} = n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi (1 -) (-\frac{\pi}{6})$$

طہ کی قیمت کے دونوں جملوں کو اکٹھا کرنے سے

$$\text{طہ} = n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi (1 -)$$

$$\text{یا } \text{طہ} = n \cdot \frac{\pi}{6} \pm \pi$$

مثال ۳۔ طہ کی قیمت عامہ دریافت کرو جو شرائط مساوات

جب طہ = $-\frac{1}{6}$ اور مس طہ = $\frac{1}{360}$ کو پورا کرے۔

طہ کی قیمتیں جو ۳۶۰ کے درمیان واقع ہیں اور جو شرائط مساوات

جب طہ = $-\frac{1}{6}$ کو پورا کرتی ہیں صرف ۲۱۰ اور ۳۳۰ ہیں اسی طرح

سے طہ کی قیمتیں جبکہ مس طہ = $\frac{1}{34}$ صرت ۳۰ اور ۲۱۰ ہیں طہ کی قیمت جو : اور ۳۰ کے درمیان واقع ہے اور جو مذکورہ بالا دونوں شرائط کو پورا کرتی ہے صرت ۲۱۰ یعنی $\frac{7}{4}$ ہے
اس لئے طہ کی قیمت عامہ اس زاویہ یعنی $\frac{7}{4}$ پر ہم قائلوں کا کوئی صنعت زیادہ کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور اس لئے یہ ۲۱ + $\frac{7}{4}$ ہے جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

امثلہ نمبری ۱۱

طہ کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو جو شرائط معادلات ذیل کو پورا کریں

۱۔ جب طہ = $\frac{1}{4}$	۲۔ جب طہ = $\frac{37}{4}$
۳۔ جب طہ = $\frac{1}{34}$	۴۔ جم طہ = $\frac{1}{4}$
۵۔ جم طہ = $\frac{37}{4}$	۶۔ مس طہ = $\frac{1}{34}$
۷۔ مس طہ = $\frac{37}{4}$	۸۔ مس طہ = ۱
۹۔ مم طہ = ۱	۱۰۔ قط طہ = ۲
۱۱۔ قم طہ = $\frac{2}{34}$	۱۲۔ جب طہ = ۱
۱۳۔ جم طہ = $\frac{1}{34}$	۱۴۔ مس طہ = $\frac{1}{34}$
۱۵۔ ۲ جب طہ = ۳	۱۶۔ ۲ مم طہ = قم طہ
۱۷۔ قط طہ = $\frac{2}{34}$	۱۸۔ طہ کی قیمت عامہ دریافت کرو جو شرائط معادلات جم طہ = $\frac{1}{34}$

اور مس ط = ۱ کو پورا کرے

۱۹ - ط کی قیمت عامہ دریافت کرد جو شرائط معادلات مم ط = - ۳۴ اور
مم ط = - ۲ کو پورا کرے -

۲۰ - اگر جم (ب - ۱) = $\frac{1}{4}$ اور جب (ب + ۱) = $\frac{1}{4}$ تو ۱ اور ب کی
چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمتیں نیز ان کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو

۲۱ - اگر مس (ب - ۱) = ۱ اور قط (ب + ۱) = $\frac{2}{3}$ تو ۱ اور ب
کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمتیں نیز ان کی عام سے عام قیمتیں دریافت کرو -

۲۲ - ۰ اور ۳۶ کے درمیان جن زاویوں کی (۱) جیب $\frac{1}{2}$
ہوں (۲) جیب التمام = $\frac{1}{4}$ ہوں (۳) ماس $\frac{1}{10}$ ہوں، انکو دریافت کرو

۲۳ - اگر صرف ان زاویوں کو ملحوظ رکھا جائے جو : ۰ اور ۱۸۰ کے
درمیان واقع ہوں تو معلوم کرو کہ ذیل کی مختلف صورتوں میں لا کی کتنی

قیمتیں ہیں (۱) جب لا = $\frac{5}{6}$ (۲) جم لا = $\frac{1}{6}$ (۳) جم لا = - $\frac{2}{5}$

(۴) مس لا = $\frac{2}{3}$ (۵) مم لا = -

۲۴ - زاویہ لا معلوم ہے، زاویہ ما بناؤ اگر (۱) جب ما = ۲ جب لا

(۲) مس ما = ۳ مس لا (۳) جم ما = $\frac{1}{4}$ جم لا اور (۴) قطا = مم لا

۲۵ - ثابت کرو کہ ذیل کے دونوں ضابطوں سے وہی زاوے تعبیر

ہوتے ہیں - (۱) $(1 - \frac{n}{2}) + \frac{n}{4}$ اور (۲) $2(2 - \frac{n}{4})$

جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے -

۲۶ - ثابت کرو کہ ذیل کے دو ضابطوں

(۱) $(\frac{1}{4} + 2 - n) \pm 2$ اور (۲) $2(1 - \frac{n}{4}) \pm 2$ سے

وہی زاوے تعبیر ہوتے ہیں جہاں ن کوئی عدد صحیح ہے، شکل سے

اس کی تو ضیح کرو۔

۲۷۔ اگر طہ - عہ = ن $\pi + (1 - \pi)$ بہ تو

ثابت کرو کہ طہ = $2\pi م + عہ + بہ$ یا

طہ = $(1 + 2\pi م) + عہ - بہ$ جہاں م اور ن کوئی دو صحیح عدد ہیں۔

۲۸۔ اگر جم ک طہ + جم ق طہ = ۰ تو ثابت کرو کہ اس مساوات کو

حل کرنے سے طہ کی مختلف قیمتوں کے دو حسابہ سلسلے حاصل ہوتے ہیں جن میں

سے ایک کا فرق مشترک $\frac{\pi^2}{ق + ق}$ ہے اور دوسرے کا $\frac{\pi^2}{ق - ق}$

۲۹۔ ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$ ہو۔

۹۲۔ جس مساوات میں کسی زاویہ غیر معلومہ کی مثلثی نسبتیں

شامل ہوں اس کو مثلثی مساوات کہتے ہیں۔

مساوات کا حل پورے طور پر حاصل نہیں ہوتا جب تک کہ

اُن سب زاویوں کے لئے جو شرائط مساوات کو پورا کرتے ہیں

ایک جملہ عامہ حاصل نہ ہو جائے۔

مثلثی مساوات کی چند آسان مثالیں دفعہ ذیل میں مندرج ہیں۔

۹۳۔ مثال ۱۔ مساوات ۲ جب $لا + ۳۸ + ۳۸ جم لا + ۱ = ۰$ کو حل کرو۔

یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

۲۔ $2 جم لا + ۳۸ + ۳۸ جم لا + ۱ = ۰$

یعنی $2 جم لا - ۳۸ - ۳۸ جم لا = ۳۳$

یعنی $(جم لا - ۳۸) (2 جم لا + ۳۸) = ۰$

معلوم ہوا کہ شرائط مساوات معلومہ، $جم لا = ۳۸$ یا $جم لا = -\frac{۳۸}{2}$ سے پوری

ہوتی ہیں۔

چونکہ کسی زاوئے کی جیب التام تعداداً ایک سے زیادہ نہیں ہو سکتی اس لئے پہلے جزد ضربی سے کوئی قیمت مساوات حاصل نہیں ہوتی۔
چھوٹے سے چھوٹا مثبت زاویہ جس کی جیب التام $-\frac{37}{4}$ ہے
۱۵۰ یعنی $\frac{115}{4}$ ہے۔

اس لئے جس زاویہ کی جیب التام $-\frac{37}{4}$ ہو اس کی عام سے عام قیمت
۲ ن $\frac{115}{4} = \pi$ ہوگی (دفعہ ۱۹)
اور مساوات مطلوبہ کی قیمت عامہ بھی یہی ہوگی۔

مثال ۲۔ مساوات مس ۵ طہ = مم ۲ طہ کو حل کرو
یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہے

$$\text{مس ۵ طہ} = \text{مس} \left(2 - \frac{\pi}{4} \text{ طہ} \right)$$

اس زاویہ کی عام سے عام قیمت جس کا ماس دہی ہو جو $2 - \frac{\pi}{4}$ طہ کا ہے
بموجب دفعہ ۹۰، ن $\pi + 2 - \frac{\pi}{4}$ طہ ہے جہاں ن کوئی مثبت یا منفی
صحیح عدد ہے۔

اس لئے مساوات مجوزہ کا عام سے عام حل

$$\text{طہ ۵} = \text{ن} \left(\pi + 2 - \frac{\pi}{4} \right) \text{ طہ ہے}$$

اس لئے طہ $= \frac{1}{\pi + 2 - \frac{\pi}{4}}$ جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

امثلہ نمبری ۱۲

معادلات ذیل کو حل کرو

$$۱۔ \text{جم طہ} - \text{جب طہ} = \frac{1}{\pi}$$

- ۲ - ۲ جب ۲ طه + ۳ جم طه = ۰
- ۳ - ۲ ۳ جم طه = جب طه
- ۴ - جم طه + جم طه = ۱
- ۵ - ۲ جم طه - ۳ قط طه = ۲ مس طه
- ۶ - جب ۲ طه - ۲ جم طه + $\frac{1}{۳}$ = ۰
- ۷ - مس طه - (۱ + ۳) مس طه + ۳ = ۰
- ۸ - مم طه + (۳ + $\frac{1}{۳}$) مم طه + ۱ = ۰
- ۹ - مم طه - ۱ ب مس طه = ۱ - ب
- ۱۰ - مس طه + مم طه = ۲
- ۱۱ - قط طه - ۱ = (۱ - ۳) مس طه
- ۱۲ - ۳ (قط طه + مس طه) = ۵
- ۱۳ - مم طه + مس طه = ۲ قم طه
- ۱۴ - ۲ جم طه + ۳ = ۲ (۱ + ۳) جم طه
- ۱۵ - ۳ جب ۲ طه - ۲ جب طه = ۱ ۱۶ - جب ۵ طه = $\frac{1}{۳}$
- ۱۷ - جب ۹ طه = جب طه ۱۸ - جب ۳ طه = جب ۲ طه
- ۱۹ - جم م طه = جم ن طه ۲۰ - جب ۲ طه = جم ۳ طه
- ۲۱ - جم ۵ طه = جم ۴ طه ۲۲ - جم م طه = جب ن طه
- ۲۳ - مم طه = مس ۸ طه ۲۴ - مم طه = مس ن طه
- ۲۵ - مس ۲ طه = مس ۲ طه ۲۶ - مس ۲ طه مس طه = ۱
- ۲۷ - مس ۳ طه = مم طه ۲۸ - مس ۳ طه = مم طه

۲۹- $مس^۲ طه = مس^۲ عه$ ۳۰- $۳ مس^۲ طه = ۱$

۳۱- $مس م لا + مم ن لا = ۰$

۳۲- $مس (۲ مم طه) = مم (۲ مس طه)$

۳۳- جب $(طه - عه) = \frac{۱}{۲}$ اور $جم (طه + عه) = \frac{۱}{۲}$

۳۴- $جم (۲ لا + ۲ ما) = \frac{۱}{۲}$ اور $جم (۳ لا + ۲ ما) = \frac{۳۴}{۲}$

۳۵- وہ سب زائدے دریافت کرو جو ۰ اور ۹۰ کے درمیان واقع ہوں

اور جو شرائط مساوات $قط طه قلم طه + ۲ قلم طه = ۸$ کو پورا کریں

۳۶- اگر $مس^۲ طه = \frac{۵}{۲}$ تو سمجھ طه دریافت کرو

اور مشتق جواب کی وجہ بیان کرو

۳۷- اگر کسی زاویہ کا سہم النمام $\frac{۱}{۲}$ ہو تو اس کی جیب النمام اور محاس النمام

دریافت کرو۔

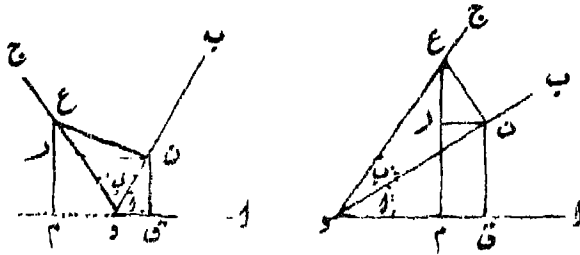
باب ہفتم

دو زاویوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کی مشق بنائیں

۹۴- مسئلہ- ثابت کرو کہ

جب (ا + ب) = جب ا + جب ب

اور جب (ا + ب) = جب ا - جب ب



فرض کرو کہ خط دائر مقام ابتدائی وا سے شروع ہو کر زاویہ ا و ب
(ا = ب) مرسم کرتا ہے اور اس کے بعد ایک اور زاویہ ب و ج
(ب = ب) مرسم کرتا ہے۔

خط دائر کے آخری مقام ج پر کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور وا اور

وب پر بالترتیب عمود عم اور ع ن نکالو
نقطہ ن میں سے ن در متوازی او کے اس طرح کھینچو کہ وہ م ع
کو نقطہ ل پر قطع کرے اور وا پر عمود ن ق نکالو۔

نراویہ $\angle ع ن = ۹۰ - \angle ع ن ر = \angle ر ن و = \angle ن و ق = ا$
اس لئے جب (ا + ب) = جب ا و ع = $\frac{م ع}{و ع}$

$$= \frac{م ر + ر ع}{و ع} = \frac{ق ن}{و ع} + \frac{ر ع}{و ع}$$

$$= \frac{ق ن}{و ن} \times \frac{و ن}{و ع} + \frac{ر ع}{ن ع} \times \frac{ن ع}{و ع}$$

$$= \text{جب ا جم ب} + \text{جم ر ع ن جب ب}$$

$$\therefore \text{جب (ا + ب)} = \text{جب ا جم ب} + \text{جم ا جب ب}$$

$$\text{نیز جم (ا + ب)} = \text{جم ا و ع} = \frac{م ع}{و ع} = \frac{و ق}{و ع} - \frac{و ق}{و ع} = \frac{و ق}{و ع} - \frac{و ق}{و ع}$$

$$= \frac{و ق}{و ع} - \frac{و ن}{و ع} = \frac{و ق}{و ن} \times \frac{و ن}{و ع} - \frac{و ن}{و ع} \times \frac{و ن}{و ع}$$

$$= \text{جم ا جم ب} - \text{جب ر ع ن} \times \text{جب ب}$$

$$\therefore \text{جم (ا + ب)} = \text{جم ا جم ب} - \text{جب ا جب ب}$$

۹۵۔ دفعہ گزشتہ کی اشکال صرف اُس صورت کے لئے کھینچی گئی
ہیں جب دونوں زاوے ا اور ب حادے ہوں لیکن یہی ثبوت ہر مقدار
کے زاویوں پر حادی ہوگا اگر اُن سب مقادیر کی علامات کا جواب
محاسبات میں شامل ہوں خاص لحاظ رکھا جائے

نتائج مندرجہ بالا کی غور سے سب زاویوں کے لئے بغیر اور اشکال
کھینچنے کے اس طرح ثابت ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ A اور B دو حادّے زاوے ہیں پس بموجب دفعہ ۹۴ ہم
جانتے ہیں کہ مسئلہ A اور B کے لئے صحیح ہے۔

فرض کرو کہ $A = 90^\circ + B$ اسلئے بموجب دفعہ ۷۶

جب $A =$ جم A اور جم $B =$ جب A

تب جب $(A + B) =$ جب $\{90^\circ + (A + B)\} =$ جم $(A + B)$ موافق دفعہ ۷۶

$=$ جم A جم $B =$ جب A جب $B =$ جم A جم B جب A جب B

نیز جم $(A + B) =$ جم $\{90^\circ + (A + B)\} =$ جب $(A + B)$

$=$ جب A جم $B =$ جم A جب B

$=$ جم A جم $B =$ جب A جب B

اور اگر زاویہ B پر 90° زیادہ کر دئے جائیں تو بھی اسی طرح کا عمل ہو سکتا
ہے لہذا ثابت ہوا کہ ضوابط دفعہ ۹۴ اُس صورت میں بھی درست رہتے
ہیں جب مقدار زاویہ A یا B پر 90° زیادہ کر دئے جائیں یعنی اگر انکے
ترکیبی زاویوں کی قیمتیں 0° اور 180° کے درمیان واقع ہوں۔

اسی طرح سے A کو $90^\circ + B$ کے مساوی رکھنے سے ہم مسائل مذکورہ
کی صداقت کو اُس صورت میں بھی قائم کر سکتے ہیں جب ایک یا دونوں
ترکیبی زاویوں کی قیمتیں 0° اور 180° کے درمیان واقع ہوں۔

اسی طرح کا عمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ مسائل مذکورہ بالعموم صحیح ہیں۔

ثابت کر دو کہ

۹۶۔ مسئلہ۔

جب $(A - B) =$ جب A جم $B =$ جم A جب B

$$= \text{جہ } \angle \text{جم} + \text{جب } \angle \text{عرب} + \text{جب } \angle \text{ب}$$

$$\text{اس لئے } \text{جہ } (\angle - \text{ب}) = \text{جہ } \angle \text{جم} + \text{جب } \angle \text{ب} + \text{جب } \angle \text{ب}$$

۹۷۔ دفعہ گزشتہ کے ثبوت ہر مقدار کے زاویوں پر حاوی ہونگے اگر مقدار زیر بحث کی علامات کا مناسب خیال رکھا جائے۔

اگر حادثے زاویوں کی صورت میں نتائج مندرجہ مان لئے جائیں تو بغیر اور اشکال کھینچنے کے ان کی صداقت بالعموم اس طرح ثابت ہو سکتی ہے

$$\text{فرض کرو کہ } \angle = 90^\circ + \text{ب}$$

$$(\text{چونکہ } \text{جب } \angle = \text{جہ } \angle \text{ اور } \text{جہ } \angle = - \text{جب } \angle)$$

$$\text{جب } (\angle - \text{ب}) = \text{جب } (\angle + 90^\circ - \text{ب}) = \text{جہ } (\angle - \text{ب}) \quad (\text{دفعہ ۷۶})$$

$$= \text{جہ } \angle \text{جم} + \text{جب } \angle \text{ب} + \text{جب } \angle \text{ب}$$

$$= \text{جب } \angle \text{جم} - \text{جب } \angle \text{ب}$$

$$\text{نیز } \text{جہ } (\angle - \text{ب}) = \text{جہ } (\angle + 90^\circ - \text{ب}) = - \text{جب } (\angle - \text{ب}) \quad (\text{دفعہ ۷۶})$$

$$= - \text{جب } \angle \text{جم} + \text{جب } \angle \text{ب}$$

$$= \text{جہ } \angle \text{جم} + \text{جب } \angle \text{ب}$$

اور اسی طرح کا عمل ہو سکتا ہے اگر زاویہ ب پر 90° زیادہ کر دئے جائیں۔

لہذا یہ مسئلہ ان سب زاویوں کے لئے صحیح ثابت ہوا جو قائم سے بڑے ہوں۔

اسی طرح $\angle$ کو $90^\circ + \angle$ کے مساوی رکھنے سے ہم مسائل مذکورہ کو

تین قائم سے کم مقدار کے زاویوں کے لئے بھی ثابت کر سکتے ہیں اور

علیٰ ہذا القیاس، لہذا اسی قسم کے عمل سے مسائل کی عام صداقت کسی مقدار

کے زاویوں کی صورت میں ثابت ہو سکتی ہے۔

۹۸- مسائل دفعات ۹۴ اور ۹۶ جن کی مدد سے دو زاویوں کے حاصل جمع اور حاصل تفریق کی مثلثی نسبتیں خود ان زاویوں کی رقوم میں حاصل ہوتی ہیں ان زاویوں کے مسائل جمع و تفریق کہلاتے ہیں

۹۹- مثال ۱- جب ۲۵° اور ۳۰° کی قیمتیں دریافت کرو۔
جب ۲۵° = جب (۳۰° + ۲۵°)

$$= \text{جب } ۲۵^\circ \text{ جم } ۳۰^\circ + \text{جب } ۳۰^\circ \text{ جم } ۲۵^\circ$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

اور جم ۲۵° = جم (۳۰° + ۲۵°)

$$= \text{جم } ۲۵^\circ \text{ جم } ۳۰^\circ - \text{جب } ۳۰^\circ \text{ جب } ۲۵^\circ$$

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

مثال ۲- ثابت کرو کہ جب (۱+ب) جب (۱-ب) = جب ۱- جب ۱- جب ۱

$$\text{اور جم (۱+ب) جم (۱-ب) = جم ۱- جب ۱- جب ۱}$$

دفعات ۹۴ اور ۹۶ کی مدد سے

$$\text{جب (۱+ب) جب (۱-ب)}$$

$$= (\text{جب ۱ جم ب} + \text{جم ۱ جب ب}) (\text{جب ۱ جم ب} - \text{جم ۱ جب ب})$$

$$= \text{جب ۱ جم ب} - \text{جم ۱ جب ب}$$

$$= \text{جب ۱ (۱-ب) جب ۱ (۱-ب)}$$

$$= \text{جب ۱- جب ۱}$$

نیز انہی دفعت کی دوسے

جہ (ا + ب) جہ (ا - ب)

= (جہ لا جہ ب - جب لا جب ب) (جہ لا جہ ب + جب لا جب ب)

= جہ لا جہ ب - جب لا جب ب

= جہ لا (ا - جب ب) - (ا - جہ ب) جب ب

= جہ لا - جب ب

مثال ۳- جب (لا + ما) اور جہ (لا + ما) کے ضابطوں کو صحیح مان کر
اُن سے جملات جب (لا - ما) اور جہ (لا - ما) کے ضابطوں کو مستنبط کرو۔

جب لا = جب { (لا - ما) + ما }

= جب (لا - ما) جہ لا + جہ (لا - ما) جب ما (۱)

اور جہ لا = جہ { (لا - ما) + ما }

= جہ (لا - ما) جہ ما - جب (لا - ما) جب ما (۲)

(۱) کو جہ ما سے اور (۲) کو جب ما سے ضرب دو اور تفریق کرو

تب جب لا جہ ما - جہ لا جب ما = جب (لا - ما) { جہ ما + جب ما }

= جب (لا - ما)

نیز (۱) کو جب ما سے اور (۲) کو جہ ما سے ضرب دو اور جمع کر دو تو حاصل ہوگا۔

جب لا جب ما + جہ لا جہ ما = جہ (لا - ما) { جہ ما + جب ما }

= جہ (لا - ما)

لہذا دونوں ضابطے ثابت ہوئے

یہ دونوں ضابطے زاویوں کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں کیونکہ
جن ضابطوں سے انکا استنباط ہوا ہے وہ سب زاویوں کے لئے بالعموم

صحیح ہیں۔

امثلہ نمبری ۱۳

- ۱۔ اگر جب عہ = $\frac{۳}{۵}$ اور حجم بہ = $\frac{۹}{۳۱}$ تو جب (عہ - بہ) اور حجم (عہ + بہ) کی قیمتیں دریافت کرو، نیز شکل اور صحیح پیمائش سے ان کی تصدیق کرو
- ۲۔ اگر جب عہ = $\frac{۴۵}{۵۳}$ اور جب بہ = $\frac{۳۳}{۴۵}$ تو جب (عہ - بہ) اور جب (عہ + بہ) کی قیمتیں دریافت کرو۔

- ۳۔ اگر جب عہ = $\frac{۱۵}{۱۴}$ اور حجم بہ = $\frac{۱۲}{۱۳}$ تو جب (عہ + بہ)، حجم (عہ - بہ) اور مس (عہ + بہ) کی قیمتیں دریافت کرو، نیز شکل اور صحیح پیمائش سے انکی تصدیق کرو۔
- ثابت کرو کہ

- ۴۔ حجم (۱ - ۲۵) - حجم (۲۵ - ب) - جب (۱ - ۲۵) جب (۲۵ - ب) =
- ۵۔ جب (۱ + ۲۵) - حجم (۲۵ - ب) + حجم (۱ + ۲۵) جب (۲۵ - ب) =
- حجم (۱ - ب)

$$۶۔ \text{جب (۱ - ب)} + \text{جب (ب - ج)} + \text{جب (ج - ۱)} = \text{حجم ۱ جب ب} + \text{حجم ب جب ج} + \text{حجم ج جب ۱}$$

$$۷۔ \text{جب ۱۰۵} + \text{حجم ۱۰۵} = \text{حجم ۲۵}$$

$$۸۔ \text{جب ۷۵} - \text{جب ۱۵} = \text{حجم ۱۰۵} + \text{حجم ۱۵}$$

$$۹۔ \text{حجم عہ (جہ - عہ)} - \text{جب عہ جب (جہ - عہ)} = \text{حجم جہ}$$

$$۱۰۔ \text{حجم (عہ + بہ)} - \text{حجم جہ - حجم (جہ + بہ)} = \text{جب بہ جب (جہ - عہ)}$$

۱۱۔ جب (ن + ۱) لا جب (ن - ۱) لا + جم (ن + ۱) لا جم (ن - ۱) لا = جم ۲ لا

۱۲۔ جب (ن + ۱) لا جب (ن + ۲) لا + جم (ن + ۱) لا جم (ن + ۲) لا = جم ۲ لا

۱۰۰۔ دفعات ۹۲ اور ۹۶ سے لا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

جب (ا + ب) = جب لا جم ب + جم لا جب ب

جب (ب - ا) = جب لا جم ب - جم لا جب ب

اعمال جمع اور تفریق سے

جب (ا + ب) + جب (ب - ا) = ۲ جب لا جم ب (۱)

جب (ا + ب) - جب (ب - ا) = ۲ جم لا جب ب (۲)

دفعات مذکورہ بالا سے لا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

جم (ا + ب) = جم لا جم ب - جب لا جب ب

اور جم (ب - ا) = جم لا جم ب + جب لا جب ب

اعمال جمع و تفریق سے

جم (ا + ب) + جم (ب - ا) = ۲ جم لا جم ب (۳)

جم (ب - ا) - جم (ا + ب) = ۲ جب لا جب ب (۴)

اب فرض کرو کہ لا + ب = ج اور لا - ب = د یعنی

$$لا = ج + د \quad اور \quad ب = ج - د$$

اوپر کے ضابطوں میں لا اور ب کی یہ قیمتیں مندرج کرنے سے
ارتباطات (۱) تا (۴) صور ذیل میں متحول ہوتے ہیں -

جب ج + جب د = ۲ جب ج + د + جم ج - د (۱)

جب ج - جب د = ۲ جم ج + د جب ج - د (۲)

جم ج + جم د = ۲ جم ج + د جم ج - د (۳)

جم ج - جم د = ۲ جب ج + د جب ج - د (۴)

[طالب علم کو یاد رکھنا چاہیے کہ (۴) کے بائیں طرف کا دوسرا جزو ضربی
جب $\frac{د-ج}{۲}$ ہے نہ کہ جب $\frac{د-ج}{۲}$]

۱۵۱۔ ارتباطات (۱) سے (۴) تک نہایت مشہور اور کارآمد ہیں
ان کو بڑی احتیاط سے حفظ یا دکر لینا چاہیے، ان کے کثیر الاستعمال
ہونے کی وجہ سے ہم ان کا ایک ہندسی ثبوت اُس صورت میں
دینگے جب زاویے ج اور د دونوں حادے ہوں۔

فرض کرو کہ $\angle$ وج زاویہ ج سے اور $\angle$ او د زاویہ د سے تعبیر
ہوتا ہے، زاویہ ج د کی تنصیف خط وی سے کرو ایک نقطہ ع
خط وی پر مقرر کرو اور وی پر عمود قی ع ر نکالو جو وج اور د کو بالترتیب
نقاط قی اور ر پر قطع کرے۔

و ا پر عمود ع ل، ق م، ر ن نکالو اور نقطہ ر سے ع ل یا
ق م پر عمود ر س ت کھینچو جو ان کو بالترتیب نقاط س اور ت
پر قطع کرے۔

اب چونکہ زاویہ د وج زاویہ ج - د کے برابر ہے اس لئے
د وی اور ع ا وج میں سے ہر ایک زاویہ ج - د کے برابر ہے

اور نیز

$$\text{زاویہ اوی} = \text{زاویہ اود} + \text{زاویہ دوی} = \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲} + \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲} = \frac{\text{ج} + \text{د}}{۲}$$

چونکہ مثلث ع ور اور ع وقی ہر طرح سے مساوی ہیں

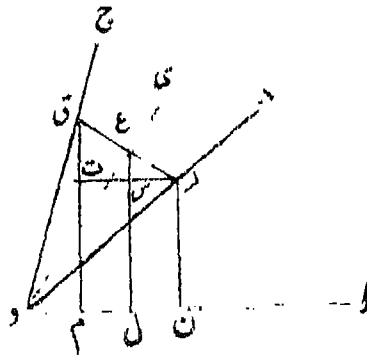
اس لئے وق = ور اور ع ر = ع ق یعنی ر ق = ۲ ر ع

اس لئے ق ت = ۲ ع س اور ر ت = ۲ ر س یعنی م ن = ۲ م ل

اس لئے م ق + ن ر = ت ق + ل س = ۲ س ل + ۲ س ع = ۲ ل س + ۲ س ع

نیز م + ون = ۲ و م + م ن = ۲ و م + ۲ م ل = ۲ و ل

$$\text{اس لئے جب ج + جب د} = \frac{\text{م ق}}{\text{وق}} + \frac{\text{ن ر}}{\text{ور}} = \frac{\text{م ق} + \text{ن ر}}{\text{ور}}$$



$$\frac{\text{ل ع}}{\text{ور}} = \frac{\text{ل ع}}{\text{وق}} \times \frac{\text{وق}}{\text{ور}} = \frac{\text{ل ع}}{\text{ور}} = \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲}$$

$$\frac{\text{ج} + \text{د}}{۲} = \frac{\text{ج} - \text{د}}{۲}$$

$$\text{نیز جب ج - جب د} = \frac{\text{م ق}}{\text{وق}} - \frac{\text{ن ر}}{\text{ور}}$$

$$مق - نر = \frac{تق}{ور} = \frac{۲س ع}{ور}$$

$$۲س ع = \frac{س ع}{ور} \times ۲جم س ع رجب روع$$

$$۲جم ج + د جب ج = د$$

$$\left. \begin{aligned} \text{کیونکہ زاویہ س ع ر} &= ۹۰^\circ - \text{زاویہ س ع و} = \text{زاویہ ل روع} \\ \text{ج} &= \end{aligned} \right\}$$

$$\text{نیز } ۲جم ج + جم د = \frac{وم}{ور} + \frac{ون}{ور} = \frac{وم + ون}{ور}$$

$$۲ول = \frac{ول}{ور} \times ۲ = \frac{ول}{ور}$$

$$۲جم ل روع جم ع ور = ۲جم ج + د جم ج = د$$

$$\text{اور آخر میں } جم د - جم ج = \frac{ون}{ور} - \frac{وم}{ور} = \frac{ون - وم}{ور}$$

$$م ن = \frac{م ن}{ور} = ۲س ر = \frac{۲س ر ع ر}{ور}$$

$$۲جب س ع ر \times جب ع ور =$$

$$۲جب ج + د جب ج = د$$

۱۰۴۔ طالب علم کو خاص ہدایت کی جاتی ہے کہ دفعہ گزشتہ کے صنابطوں سے بخوبی واقف ہو جائے اور ان کے استعمال کی خوب مشق کر لے ان کی کامل واقفیت اس کی آئندہ ترقی

کو نہایت آسان کر دے گی۔

یہ ضابطے نہایت کارآمد ہیں کیونکہ ان کی دساطت سے مقادیر کے حاصل جمع اور حاصل تفریق بعض اور مقادیر کے حاصل ضربوں میں تحویل ہو سکتے ہیں اور اغلباً طالب علم کو جبر مقابلہ سے معلوم ہے کہ مقادیر کے حاصل ضرب کو کار تخم کی آمد سے آسانی مختصر صورت میں لائے جاسکتے ہیں

اب ہم ان قوانین کے استعمال کی چند مثالیں دیتے ہیں

مثال ۱۔ جب ۶ طہ + جب ۴ طہ = ۲ جب ۴ طہ + ۲ طہ جم ۴ طہ - ۲ طہ

$$= ۲ جب ۵ طہ جم طہ$$

مثال ۲۔ جم ۳ طہ - جم ۷ طہ = ۲ جب ۳ طہ + ۷ طہ جب ۷ طہ - ۳ طہ

$$= ۲ جب ۵ طہ جب ۲ طہ$$

مثال ۳۔ جب ۲۵ - جب ۱۵ = ۲ جم ۲۵ + ۱۵ جب ۱۵ - ۲۵ = ۲ جم ۲۵ + ۱۵ جم ۱۵ - ۲۵ = ۲ جم ۲۵ + ۱۵

$$= ۲ جم ۲۵ جب ۳۰ = مس ۳۰$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{3} = ۳۳ \frac{1}{3}$$

[ان ضابطوں کے استعمال سے تسہیل عمل کی یہ ایک چھوٹی سی مثال ہے اگر ہم جب ۲۵، جب ۱۵، جم ۲۵ اور جم ۱۵ کو لوکار تخی حدودوں سے نکالیں اور اس کے بعد ایک طویل کسر اعشاریہ کو دوسری پر تقسیم کریں تو ظاہر ہے کہ یہ نہایت پریشان کن اور طولانی عمل ہوگا]

مثال ۴- جملہ (جم طہ - جم ۳ طہ) (جب ۸ طہ + جب ۲ طہ) کو مختصر کرو۔
جملہ (جب ۵ طہ - جب طہ) (جم ۴ طہ - جم ۶ طہ)

ضابطہ دفعہ ۱۰۰ کی درستی

$$\begin{aligned} \text{جب } ۲ \text{ طہ} + \text{جب } ۳ \text{ طہ} &= \text{جب } ۵ \text{ طہ} \\ \text{جم } ۲ \text{ طہ} - \text{جم } ۳ \text{ طہ} &= \text{جم } ۱ \text{ طہ} \\ \text{جب } ۵ \text{ طہ} - \text{جم } ۱ \text{ طہ} &= \text{جب } ۴ \text{ طہ} \\ \text{جم } ۲ \text{ طہ} + \text{جب } ۴ \text{ طہ} &= \text{جم } ۶ \text{ طہ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۴ \times \text{جب } ۲ \text{ طہ} &= \text{جب } ۸ \text{ طہ} \\ ۴ \times \text{جم } ۲ \text{ طہ} &= \text{جم } ۸ \text{ طہ} \\ \text{جب } ۸ \text{ طہ} - \text{جم } ۸ \text{ طہ} &= ۰ \end{aligned}$$

۱۴ مثلاً نمبری ۱۴

ثابت کرو کہ

$$۱- \frac{\text{جب } ۷ \text{ طہ} - \text{جب } ۵ \text{ طہ}}{\text{جم } ۷ \text{ طہ} + \text{جم } ۵ \text{ طہ}} = \text{مس طہ}$$

$$۲- \frac{\text{جم } ۶ \text{ طہ} - \text{جم } ۴ \text{ طہ}}{\text{جب } ۶ \text{ طہ} + \text{جب } ۴ \text{ طہ}} = - \text{مس طہ}$$

$$۳- \frac{\text{جب } ۱ + \text{جب } ۳}{\text{جم } ۱ + \text{جم } ۳}} = \text{مس } ۲$$

$$۴- \frac{\text{جب } ۷ - \text{جب } ۱}{\text{جب } ۸ - \text{جب } ۲}} = \text{جم } ۱ \text{ قطعاً}$$

$$۵- \frac{\text{جم } ۲ + \text{جم } ۱۲}}{\text{جم } ۲ - \text{جم } ۱۲}} = \text{جم } (۱ + ۲) = \text{جم } (۱ - ۲)$$

$$۶- \frac{\text{جب } ۱۲ + \text{جب } ۲}}{\text{جب } ۱۲ - \text{جب } ۲}} = \frac{\text{مس } (۱ + ۲)}{\text{مس } (۱ - ۲)}$$

- ۷- $\frac{1}{2} \text{م} = \frac{\text{جب } ۱ + \text{جب } ۱۲}{\text{جم } ۱۲}$
- ۸- $\text{مس } ۱ = \frac{\text{جب } ۱۵ - \text{جب } ۱۳}{\text{جم } ۱۳ + \text{جم } ۱۵}$
- ۹- $\text{مس } (۱ - \text{ب}) = \frac{\text{جم } ۲ \text{ب} - \text{جم } ۱۲}{\text{جب } ۲ \text{ب} + \text{جب } ۱۲}$
- ۱۰- $\text{جم } (۱ + \text{ب}) + \text{جب } (۱ - \text{ب}) = ۲ \text{جب } (۱ + ۴۵) (\text{جم } ۴۵ + \text{ب})$
- ۱۱- $\frac{\text{جم } ۱۳ - \text{جم } ۱}{\text{جب } ۱۳ - \text{جب } ۱} + \frac{\text{جم } ۱۲ - \text{جم } ۱۲}{\text{جب } ۱۲ - \text{جب } ۱۲} = \frac{\text{جم } ۱۲ - \text{جم } ۱۲}{\text{جب } ۱۲ - \text{جب } ۱۲}$
- ۱۲- $\text{جب } (۱۲ - ۲ \text{ب}) + \text{جب } (۲ \text{ب} - ۱۲) = \text{مس } (۱ + \text{ب})$
 $\text{جم } (۱۲ - ۲ \text{ب}) + \text{جم } (۲ \text{ب} - ۱۲)$
- ۱۳- $\text{مس } ۵ \text{ط} + \text{مس } ۳ \text{ط} = ۴ \text{جم } ۲ \text{ط} + ۴ \text{جم } ۴ \text{ط}$
 $\text{مس } ۵ \text{ط} - \text{مس } ۳ \text{ط}$
- ۱۴- $\text{جم } ۳ \text{ط} + ۲ \text{جم } ۵ \text{ط} + \text{جم } ۷ \text{ط} = \frac{\text{جم } ۲ \text{ط} - \text{جب } ۲ \text{ط} + \text{مس } ۳ \text{ط}}{\text{جم } ۲ \text{ط} + ۲ \text{جم } ۳ \text{ط} + \text{جم } ۵ \text{ط}}$
- ۱۵- $\text{مس } ۱ = \frac{\text{جب } ۱ + \text{جب } ۱۳ + \text{جب } ۱۵ + \text{جب } ۱۷}{\text{جم } ۱ + \text{جم } ۱۳ + \text{جم } ۱۵ + \text{جم } ۱۷}$
- ۱۶- $\text{جب } (ط + ف) - ۲ \text{جب } ط + \text{جب } (ط - ف) = \text{مس } ط$
 $\text{جم } (ط + ف) - ۲ \text{جم } ط + \text{جم } (ط - ف)$
- ۱۷- $\text{جب } ۱ + ۲ \text{جب } ۱۳ + \text{جب } ۱۵ = \text{جب } ۱۳$
 $\text{جب } ۱ + ۲ \text{جب } ۱۳ + \text{جب } ۱۵ = \text{جب } ۱۳$

$$-۱۸ \quad \begin{array}{l} \text{جب (ا-ج) + ۲ جب ا + جب (ا+ج)} \\ \text{جب (ب-ج) + ۲ جب ب + جب (ب+ج)} \end{array} = \frac{\text{جب ا}}{\text{جب ب}}$$

$$-۱۹ \quad \begin{array}{l} \text{جب ا- جب ۵ + جب ۹- جب ۱۳} \\ \text{جم ا- جم ۵- جم ۹+ جم ۱۳} \end{array} = \text{مم ۴}$$

$$-۲۰ \quad \begin{array}{l} \text{جب ا+ جب ب} \\ \text{جب ا- جب ب} \end{array} = \frac{\text{مس ۲} + \text{ب مم ۱- ب}}{۲}$$

$$-۲۱ \quad \begin{array}{l} \text{جم ا+ جم ب} \\ \text{جم ب- جم ا} \end{array} = \text{مم} \frac{\text{ا+ ب مم ۱- ب}}{۲}$$

$$-۲۲ \quad \begin{array}{l} \text{جب ا+ جب ب} \\ \text{جم ا+ جم ب} \end{array} = \frac{\text{مس ۲} + \text{ا+ ب}}{۲}$$

$$-۲۳ \quad \begin{array}{l} \text{جب ا- جب ب} \\ \text{جم ب- جم ا} \end{array} = \frac{\text{مم ۲} + \text{ا+ ب}}{۲}$$

$$-۲۴ \quad \begin{array}{l} \text{جم (ا+ ب+ ج) + جم (ا- ب+ ج) + جم (ا- ب+ ج) + جم (ا+ ب- ج)} \\ \text{جب (ا+ ب+ ج) + جب (ا- ب+ ج) + جب (ا- ب+ ج) + جب (ا+ ب- ج)} \end{array} = \text{مم ۴}$$

$$-۲۵ \quad \text{جم ۱۳ + جم ۵ + جم ۴ + جم ۱۵} = \text{جم ۴ + جم ۵ + جم ۴ + جم ۱۵}$$

$$-۲۶ \quad \text{جم (ا- ب+ ج) + جم (ا- ب+ ج) + جم (ا- ب+ ج) + جم (ا+ ب+ ج)}$$

$$= \text{جم ۴ + جم ۱۵}$$

$$-۲۷ \quad \text{جب ۵۰- جب ۴۰+ جب ۱۰=}$$

$$-۲۸ \quad \text{جب ۱۰+ جب ۲۰+ جب ۴۰+ جب ۵۰= جب ۴۰+ جب ۸۰}$$

$$-۲۹ \quad \text{جب ۴+ جب ۲+ جب ۴+ جب ۵= جم ۴+ جم ۳+ جم ۳+ جب ۳+ جب ۳}$$

مختصر کرو

$$۳۰ - \text{جم} \{ ط + (ن - \frac{۳}{۲}) \} - \text{جم} \{ ط + (ن + \frac{۳}{۲}) \} - ف \{ کو$$

$$۳۱ - \text{جب} \{ ط + (ن - \frac{۱}{۲}) \} - ف \{ کو + \text{جب} \{ ط + (ن + \frac{۱}{۲}) \} - ف \{ کو$$

۱۰۳ - دفعہ ۱۰۰ کے ضوابط (۱)، (۲)، (۳)، (۴) نہایت کارآمد ہیں ان کو شکل ذیل میں یاد رکھنا چاہیئے۔

$$۲ \text{ جب } ۱ \text{ جم } ب = \text{جب} (۱ + ب) + \text{جب} (۱ - ب) \dots (۱)$$

$$۲ \text{ جم } ۱ \text{ جب } ب = \text{جب} (۱ + ب) - \text{جب} (۱ - ب) \dots (۲)$$

$$۲ \text{ جم } ۱ \text{ جم } ب = \text{جم} (۱ + ب) + \text{جم} (۱ - ب) \dots (۳)$$

$$۲ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ب = \text{جم} (۱ - ب) - \text{جم} (۱ + ب) \dots (۴)$$

ان کو ہم (دفعہ ۱۰۰) کے ضابطوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) کا عکس خیال کر سکتے ہیں۔

$$\text{مثال ۱ - } ۲ \text{ جب } ۱ ط \text{ جم } ط = \text{جب } ۲ ط + \text{جب } ۲ ط$$

$$\text{مثال ۲ - } ۲ \text{ جب } ۵ ط \text{ جب } ۳ ط = \text{جم } ۲ ط - \text{جم } ۸ ط$$

$$\text{مثال ۳ - } ۲ \text{ جم } ۱ ط \text{ جم } ۲ ط = \text{جم } ۱۳ ط + \text{جم } ۹ ط$$

$$\text{مثال ۴ - } \text{جب } ۸ ط \text{ جم } ط - \text{جب } ۶ ط \text{ جم } ۳ ط \text{ کو مختصر کرو}$$

$$\text{جم } ۲ ط \text{ جم } ط - \text{جب } ۳ ط \text{ جب } ۴ ط$$

مندرجہ بالا ضابطوں کی مدد سے

$$\frac{1}{4} [\text{جب ۹ طہ + جب ۷ طہ}] - \frac{1}{4} [\text{جب ۹ طہ + جب ۳ طہ}] = \text{جلہ مجوزہ}$$

$$\frac{1}{4} [\text{جم ۳ طہ + جم ۲ طہ}] - \frac{1}{4} [\text{جم ۲ طہ - جم ۷ طہ}]$$

$$\text{جب ۷ طہ - جب ۳ طہ} = \text{جم ۳ طہ + جم ۷ طہ}$$

$$\text{۲ جم ۵ طہ جب ۲ طہ} = \text{۲ جم ۵ طہ جم ۲ طہ}$$

ضوابط دفعہ ۱۰۰ کی مدد سے

$$= \text{مس ۲ طہ}$$

[اس مثال میں سب سے پہلے ہم نے اس دفعہ کے ضابطوں کو استعمال کیا، اس کے بعد مزید اختصار کی خاطر ان کی عکس صورتوں (دفعہ ۱۰۰) سے مدد لی۔ طالب علم کو یہ ترکیب یاد رکھنی چاہئے جملوں کے اختصار میں یہ اکثر کام آتی ہے]

امثلہ نمبری ۱۵

مفصلہ ذیل کو حاصل جمع یا حاصل تفریق کی صورت میں بیان کرو

$$\begin{aligned} ۱- & \text{جب ۲ طہ جب ۷ طہ} - ۲ - \text{جم ۷ طہ جب ۵ طہ} \\ ۳- & \text{جم ۲ طہ جم ۱۱ طہ} - ۴ - \text{جب ۲ طہ جب ۴ طہ جب ۶ طہ} \end{aligned}$$

ثابت کرو کہ

$$۵- \text{جب ۲ طہ جب ۷ طہ} + \text{جب ۳ طہ جب ۱۱ طہ} = \text{جب ۲ طہ جب ۵ طہ}$$

$$۶- \text{جم ۲ طہ جم ۷ طہ} - \text{جم ۳ طہ جم ۹ طہ} = \text{جب ۵ طہ جب ۵ طہ}$$

$$۷- \text{جب ۱ طہ (ب) + (۲ ب) - جب ۱ طہ (ب) + (۲ ب) = جب ۱ طہ (ب) + (۲ ب)}$$

- ۸۔ (جب ۱۳ + جب ۱) (جب ۱۳ - جب ۱) جم ۱ = ۰
- ۹۔ ۲ جب ۱ (ج - ج) جم ۱ - جب ۱ (ج - ج) = ۲ جب ۱ / جب ۱
- ۱۰۔ جب ۱۳ جب ۱۲ + جب ۱۳ جب ۱۴ + جب ۱۳ جب ۱۳ = مس ۱۳
- ۱۱۔ جم ۱۳ جب ۱۳ - جم ۱۳ جب ۱۴ + جم ۱۳ جب ۱۰ = مم ۱۴ مم ۱۵
- ۱۲۔ جم ۱۳ (ج - ج) جم ۱۳ + جم ۱۳ (ج - ج) + جم ۱۳ (ج - ج) = جم ۱۳
- ۱۳۔ جم ۱۳ جب ۱ (ج - ج) + جم ۱۳ جب ۱ (ج - ج) + جم ۱۳ جب ۱ (ج - ج) = ۰
- ۱۴۔ جب ۱۳ (ج - ج) = ۱۳ - ۱۳ = ۰
- ۱۵۔ سم ۱ (ب + ب) سم ۱ (ب - ب) = (جم ۱ - جم ۱) ۲
- ۱۶۔ جب ۱ (ب - ب) جم ۱ (ج - ج) + جب ۱ (ج - ج) جم ۱ (ج - ج) = ۰
- ۱۷۔ ۲ جم ۱۳ / ۱۳ جم ۱۳ + جم ۱۳ / ۱۳ جم ۱۳ + جم ۱۳ / ۱۳ جم ۱۳ = ۰
- ۱۸۔ ثابت کرو کہ مس ۱ (ب + ب) = مس ۱ + مس ۱
- اور مس ۱ (ب - ب) = مس ۱ - مس ۱
- بوجوب دفعہ ۱۳ اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے
- مس ۱ (ب + ب) = جب ۱ (ب + ب) = جب ۱ جم ۱ + جب ۱ جب ۱
- مس ۱ (ب - ب) = جم ۱ (ب - ب) = جم ۱ جم ۱ - جب ۱ جب ۱

شمار کنندہ اور نسب نما دو نوں کو حجم Δ حجم Δ پر تقسیم کرنے سے

$$\frac{\text{جب } \Delta}{\text{حجم } \Delta} + \frac{\text{جب } \Delta}{\text{حجم } \Delta} =$$

$$1 - \frac{\text{جب } \Delta}{\text{حجم } \Delta} \times \frac{\text{جب } \Delta}{\text{حجم } \Delta}$$

$$\therefore \text{مس } (\Delta + \Delta) = \text{مس } \Delta + \text{مس } \Delta$$

$$1 - \text{مس } \Delta \text{ مس } \Delta$$

نیز ہو جب دفعہ ۹۶

$$\text{مس } (\Delta - \Delta) = \text{جب } (\Delta - \Delta)$$

$$\text{حجم } (\Delta - \Delta)$$

$$= \text{جب } \Delta \text{ حجم } \Delta - \text{حجم } \Delta \text{ جب } \Delta$$

$$\text{حجم } \Delta \text{ حجم } \Delta + \text{جب } \Delta \text{ جب } \Delta$$

$$\text{جب } \Delta - \text{جب } \Delta$$

$$\text{حجم } \Delta \text{ حجم } \Delta =$$

$$1 + \frac{\text{جب } \Delta}{\text{حجم } \Delta} \times \frac{\text{جب } \Delta}{\text{حجم } \Delta}$$

[شمار کنندہ اور نسب نما دو نوں کو
حجم Δ حجم Δ پر تقسیم کرنے سے]

$$\therefore \text{مس } (\Delta - \Delta) = \text{مس } \Delta - \text{مس } \Delta$$

$$1 + \text{مس } \Delta \text{ مس } \Delta$$

۱۰۵ - دفعہ گزشتہ کے ضابطوں کا ہندسی ثبوت اشکال دفعہ ۹۴ اور

۹۶ سے حاصل ہو سکتا ہے -

(۱) شکل دفعہ ۹۴ میں

$$\begin{aligned} \text{مس (ا+ب)} &= \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \frac{\text{ق ن} + \text{ر ع}}{\text{د ق} - \text{ر ن}} \\ &= \frac{\frac{\text{ق ن}}{\text{د ق}} + \frac{\text{ر ع}}{\text{د ق}}}{1 - \frac{\text{ر ن}}{\text{د ق}}} = \frac{\frac{\text{ق ن}}{\text{د ق}} + \frac{\text{مس ا}}{\frac{\text{ر ع}}{\text{د ق}}}}{1 - \frac{\text{ر ن}}{\text{د ق}}} \times \frac{\text{د ق}}{\text{ر ع}} \end{aligned}$$

اب چونکہ زاوے ع ن اور ق ون برابر ہیں اس لئے مثلث ع ن اور ق ون متشابه ہیں

$$\text{پس } \frac{\text{ع ن}}{\text{ق ن}} = \frac{\text{د ق}}{\text{ر ن}}$$

$$\text{اور اسلئے } \frac{\text{ع ن}}{\text{و ن}} = \frac{\text{ر ع}}{\text{و م}} = \text{مس ب}$$

$$\text{اس لئے } \text{مس (ا+ب)} = \text{مس ا} + \text{مس ب}$$

$$\text{مس ا} + \text{مس ب} = \text{مس (ا+ب)}$$

(۲) شکل دفعہ ۹۶ میں

$$\text{مس (ا-ب)} = \frac{\text{م ع}}{\text{و م}} = \frac{\text{ق ن} - \text{ر ع}}{\text{و ق} + \text{ر ن}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\text{ق ن}}{\text{و ق}} - \frac{\text{ر ع}}{\text{و ق}}}{1 + \frac{\text{ر ن}}{\text{و ق}}} = \frac{\frac{\text{ق ن}}{\text{و ق}} - \frac{\text{مس ا}}{\frac{\text{ر ع}}{\text{و ق}}}}{1 + \frac{\text{ر ن}}{\text{و ق}}} \times \frac{\text{و ق}}{\text{ر ع}} \end{aligned}$$

اب چونکہ زاویے $\angle$ ق اور $\angle$ ن وق مساوی ہیں۔

$$\text{اس لئے } \frac{\angle ق}{\angle ن} = \frac{\angle ن}{\angle ق}$$

$$\text{اور اس لئے } \frac{\angle ن}{\angle ق} = \frac{\angle ر}{\angle ق} = \text{مس ب}$$

$$\text{اس لئے مس (ا - ب) = مس ا - مس ب}$$

$$= \text{مس ا - مس ب}$$

۱۰۴۔ مندرجہ بالا مضابطوں کی چند خاص صورتیں اس طرح حاصل ہو سکتی ہیں۔

$$\text{فرض کرو کہ ب} = ۴۵^\circ \text{ تب}$$

$$\text{مس (ا + ۴۵) = مس ا + ۴۵}$$

$$\text{اور مس (ا - ۴۵) = مس ا - ۴۵}$$

اسی طرح موافق و متضاد ۱۰۴ اعلیٰ کرنے سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{مس (ا + ب) = مس ا + مس ب}$$

$$\text{اور مس (ا - ب) = مس ا - مس ب}$$

$$۱۰۵۔ مثال ۱۔ مس ۲۵ = مس (۳۰ + ۴۵)$$

$$\text{مس } ۰۴۵ + \text{مس } ۰۳۰ =$$

$$۱ - \text{مس } ۰۴۵ \text{ مس } ۰۳۰$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}$$

$$\frac{\sqrt{3} + 2}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3})}{1 - 3}$$

$$۳۵۷۳۲۰۵ \dots = ۱۵۷۳۲۰۵ \dots + ۲ = \sqrt{3} + ۲ =$$

مثال ۲ - $\text{مس } ۱۵ = \text{مس } (۰۴۵ - ۰۳۰)$

$$\frac{\text{مس } ۰۴۵ - \text{مس } ۰۳۰}{۱ + \text{مس } ۰۴۵ \text{ مس } ۰۳۰} =$$

$$\frac{(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1} =$$

$$۱۵۷۳۲۰۵ \dots - ۲ = \sqrt{3} - ۲ = \frac{\sqrt{3} - ۲}{2} =$$

$$۵۲۶۷۹۵ \dots =$$

۱۶ اشک نمبری

۱ - اگر $\frac{1}{2} = \text{مس } ۱$ اور $\frac{1}{3} = \text{مس } ۲$ تو $\text{مس } (۲ + ۱)$ اور

$\text{مس } (۲ - ۱)$ کی قیمتیں دریافت کرو

نیز ترکیبی عمل اور صحیح بیانیٹس سے اس کی تصدیق کرو

۲۔ اگر مس ۱ = $\frac{م}{م-۳۴}$ اور مس ب = $\frac{۳۴}{۳۴+۴}$ تو ثابت کرو کہ
مس (۱-ب) = ۳۴۵

۳۔ اگر مس ۱ = $\frac{ن}{۱+ن}$ اور مس ب = $\frac{۱}{۱+ن}$ تو مس (۱+ب)
دریافت کرو

۴۔ اگر مس ع = $\frac{۵}{۴}$ اور مسس ب = $\frac{۱}{۱۱}$ تو ثابت کرو کہ ع + ب = $\frac{۴}{۱۱}$
عل ترسبی اور صحیح پائیش سے اس کی تصدیق کرو۔
ثابت کرو کہ

۵۔ مس $(\frac{۱۱}{۳} + ط)$ × مس $(\frac{۱۱}{۳} + ط)$ = ۱

۶۔ مم $(\frac{۱۱}{۳} + ط)$ مم $(\frac{۱۱}{۳} - ط)$ = ۱

۷۔ ۱ + مس ۱ = $\frac{۱}{۳}$ = مس ۱ مم $\frac{۱}{۳}$ = ۱ - قط ۱

۱۰۸۔ اس باب کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے
اس قسم کی مثالیں بھی حل ہو سکتی ہیں کہ ہم ان سب زاویوں
کے لئے ایک جملہ عامہ دریافت کریں جن کی جیب یا جیب التمام
یا ماس معلوم ہو و فہات ۱۸ تا ۹۰ میں اس کے متعلق بحث
ہو چکی ہے۔

ان سب زاویوں کے لئے جو ایک ہی جیب معلوم رکھتے
ہوں ایک قیمت عامہ دریافت کرو

فرض کرو کہ عہ کوئی زاویہ ہے جو جیب معلوم رکھتا ہے
اور ط ایک اور زاویہ ہے جس کی جیب بھی عہ کی جیب سے

پس ہمیں طہ کی ایک ایسی عام سے عام قیمت معلوم کرنی ہے جو شرائط مساوات جب طہ = جب عہ یعنی جب طہ - جب عہ = ۰ کو پورا کرے یہ مساوات اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہے -

$$۲ \text{ جم} \cdot \frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} = \text{جب} \cdot \frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲} = ۰$$

اور اس لئے اس کی شرائط مساوات ذیل سے پوری ہونگی

$$\text{جم} \cdot \frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} = ۰ \text{ اور جب} \cdot \frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲} = ۰$$

اس لئے لازماً $\frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} = \frac{\pi}{۲}$ کے کسی طاق ضعف کے

$$\text{اور} \quad \frac{\text{طہ} - \text{عہ}}{۲} = \pi \text{ کے کسی ضعف کے}$$

یعنی طہ = - عہ + π کا کوئی طاق ضعف

اور طہ = عہ + π کا کوئی جفت ضعف

یعنی لازماً طہ = (۱- عہ) + π جہاں π کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

کیونکہ جب π طاق ہو تو جملہ عامہ سے جملہ (۱) حاصل ہوتا ہے

اور جب π جفت ہو تو جملہ (۲) حاصل ہوتا ہے

۱۰۹۔ ان سب زاویوں کے لئے جن کی ایک ہی جیب التمام

ہو ایک قیمت عامہ دریافت کرو۔

اس صورت میں مساوات

$$\text{جم} \cdot \text{طہ} = \text{جم} \cdot \text{عہ}$$

یعنی
 ۲ جب $\frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲}$ جب $\text{طہ} = \text{عہ} =$ کو حل کرنا مطلوب ہے
 شرائط مساوات مذکورہ

جب $\frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} =$ سے اور جب $\text{طہ} = \text{عہ} =$ سے پوری ہوتی ہیں
 اس سے ظاہر ہے کہ $\frac{\text{طہ} + \text{عہ}}{۲} = ۲$ کے کسی ضیف کے
 اور $\frac{\text{طہ} = \text{عہ}}{۲} = ۲$ کے کسی ضیف کے

یعنی
 اور $\text{طہ} = - \text{عہ} + ۲$ کا کوئی ضیف
 $\text{طہ} = \text{عہ} + ۲$ کا کوئی ضیف

دونوں نظام ان قیمتوں کے جملہ $\text{طہ} = ۲$ ن $\pm \text{عہ}$ میں شامل
 ہیں جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے
 ۱۱۰۔ اُن سب زاویوں کے لئے جو ایک ہی ماس معلوم
 رکھتے ہوں ایک جملہ عامہ دریافت کرو۔

اس صورت میں مساوات

$\text{مس طہ} = \text{مس عہ} =$

یعنی جب $\text{طہ} = \text{عہ} =$ جب $\text{طہ} = \text{عہ} =$

یعنی جب $(\text{طہ} = \text{عہ}) =$

کو حل کرنا مطلوب ہے۔

۲۔ $\text{طہ} = \text{عہ} = ۲$ کے کسی ضیف کے

$\pm$ ن جہاں ن کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے

۱۔ سلیئے مساوات کا عام سے عام حل طہ = ن + ۲۲ عہ ہے

امثلہ نمبری ۱۶ (۱)

- ۱۔ دو حادثے زاوئے بناؤ جن کے مماس $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{4}$ ہوں اور پیمائش سے تصدیق کرو کہ ان کا مجموعہ ۳۵° ہے
- ۲۔ دو حادثے زاویوں کے مماس بالترتیب ۳ اور ۲ ہیں، عل ترسیمی سے ثابت کرو کہ ان کے تفاوت کا مماس $\frac{1}{2}$ ہے
- ۳۔ ایک حادثے زاوئے کی جیب ۶۶ ہے اور ایک اور زاوئے کی جیب اتمام ۵۰ ہے، عل ترسیمی سے، نیز حساب لگانے سے ثابت کرو کہ ان کے حاصل تفریق کی جیب قریب قریب ۳۹° ہے
- ۴۔ ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب اتمام ۴۰ ہو اور حساب اور پیمائش دونوں سے ثابت کرو کہ ایک ایسے زاوئے کی جیب اور جیب اتمام جو زاویہ مذکورہ سے بقدر ۳۵° کے زیادہ ہو تقریباً ۳۹° اور ۳۶۵° ہیں
- ۵۔ ایک زاویہ حادثہ بناؤ جس کا مماس ۷ ہو اور ایک اور زاویہ حادثہ بناؤ جس کی جیب ۷ ہو، حساب اور پیمائش دونوں سے ثابت کرو کہ ان کے تفاوت کی جیب قریب قریب ۶۱° ہے۔

باب ہفتم

اصنافی اور کسری زاویوں کی مثلثی نسبتیں

۱۱۱۔ زاویہ $\angle A$ کی مثلثی نسبتوں کو زاویہ $\angle A$ کی نسبتوں کی رقوم میں دریافت کرو۔

اگر دفعہ ۹۴ کے ضابطوں میں ہم فرض کریں کہ $b = a$ تو حاصل ہوگا

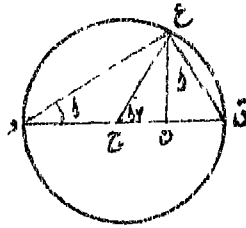
$$\begin{aligned} \text{جب } \angle A &= \text{جب } \angle A + \text{جب } \angle A = \angle A = \angle A \text{ جب } \angle A \\ \text{جب } \angle A &= \text{جب } \angle A - \text{جب } \angle A = \angle A = \angle A \text{ جب } \angle A \\ &= (\angle A - \angle A) - \angle A = \angle A - \angle A \text{ جب } \angle A \\ \text{اور نیز } &= \angle A - (\angle A - \angle A) = \angle A - \angle A \end{aligned}$$

$$\text{اور } \angle A = \angle A + \angle A = \angle A$$

اب دفعہ ۹۴ کے ضابطے $\angle A$ اور b کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہیں اس لئے جو صورتیں ان سے مستنبط ہوتی ہیں وہ بھی زاویوں کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں اور بالخصوص مندرجہ بالا ضابطے $\angle A$ کی تمام قیمتوں کے لئے

درست ہیں۔

۱۱۲۔ جب زاویہ ۱ قائمہ سے کم ہو تو وضعہ گزشتہ کے ضابطہ کا ہندسی ثبوت اس طرح بلا واسطہ حاصل ہو سکتا ہے۔



فرض کرو کہ ق ج ع زاویہ ۱ کے برابر ہے، مرکز ج اور نصف قطر ج ع پر ایک دائرہ بناؤ اور فرض کرو کہ ق ج محدودہ دائرہ مذکورہ کو نقطہ و پر ملتا ہے، و ع اور ع ق کو ملاؤ اور وق پر عمود ع ن نکالو۔

بحکم اقلیدس م ۳ ش ۲۰

$$\text{زاویہ } \angle \text{وع} = \frac{1}{2} \angle \text{ق ج ع} = ۱$$

$$\text{اور زاویہ } \angle \text{نع ق} = \angle \text{ق و ع} = ۱$$

$$\text{اس لئے جب } ۱ = \frac{\angle \text{نع}}{\angle \text{ج ع}} = \frac{\angle \text{نع}}{\angle \text{ج ق}} = ۲ \frac{\angle \text{نع}}{\angle \text{وق}}$$

$$= ۲ \frac{\angle \text{نع}}{\angle \text{وع}} \times \frac{\angle \text{وع}}{\angle \text{وق}}$$

۲ جب ن و ع جم ع وق چونکہ و ع ق زاویہ قائمہ ہے

$$۲ \text{ جب } ۱ \text{ جم } ۱ =$$

$$\text{نیز } ۱۲ \text{ جم } ۱ = \frac{\text{ج ن}}{\text{ج ع}} = \frac{\text{ج ۲}}{\text{ج ع ۲}}$$

$$= \frac{\text{ج ۲ ج ن}}{\text{وق}} = \frac{(\text{وج ج ن}) - (\text{وج ج ن})}{\text{وق}}$$

$$= \frac{\text{ون} - \text{ن ق}}{\text{وق}} = \frac{\text{ون}}{\text{وع}} \times \frac{\text{ون}}{\text{وق}} - \frac{\text{ن ق}}{\text{ع ق}} \times \frac{\text{ن ق}}{\text{وق}}$$

$$= \text{جم } ۱ - \text{جب } ۱$$

$$\text{اور مس } ۱۲ = \frac{\text{ن ع}}{\text{ج ن}} = \frac{\text{ن ۲ ع}}{\text{ون} - \text{ن ق}}$$

$$\frac{\text{ن ۲ ع}}{\text{ون}}$$

$$= ۱ - \frac{\text{ن ق}}{\text{ع ن}} \times \frac{\text{ع ن}}{\text{ون}}$$

$$= ۱ - \text{مس } ۱$$

مثال - جب ۱۵ اور جم ۱۵ کی قیمتیں دریافت کرو

فرض کرو کہ زاویہ ۱۲ برابر ۳۰ کے ہے یعنی ۱ = ۱۵

نیز فرض کرو کہ نصف قطر دائرہ ج ع برابر ۲ کے ہے اسلئے حاصل ہوگا

$$\text{ج ن} = ۲ \text{ جم } ۳۰ = ۳۴$$

$$\text{اور } \text{ن ع} = ۲ \text{ جب } ۳۰ = ۲$$

اس لئے $ون = دج + جن = ر(۳۲ + ۲)$
 اور $نق = جق - جن = ر(۳۲ - ۲)$
 ∴ $دع = ون \times وق = ر(۳۲ + ۲) \times ۴ = ر(۱۲۸ + ۸)$
 یعنی $دع = ر(۱۳۶)$
 اور $عق = قن \times قو = ر(۳۲ - ۲) \times ۴ = ر(۱۲۸ - ۸)$
 یعنی $عق = ر(۱۲۰)$
 اس لئے $جب ۱۵ = \frac{عق}{وق} = \frac{ر(۱۲۰)}{۴} = \frac{ر(۱۳۶ - ۱۶)}{۴}$
 اور $جم ۱۵ = \frac{دع}{وق} = \frac{ر(۱۳۶)}{۴} = \frac{ر(۱۲۰ + ۱۶)}{۴}$

۱۱۳ - زاویہ ۳۱ کی مثلثی نسبتوں کو زاویہ ۱ کی نسبتوں کی
 رقوم میں دریافت کرو۔

دفعہ ۹۴ میں بکجگہ ۱۲ رکنے سے حاصل ہوگا
 جب ۱۳ = جب ۱ + جب ۱۲ = جم ۱ + جب ۱۲
 = جب ۱ - (۱ - جب ۱) + جم ۱ + جب ۱۲
 = جب ۱ - (۱ - جب ۱) + ۲ جب ۱ + جم ۱ + جب ۱۲

اس لئے جب ۱۳ = ۳ جب ۱ - ۴ جب ۱ (۱)

اسی طرح سے جم ۱۳ = جم ۱ + جم ۱۲ = جم ۱ + جم ۱۲ - جب ۱ + جب ۱۲
 = جم ۱ + جم ۱۲ - (۱ - جب ۱) - جب ۱ + جب ۱۲
 = جم ۱ + جم ۱۲ - (۱ - جب ۱) - ۲ جب ۱ + جم ۱ + جب ۱۲

اس لئے $ج ۳ = ۳ ج ۲ - ۱ ج ۱$ (۲)

$$\begin{aligned} \text{نیز} \quad \frac{۱ ج ۲ + ۱ ج ۱}{۱ ج ۲} = \frac{۱ ج ۳}{۱ ج ۲} \\ \frac{۱ ج ۲ + ۱ ج ۱}{۱ ج ۲} = \frac{۱ ج ۳}{۱ ج ۲} \end{aligned}$$

$$\frac{۱ ج ۲}{۱ ج ۲} \times \frac{۱ ج ۱}{۱ ج ۲}$$

$$\frac{۱ ج ۲ + (۱ ج ۱)}{۱ ج ۲} = \frac{۱ ج ۳}{۱ ج ۲}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{۱ ج ۳}{۱ ج ۲} = \frac{۱ ج ۳}{۱ ج ۲}$$

[طالب علم کو شاید مندرجہ بالا ضابطوں (۱) اور (۲) کو یاد رکھنے میں وقت ہو، ان صورتوں میں کچھ مشابہت ہے مگر ترتیب علامات میں اختلاف ہے اگر کسی قسم کا شک ہو تو طالب علم کو ان ضابطوں کی خاص صورتوں کے لئے تصدیق کر لینی چاہیئے مثلاً صورت (۱) میں فرض کر دو کہ $۱ = ۳$ اور (۲) میں $۱ = ۲$]

۱۱۳ - دفعہ گزشتہ کے موافق عمل کرنے سے طہ کے کسی اعلیٰ صنف کی مثلثی نسبتیں طہ کی نسبتوں کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہیں مگر یہ طریقہ طولانی اور پریشان کن ہو گا آگے چل کر آئندہ باب میں اس سے اچھی ترکیبیں دی جائیں گی۔

تمثیلاً فرض کرو کہ حجم ۵ طہ کو حجم طہ کی رقوم میں بیان کرنا مطلوب ہے

$$\text{حجم ۵ طہ} = \text{حجم (۳ طہ + ۲ طہ)}$$

$$= \text{حجم ۳ طہ حجم ۲ طہ} - \text{جب ۳ طہ جب ۲ طہ}$$

$$= (\text{۳ حجم طہ} - \text{۳ حجم طہ}) (\text{۲ حجم طہ} - ۱)$$

$$- (\text{۳ حجم طہ} - \text{۳ حجم طہ}) \times (\text{۲ حجم طہ} - ۱)$$

$$= (\text{۸ حجم طہ} - ۱۰ حجم طہ + ۳ حجم طہ)$$

$$- ۲ حجم طہ \times \text{جب ۳ طہ} (\text{۳} - \text{۳ حجم طہ})$$

$$= (\text{۸ حجم طہ} - ۱۰ حجم طہ + ۳ حجم طہ)$$

$$- ۲ حجم طہ (۱ - \text{حجم طہ}) (\text{۳ حجم طہ} - ۱)$$

$$= (\text{۸ حجم طہ} - ۱۰ حجم طہ + ۳ حجم طہ)$$

$$- ۲ حجم طہ (\text{۵ حجم طہ} - \text{۳ حجم طہ} - ۱)$$

$$= ۱۶ حجم طہ - ۲۰ حجم طہ + ۵ حجم طہ$$

امثلہ نمبری ۱۷

۱۔ جب ۲ عدہ کی قیمت دریافت کرو جبکہ

$$(۱) \text{ حجم عدہ} = \frac{۳}{۵} (۲) \text{ جب عدہ} = \frac{۱۲}{۱۳} \text{ اور } (۳) \text{ مس عدہ} = \frac{۱۶}{۱۳}$$

۲۔ حجم ۲ عدہ کی قیمت دریافت کرو جبکہ

$$(۱) \text{ حجم عدہ} = \frac{۱۵}{۱۲} (۲) \text{ جب عدہ} = \frac{۲۷}{۵} \text{ اور } (۳) \text{ مس عدہ} = \frac{۲}{۱۳}$$

ہر ایک صورت میں ترسیم اور صحیح پائیش سے نقدیق کرو

۳۔ اگر مس طہ = $\frac{۱}{۱}$ تو لا حجم ۲ طہ + جب ۲ طہ کی قیمت دریافت کرنا ثابت کرو کہ

- ۳- جیب ۱۲ = مس ۱ - ۵ - جیب ۱۲ = مم ۱ - ۱ - جم ۱۲
- ۶- ۱ - جم ۱۲ = مس ۱۲ - ۷ - مس ۱ + مم ۱ = ۲ قم ۱۲
- ۸- مس ۱ - مم ۱ = ۲ مم ۱۲ - ۹ - قم ۱۲ + مم ۱۲ = مم ۱
- ۱۰- ۱ - جم ۱ + جم ۱ - جم (۱ + ب) = مس ۱/۲ مم ۱/۲ ب
۱ + جم ۱ - جم ۱ - جم (۱ + ب)
- ۱۱- $\frac{\text{جم ۱}}{\text{جیب ۱}} = \text{مس } (۲۵ - ۱) \pm \frac{۱}{۴}$
- ۱۲- $\frac{\text{مس ۱۸}}{\text{مس ۱۲}} = \frac{\text{قط ۱۸ - ۱}}{\text{قط ۱۲ - ۱}}$
- ۱۳- ۱ + مس ۱ (۲۵ - ۱) = قم ۱۲
۱ - مس ۱ (۲۵ - ۱)
- ۱۴- جیب ۷ + جیب ۲ = مس $\frac{۷+۲}{۲}$
جیب ۷ - جیب ۲ = مس $\frac{۷-۲}{۲}$
- ۱۵- جیب ۱ - جیب ۱ = مس (۱ + ب)
جیب ۱ جم ۱ - جیب ۱ جم ۱
- ۱۶- مس $(\frac{\pi}{۲} + ط)$ - مس $(\frac{\pi}{۲} - ط)$ = ۲ مس ۲ ط
جم ۱ + جیب ۱ - جم ۱ - جیب ۱ = ۲ مس ۲
جم ۱ - جیب ۱ - جم ۱ + جیب ۱
- ۱۸- مم (۱۵ + ۱) - مس (۱۵ - ۱) = ۲ جم ۱۲
۲ جیب ۱۲ + ۱

- ۱۹- جب ط + جب ۲ ط = مس ط ۲۰ - ۱ + جب ط - جم ط = مس ط ۲۱- ۱ + جم ط + جم ۲ ط = مس ط ۲۰ - ۱ + جب ط + جم ط = مس ط ۲۱- ۱ + جب (ن + ۱) - ۱ - جب (ن - ۱) = مس ط ۲۱- ۱ + جم (ن + ۱) + ۱ - ۲ جم ن + ۱ - جم (ن - ۱) = مس ط ۲۲- ۱ + جب (ن + ۱) + ۱ - ۲ جب ن + ۱ - جب (ن - ۱) = جم ط ۲۱- ۱ + جم (ن - ۱) - ۱ - جم (ن + ۱) = جم ط ۲۳- ۱ + جب (ن + ۱) - ۱ - جب (ن - ۱) = جم ط ۲۴- ۱ + جب (۳ + ۱) + جب (۳ + ۱) = جم ط (۱ + ۱) = جم ط ۲۵- ۱ + جب ۱۳ + جب ۱۲ - ۱ = جب ۱۳ + جم ۱۳ = جم ط ۲۶- ۱ + مس ۱۲ = (۱ + ۱۲) ق ط ۱ - ۱ ۲۷- ۱ + جم ۲ ط + ۳ جم ۲ ط = ۴ (جم ط - جب ط) ۲۸- ۱ + جم ۲ ط = ۳ (جم ط + جب ط) ۲۹- ۱ + ق ط ۱ = (۱ + ق ط ۱) = ۲ ق ط ۱ ۳۰- ۱ + ق ط ۱ = ۲ جم ۱ = ۲ جب ۱ ۳۱- ۱ + ق ط ۱ = ۲ (جم ۱ - مس ط) ۳۲- ۱ + جب ع جب (۱۰ - ع) جب (۱۰ + ع) = ۱ جب ۳ ع ۳۳- ۱ + جم ع جم (۱۰ - ع) جم (۱۰ + ع) = ۱ جم ۳ ع ۳۴- ۱ + مم ع + مم (۱۰ + ع) - مم (۱۰ - ع) = ۳ مم ۳ ع

- ۳۵- حجم ۲۰ حجم ۲۰ حجم ۹۰ حجم ۸۰ = $\frac{1}{14}$
- ۳۶- جب ۲۰ جب ۲۰ جب ۹۰ جب ۸۰ = $\frac{3}{14}$
- ۳۷- حجم ۲۰ = ۱ - ۸ حجم ۲۰ + ۸ حجم ۲۰
- ۳۸- جب ۲۰ = ۲ جب ۲۰ حجم ۲۰ - ۲ حجم ۲۰ جب ۲۰
- ۳۹- حجم ۲۰ = ۳۲ حجم ۲۰ - ۳۸ حجم ۲۰ + ۱۸ حجم ۲۰
- ۴۰- مس ۳۰ مس ۲۰ مس ۱۰ = مس ۳۰ مس ۲۰ مس ۱۰
- ۴۱- $\frac{۲ \text{ حجم } ۲۰ \text{ نقطہ } ۱ + ۱}{۲ \text{ حجم } ۲۰ \text{ نقطہ } ۱} = (۲ \text{ حجم } ۲۰ \text{ نقطہ } ۱ - ۱) (۲ \text{ حجم } ۲۰ \text{ نقطہ } ۱ - ۱) (۲ \text{ حجم } ۲۰ \text{ نقطہ } ۱ - ۱)$
- (۲ حجم ۲۰ نقطہ ۱ - ۱).....

کسری زاوے

۱۱۵- چونکہ دفعہ ۱۱۱ کے تعلقات کی تمام قیمتوں کے لئے درست ہیں اس لئے اگر ہم $\frac{1}{p}$ کی بجائے $\frac{1}{p}$ اور اس لئے $\frac{1}{p}$ کی بجائے $\frac{1}{p} \times 2$ یعنی ۱ رکھیں تو بھی وہ درست رہیں گے اس طرح سے ہمیں ذیل کے ارتباط حاصل ہونگے۔

(۱) جب ۲ = ۲ جب $\frac{1}{p}$ حجم $\frac{1}{p}$

حجم ۱ = حجم $\frac{1}{p}$ - جب $\frac{1}{p}$

(۲) $۲ \text{ حجم } \frac{1}{p} - ۱ = ۱ - ۲ \text{ جب } \frac{1}{p}$

(۳) مس ۱ = $\frac{۲ \text{ مس } \frac{1}{p}}{۱ - ۲ \text{ مس } \frac{1}{p}}$ اور

(۱) سے نیز ہمیں حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \text{جب } 1 &= 2 \text{ جب } \frac{1}{p} \text{ جم } \frac{1}{p} \\ \text{جم } \frac{1}{p} + \text{جب } \frac{1}{p} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \text{ مس } \frac{1}{p} \text{ شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں کو جم } \frac{1}{p} \text{ پر تقسیم کرنے سے}}{1 + \text{مس } \frac{1}{p}}$$

$$\begin{aligned} \text{جم } 1 &= \frac{\text{جم } \frac{1}{p} - \text{جب } \frac{1}{p}}{\text{جم } \frac{1}{p} + \text{جب } \frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - \text{مس } \frac{1}{p}}{1 + \text{مس } \frac{1}{p}}$$

۱۱۴۔ زاویہ $\frac{1}{p}$ کی مثلثی نسبتوں کو جم ۱ کی رقوم میں بیان کر دینے کے لئے مساوات (۲) کے مطابق

$$\text{جم } 1 = 2 - \text{جب } \frac{1}{p}$$

$$\text{یعنی } 2 \text{ جب } \frac{1}{p} = 1 - \text{جم } 1$$

$$\text{اور اس لئے جب } \frac{1}{p} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{جم } 1}{2}} \quad (۱)$$

$$\text{نیز } \text{جم } 1 = 2 - \text{جم } \frac{1}{p}$$

$$\text{یعنی } 2 \text{ جم } \frac{1}{p} = 1 + \text{جم } 1$$

(۲) اور اس لئے حجم $\frac{1}{4} = \pm \sqrt{1 + \text{جم } 1}$

(۳) اس لئے مس $\frac{1}{4} = \frac{\text{جب } \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \pm \sqrt{1 + \text{جم } 1}$

۱۱۷- مندرجہ بالا مضابطوں میں سے ہر ایک میں ایک مشتبه علامت ہے، کسی خاص صورت میں مناسب علامت اس طرح معلوم ہو سکتی ہے، دیکھو اشلہ ذیل

مثال ۱- معلوم ہے جم $25 = \frac{1}{4}$ ، جب $\frac{1}{4}$ اور جم $\frac{1}{4}$ کی قیمتیں دریافت کرو۔

اگر دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) میں ۱ برابر 25 رکھیں تو حاصل ہوگا۔

$$\text{جب } \frac{1}{4} = 25 = \pm \sqrt{1 + \text{جم } 25} = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}}$$

$$= \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

اب جب $\frac{1}{4}$ لازماً مثبت ہے اس لئے اوپر کی علامت یعنی چاہیے

$$\text{اس لئے جب } \frac{1}{4} = 25 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{اسی طرح سے } \text{جم } \frac{1}{4} = 25 = \pm \sqrt{1 + \text{جم } 25} = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}}$$

$$= \pm \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

جم $\frac{1}{4}$ مثبت ہے۔

نیز

مثال ۲۔ اگر جم $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ تو جب ۱۶۵ اور جم ۱۶۵ کی قیمتیں دریافت کرو مساوات (۱) سے حاصل ہوگا۔

$$\text{جب } 165 = \sqrt{2} - 1 \text{ جم } 0.707 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$\text{نیز جم } 165 = \sqrt{2} + 1 \text{ جم } 0.707 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

اب زاویہ ۱۶۵، ۹۰ اور ۱۸۰ کے درمیان واقع ہے یعنی بوجیب دفعہ ۵۸ اس کی جیب مثبت ہے اور جیب انعام منفی

$$\text{اس لئے جب } 165 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$\text{اور جم } 165 = - \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

اوپر کی مثالوں سے ظاہر ہے کہ جب زاویہ ۱ اور اس کی جیب انعام دونوں معلوم ہوں تو زاویہ ۱/۴ کی مثلثی نسبتیں بغیر مشتبہ علامت کے معلوم ہو سکتی ہیں لیکن جب صرف جم ۱ معلوم ہو تو جب ۱/۴ اور جم ۱/۴ کو دریافت کرنے میں ہمیشہ مشتبہ علامات واقع ہوں گی اس اشتباہ کی وجہ دفعہ ذیل میں مندرج ہے

۱۱۸- جب حجم $\frac{1}{4}$ اور جب $\frac{1}{4}$ کو حجم ۱ کی رقوم میں درپٹ کرتے ہیں تو معلوم کرو کہ جواب میں مثبت علامت کیوں واقع ہوتی ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ن کوئی صحیح عدد ہو تو
 حجم ۱ = حجم (۲ ن ± ۱) = ک (فرض کرو)
 اس لئے ظاہر ہے کہ جس ضابطے سے ہم کو $\frac{1}{4}$ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اسی ضابطے سے $\frac{1}{4}$ ن ± ۱ کی جیب اقسام بھی حاصل ہوگی۔

$$\text{اب} \quad \text{جیم} \quad \frac{1}{4} \text{ ن} \pm 1 = \text{جیم} (ن \pm 1) \quad \frac{1}{4}$$

$$= \text{جیم} \text{ ن} \pm \frac{1}{4} = \text{جیب} \text{ ن} \pm \frac{1}{4}$$

$$= \text{جیم} \text{ ن} \pm \frac{1}{4} = \text{جیم} \frac{1}{4}$$

جہاں مثبت علامت یعنی چاہئے اگر ن جفت ہو اور منفی

اگر ن طاق ہو

اسی طرح جس ضابطے سے ہم کو جب $\frac{1}{4}$ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے۔ اسی صورت سے ضرور ہے کہ $\frac{1}{4}$ ن ± ۱ کی جیب بھی حاصل ہو۔

$$\text{نیز} \quad \text{جب} \quad \frac{1}{4} \text{ ن} \pm 1 = \text{جب} (ن \pm 1) \quad \frac{1}{4}$$

$$= \text{جیب} \text{ ن} \pm \frac{1}{4} = \text{جیم} \text{ ن} \pm \frac{1}{4}$$

$$= \pm \text{جم} \text{ن} \text{۲۱ جب } \frac{1}{4} = \pm \text{جب } \frac{1}{4}$$

پس معلوم ہوا کہ ہر ایک صورت میں ہمیں جم $\frac{1}{4}$ اور جب $\frac{1}{4}$ کی دو قیمتیں ملنی چاہئیں اور یہی تعداد دفعہ ۱۱۴ کے ضابطوں سے حاصل ہوتی ہے۔

[طالب علم اس دفعہ کی ہندسی توضیح زوایا $\frac{1}{4} \pm \text{ن} \text{۲۱}$ یعنی $\frac{1}{4} \pm \text{ن}$ کو شکل میں کشینے سے کر سکتا ہے، ان زاویوں کو احاطہ کرنے والے خط کے چار مقامات ہونگے ان میں سے دو مقام خط ابتدائی کی مثبت سمت سے زاوے $\frac{1}{4}$ اور $-\frac{1}{4}$ بنائیں گے اور دو مقام خط ابتدائی کی سمت منفیہ سے زاوے $\frac{1}{4}$ اور $-\frac{1}{4}$ بنائیں گے، شکل سے ظاہر ہوگا کہ جم $\frac{1}{4}$ کی دو قیمتیں ہیں اور ایسے ہی جب $\frac{1}{4}$ کی دو قیمتیں ہیں]

۱۱۹۔ زاویہ $\frac{1}{4}$ کی مثلثی نسبتوں کو جب ۱ کی رقوم میں بیان کرو۔

دفعہ ۱۱۵ کی مساوات (۱) سے

$$(۱) \quad \text{جب } \frac{1}{4} = \text{جم } \frac{1}{4} \text{ جب } ۱ \text{ -----}$$

$$(۲) \quad \text{جب } \frac{1}{4} + \text{جم } \frac{1}{4} = ۱ \text{ -----}$$

سب سے اول ان مساواتوں کو جمع کرو اور پھر (۱) کو (۲) سے تفریق کرو، تو حاصل ہوگا

$$\text{جب } \frac{1}{4} + ۳ \text{ جب } \frac{1}{4} = \text{جم } \frac{1}{4} + ۱ = \text{جب } ۱$$

$$\text{اور } \text{جب } \frac{1}{4} - ۲ \text{ جب } \frac{1}{4} = \text{جم } \frac{1}{4} + ۱ = \text{جب } ۱$$

$$\text{یعنی } (\text{جب } \frac{1}{4} + \text{جم } \frac{1}{4}) = ۱ + \text{جب } ۱$$

$$\text{اور } \left(\text{جب } \frac{1}{p} - \text{جم } \frac{1}{p} \right)^2 = 1 - \text{جب } 1$$

$$\text{پس } \text{جب } \frac{1}{p} + \text{جم } \frac{1}{p} = \pm 1 + \text{جب } 1 \dots\dots\dots (۳)$$

$$\text{اور } \text{جب } \frac{1}{p} - \text{جم } \frac{1}{p} = \pm 1 - \text{جب } 1 \dots\dots\dots (۴)$$

معادلات (۳) اور (۴) کو جمع کرنے اور تفریق کرنے سے

$$۲ \text{ جب } \frac{1}{p} = \pm 1 + \text{جب } 1 \pm 1 - \text{جب } 1 \dots\dots\dots (۵)$$

$$\text{اور } ۲ \text{ جم } \frac{1}{p} = \pm 1 + \text{جب } 1 \mp 1 - \text{جب } 1 \dots\dots\dots (۶)$$

نادیہ ۱/۲ کی باقی مثلثی نسبتیں آسانی حاصل ہو سکتی ہیں۔

۱۲۰۔ ضوابط (۵) اور (۶) میں دوشنبہ علامات ہیں۔
 ا مثلاً ذیل سے معلوم ہوگا کہ کسی خاص صورت میں یہ اشتباہ
 کس طرح دور ہو سکتا ہے۔

مثال ۱۔ جب ۳۰ کی قیمت ۱/۲ معلوم ہے، جب ۱۵ اور جم ۱۵ کی قیمتیں
 دریافت کرو۔

اگر ۱ = ۳۰، تو معادلات (۳) اور (۴) سے حاصل ہوگا۔

$$\text{جب } ۱۵ + \text{جم } ۱۵ = \pm 1 + \text{جب } ۳۰ = \pm \frac{31}{30}$$

$$\text{جب } ۱۵ - \text{جم } ۱۵ = \pm 1 - \text{جب } ۳۰ = \pm \frac{29}{30}$$

اب چونکہ جب ۱۵ اور جم ۱۵ دونوں مثبت ہیں اور جم ۱۵ بہ نسبت
 جب ۱۵ کے بڑی ہے اس لئے جملات جب ۱۵ + جم ۱۵ اور جب ۱۵
 جم ۱۵ بالترتیب مثبت اور منفی ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ

$$\text{جب } ۱۵ + \text{جم } ۱۵ = + \frac{31}{30}$$

$$\text{اور جب } ۱۵ - \text{جم } ۱۵ = - \frac{1}{۳۱}$$

$$\text{اس لئے جب } ۱۵ = \frac{۱-۳۱}{۳۱۲}$$

$$\text{اور جم } ۱۵ = \frac{۱+۳۱}{۳۱۲}$$

مثال ۲- اگر جب $۵۴۰ = - \frac{1}{۴}$ تو جب ۲۸۵ اور جم ۲۸۵ کی قیمتیں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ $۵۴۰ = ۱$ تو حاصل ہوگا

$$\text{جب } ۲۸۵ + \text{جم } ۲۸۵ = ۱ \pm \text{جب } ۵۴۰ = \pm \frac{1}{۳۱}$$

$$\text{اور جب } ۲۸۵ - \text{جم } ۲۸۵ = ۱ \pm \text{جب } ۵۴۰ = \pm \frac{۳۱}{۳۱}$$

شکل سے معلوم ہوگا کہ جب ۲۸۵ منفی ہے اور جم ۲۸۵ مثبت ہے

نیز زاویہ ۲۸۵ کی جیب تعداداً جیب التمام سے بڑی ہے اس لئے جملہ

جب ۲۸۵ + جم ۲۸۵ منفی ہے اور جب ۲۸۵ - جم ۲۸۵ بھی منفی ہے

$$\therefore \text{جب } ۲۸۵ + \text{جم } ۲۸۵ = - \frac{1}{۳۱}$$

$$\text{اور جب } ۲۸۵ - \text{جم } ۲۸۵ = - \frac{۳۱}{۳۱}$$

$$\text{اس لئے جب } ۲۸۵ = \frac{۱+۳۱}{۳۱۲}$$

$$\text{اور جم } ۲۸۵ = \frac{۱-۳۱}{۳۱۲}$$

۱۲۱- جب ہم جم $\frac{1}{۴}$ اور جب $\frac{1}{۴}$ کو جب لا کی رقوم میں بیان

کرتے ہیں تو معلوم کرو کہ جواب میں مثبتہ علامت کیوں واقع ہوتی ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر ن کوئی صحیح عدد ہو تو

جب $n + (-1)^n = ۱$ جب لا = ک (فرض کرو) (دفعہ ۸۸)

اس سے ظاہر ہے کہ جس منابطے سے پہلو جب $\frac{1}{p}$ کی قیمت ک
کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اُسی منابطے سے $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ کی
جیب کی قیمت بھی حاصل ہوگی

صورت اول۔ فرض کرو کہ n جفت ہے اور m کے برابر ہے تو جب $\frac{n}{2} + \frac{n}{2}(1 - \frac{1}{p}) = \text{جب } (m + \frac{1}{p})$

$$= \text{جب م} \frac{1}{2} \text{ حم} \frac{1}{2} + \text{حم م} \frac{1}{2} \text{ جب} \frac{1}{2} = \text{حم م} \frac{1}{2} \text{ جب} \frac{1}{2}$$

= جب $\frac{1}{p}$ جہاں علامت مثبت یعنی چاہئے اگر م جنت ہو

اور مستغنی اگر طاق ہو

فرض کرو کہ ن طاق ہے اور = ۲ع + اتبا صورت دوم۔

$$= \text{جیب } \frac{1}{2} \pi + \text{جم } \frac{1}{2} \pi \text{ جب } \frac{1}{2} \pi$$

$\text{جہم } \frac{1}{2} = \text{جہم } \frac{1}{4} + \text{جہم } \frac{1}{4}$ اس میں علامت مثبت ہو اگر ع جفت ہو اور منفی اگر ع طاق ہو

پس معلوم ہوا کہ جس ضابطے سے ہر کو جب $\frac{1}{p}$ کی قیمت جب اس کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اسی ضابطے سے علاوہ اس کے جب $\frac{1}{p}$ ، $\frac{1}{q}$ ، $\frac{1}{r}$ ، $\frac{1}{s}$ ، $\frac{1}{t}$ ، $\frac{1}{u}$ ، $\frac{1}{v}$ ، $\frac{1}{w}$ ، $\frac{1}{x}$ ، $\frac{1}{y}$ ، $\frac{1}{z}$ کی قیمتیں یعنی کل چار قیمتیں حاصل ہونی چاہئیں۔ اور ضوابط دفعہ ۱۱۹ میں مشتبہ علامات کے تمام مختلف اجتماع لینے سے قیمتوں کی یہی تعداد حاصل ہوتی ہے

اسی قسم کے عمل سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر حجم ۱/۲ کو جب ۱/۳ کی رقوم میں دریافت کیا جائے تو چار قیمتیں حاصل ہونگی۔

[اگر ایک شکل ہندسیہ میں زاوے $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ یعنی $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ (۱-۲) زاوے $\frac{1}{2}$ اس صورت میں کھینچے جائیں جہاں $\frac{1}{2}$ زاویہ قائمہ سے کم ہو تو معلوم ہوگا کہ احاطہ کرنے والے خط کے چار مقامات ہیں، ان میں سے دو ریمج اول میں خط ابتدائی سے زاوے $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ بنا تے ہیں اور دو ریمج سوم میں خط ابتدائی کی منہی سمت سے زاوے $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ بنا تے ہیں، شکل سے ظاہر ہوگا کہ ہمیں چار قیمتیں جب ۱/۲ کی اور چار قیمتیں حجم ۱/۲ کی حاصل ہونی چاہئیں اور زاویہ ۱/۲ کی باقی قیمتوں کی بھی کیفیت سے ۱۲۲۔ کسی صورت عامہ میں ہم دفعہ ۱۱۹ کے ارتباطات (۳) اور (۴) کی مشتبہ علامات اس طرح دور کر سکتے ہیں۔

$$\text{جب } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \text{ جب } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \text{ جب } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \text{ حجم } \frac{1}{2}$$

$$= \left[\text{جب } \frac{1}{2} \text{ حجم } \frac{1}{2} + \text{جب } \frac{1}{3} \text{ حجم } \frac{1}{2} \right]$$

$$= \text{جب } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

اور $\frac{1}{2}$ جب $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$ مثبت ہوگا اگر $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ کے درمیان واقع ہو

یعنی اگر $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{4}$ کے درمیان واقع ہو

اسلئے جملہ جب $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ مثبت ہوگا اگر زاویہ $\frac{1}{2}$

۲۲ - ۲۲ - ۲۲ اور ۲۲ + ۲۲ کے درمیان واقع ہو
ورنہ یہ منفی ہوگا۔

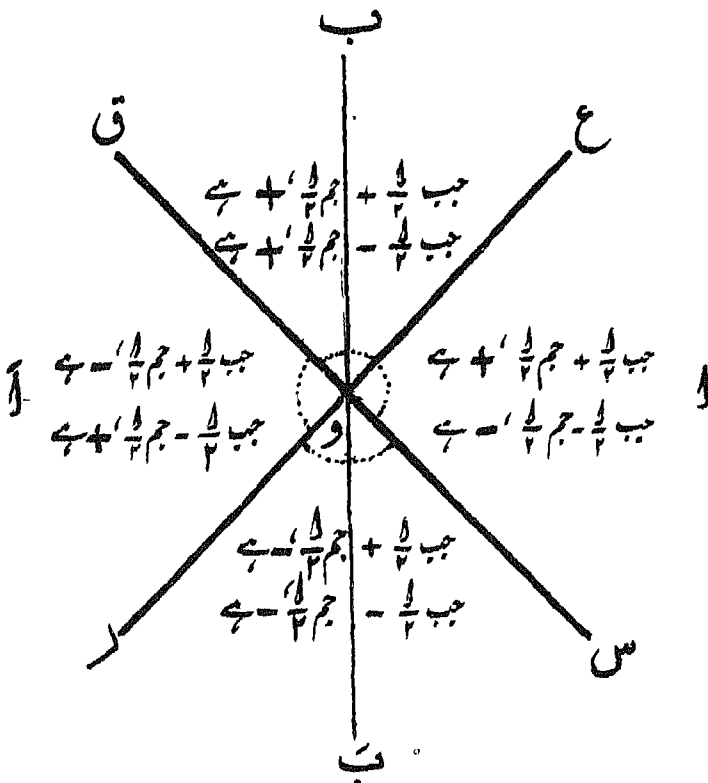
اور اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جب } \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = ۲۲ \text{ جب } \left(\frac{۲۲}{۲} - \frac{1}{4} \right)$$

اس لئے جب $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$ جم مثبت ہوگا اگر زاویہ $\left(\frac{۲۲}{۲} - \frac{1}{4} \right)$

۲۲ + ۲۲ اور ۲۲ + ۲۲ کے درمیان واقع ہو، یعنی اگر زاویہ $\frac{1}{4} + ۲۲ + \frac{۲۲}{۲}$
اور ۲۲ + ۲۲ کے درمیان واقع ہو ورنہ یہ منفی ہوگا

اس دفعہ کے نتائج کی توضیح تریسہ طور پر شکل ذیل میں کی گئی ہے



وہ خط ابتدائی ہے اور خطوط 'و' 'ق' 'و' 'س' بالترتیب
ربع اول، دوم، سوم، چہارم کے زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں۔
مثال عددی۔ اگر $\frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4} = -$ م ۱ + جب ۱ - م ۱ - جب ۱ - تو
دریافت کرو کہ زاویہ $\frac{1}{4}$ کو کن حدود کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔
اس صورت میں دفعہ ۱۱۹ کے ضابطے لازماً یہ ہونے چاہئیں۔

$$(۱) \text{ جب } \frac{1}{4} + \text{جم } \frac{1}{4} = - \text{ م } ۱ + \text{جب } ۱ - \text{-----} (۱)$$

$$(۲) \text{ جب } \frac{1}{4} - \text{جم } \frac{1}{4} = - \text{ م } ۱ - \text{جب } ۱ - \text{-----} (۲)$$

کیونکہ ان دونوں ضابطوں کو جمع کرنے سے ضابطہ معلومہ حاصل ہوتا ہے
مساوات (۱) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ جو خط زاویہ $\frac{1}{4}$ کا احاطہ کرتا ہے اسکو
خطوط 'و' اور 'و' کے درمیان یا 'و' اور 'س' کے درمیان واقع
ہونا چاہیے اور مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ خط دائرہ کو خطوط 'و' اور
'س' یا 'و' اور 'و' کے درمیان واقع ہونا چاہیے۔

اور یہ دونوں شرائط پوری ہوتی ہیں جب خط دائرہ 'و' اور 'س' کے
درمیان واقع ہو یعنی جب زاویہ $\frac{1}{4}$ ،

$$۲ \text{ ن } ۳ - ۳ \text{ ن } ۲ \text{ اور } ۲ \text{ ن } ۳ - ۳ \text{ ن } ۲ \text{ کے درمیان واقع ہو}$$

۱۲۳ - زاویہ $\frac{1}{4}$ کی مثلثی نسبتوں کو مس ۱ کی رقوم میں
بیان کرو۔

مساوات (۳) دفعہ ۱۱۵ سے

$$\begin{aligned} \text{مس } \frac{1}{4} \\ \text{مس } ۱ = \text{مس } \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$1 - \text{مس } \frac{1}{2} = \text{مس } \frac{1}{4} = \text{مس } \frac{1}{8}$$

$$\text{یعنی } 1 = \text{مس } \frac{1}{2} + \text{مس } \frac{1}{4} = \text{مس } \frac{1}{8}$$

طرفین پر مس ۱ زیادہ کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{مس } \frac{1}{2} + \text{مس } \frac{1}{4} + \text{مس } \frac{1}{8} = 1 + 1 = 2 = \frac{1}{\text{مس } \frac{1}{8}} + 1 = \frac{1 + \text{مس } \frac{1}{8}}{\text{مس } \frac{1}{8}}$$

$$\text{مس } \frac{1}{2} + \text{مس } \frac{1}{4} = 2 - \text{مس } \frac{1}{8}$$

$$\text{مس } \frac{1}{2} = 2 - \text{مس } \frac{1}{8} - \text{مس } \frac{1}{4} = 1 - \text{مس } \frac{1}{8} \quad (1)$$

۱۲۴۔ مساوات (۱) کی مشتبہ علامت صرف اُس صورت میں دور ہو سکتی ہے جب ہمیں ۱ کی مقدار کے متعلق کچھ معلوم ہو۔
مثال۔ اگر مس ۱۵ = ۲ - ۳ تو مس ۱/۲ = دریافت کرو
دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) فرض کرو کہ ۱ = ۱۵

$$\text{مس } \frac{1}{2} = 2 - \frac{1 - (3 \times 15 - 2) + 1}{3 \times 15 - 2}$$

$$= \frac{1 - (3 \times 15 - 2) + 1}{3 \times 15 - 2} \quad (1)$$

اب چونکہ مس ۱/۲ مثبت ہے اسلئے ہمیں اوپر کی علامت لینی چاہیئے۔

$$\text{اس لئے مس } \frac{1}{2} = \frac{1 - (3 \times 15 - 2) + 1}{3 \times 15 - 2}$$

$$(۳۲ + ۲)(۱ - ۲۲ - ۶۲) =$$

$$(۱ - ۲۲)(۲۲ - ۳۲) = ۲ - ۲۲ + ۳۲ - ۶۲ =$$

چونکہ مس ۱۵ = مس ۱۹۵ اس لئے جس مساوات سے ہم کو مس ۱۵ کی قیمت مس ۱۵ کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اُسی مساوات سے ہم کو مس ۱۹۵ کی قیمت مس ۱۹۵ کی رقوم میں حاصل ہونے کی توقع رکھنی چاہیئے، دراصل جو قیمت مساوات (۱) میں علامت جذر کے ماقبل منفی علامت لینے سے حاصل ہوتی ہے وہ مس ۱۹۵/۴ کی قیمت ہے

$$\text{لہذا مس } ۱۹۵ = \frac{۱ - ۳۲ - ۸۲}{۳۲ - ۲}$$

$$= \frac{۱ - (۲۲ - ۶۲)}{۳۲ - ۲} = \frac{(۳۲ + ۲)(۱ - ۲۲ + ۶۲)}{۳۲ - ۲}$$

$$= \frac{(۱ + ۲۲)(۲۲ + ۳۲)}{۳۲ - ۲}$$

$$\text{اس لئے } - \text{مم } \frac{۱}{۲} = \text{مس } \frac{۹۷}{۲}$$

$$= \frac{(۱ + ۲۲)(۲۲ + ۳۲)}{۳۲ - ۲}$$

۱۲۵- اس امر کی تحقیق کرو کہ جب ہم مس ۱/۴ کو مس ۱ کی رقوم میں دریافت کرتے ہیں تو جواب میں مشتبہ علامت کیوں واقع ہوتی ہے؟

دفعہ ۹۰ سے ہم کو معلوم ہے کہ اگر ن کوئی عدد صحیح ہو تو

$$\text{مس } (ن + ۱) = \text{مس } ۱ = ک \text{ (فرض کرو)}$$

اس سے معلوم ہوا کہ جس مساوات سے ہم کو مس ۱/۴ کی قیمت ک کی رقوم میں حاصل ہوتی ہے اُسی مساوات سے

مس ن ۱+۲ کی قیمت بھی حاصل ہونی چاہیے۔
صورت اول۔ فرض کرو کہ ن جفت ہے اور ۲ م کے
برابر ہے۔

$$\text{تب مس ن } ۱+۲ = \text{مس } ۲ \text{ م } ۱+۲$$

$$= \text{مس } (۲ \text{ م } + \frac{۱}{۲}) = \text{مس } \frac{۱}{۲} \text{ بموجب دفعہ ۹۰}$$

صورت دوم۔ فرض کرو کہ ن طاق ہے اور ۲ ع ۱+ =

$$\text{تب مس ن } ۱+۲ = \text{مس } (۱+۲ \text{ ع } ۱+۲)$$

$$= \text{مس } (۲ \text{ ع } + \frac{۱}{۲} + ۱) = \text{مس } \frac{۱+۲}{۲} \text{ (دفعہ ۹۰)}$$

$$= \text{م } \frac{۱}{۲} \text{ (دفعہ ۷۶)}$$

اس سے معلوم ہوا کہ جس ضابطے سے ہم کو مس $\frac{۱}{۲}$ کی قیمت
حاصل ہوگی اُسی ضابطے سے م $\frac{۱}{۲}$ کی قیمت بھی حاصل ہونی
چاہیے۔

اس کی توضیح دفعہ گزشتہ کی ایک مثال میں ہو چکی ہے۔

امثلہ نمبری ۱۸

۱۔ اگر جب ط = $\frac{۱}{۲}$ اور جب ق = $\frac{۱}{۲}$ تو جب (ط + ق) اور
جب (ط + ۲ ق) کی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۔ کسی زاویہ کا تماس ۳ و ۲ ہے، اس کا قاطع التمام، اس کے نصف
زاویہ کا قاطع التمام اور اس کے دو چند زاویہ کے تکملہ کا قاطع التمام دریافت کرو۔

۳۔ اگر جم عہ = $\frac{11}{41}$ اور جب یہ = $\frac{4}{5}$ تو جب $\frac{2}{3}$ عہ = $\frac{2}{3}$ اور جم $\frac{2}{3}$ عہ = $\frac{2}{3}$ کی قیمتیں دریافت کرو، دونوں زاوئے عہ اور بہ مثبت اور عاڈے ہیں۔
 ۴۔ اگر جم عہ = $\frac{3}{5}$ اور جم بہ = $\frac{4}{5}$ تو جم عہ = $\frac{2}{3}$ کی قیمت دریافت کرو دونوں زاوئے عہ اور بہ مثبت اور عاڈے ہیں۔

۵۔ معلوم ہے قط طہ = $\frac{1}{4}$ ، دریافت کرو مس طہ اور مس طہ، ترتیبی عمل سے اس کی تصدیق کرو

۶۔ اگر جم $\frac{1}{4}$ = ۲۸، تو مس $\frac{1}{4}$ کی قیمت دریافت کرو اور جواب میں مشتبہ علامت کی وجہ بیان کرو۔

۷۔ مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔ (۱) جب $\frac{1}{4}$ = ۲، جم $\frac{1}{4}$ = ۲

(۲) مس $\frac{1}{4}$ = ۲۲، مس $\frac{1}{4}$ = ۱۱

۸۔ اگر جب طہ + جب فہ = ۱ اور جم طہ + جم فہ = ۱، تو مس طہ = ۲ کی قیمت دریافت کرو۔

ثابت کرو کہ

$$۹۔ (جم عہ + جم بہ) + (جب عہ - جب بہ) = ۲، جم $\frac{2}{3}$ عہ = $\frac{2}{3}$$$

$$۱۰۔ (جم عہ + جم بہ) + (جب عہ + جب بہ) = ۲، جم $\frac{2}{3}$ عہ = $\frac{2}{3}$$$

$$۱۱۔ (جم عہ - جم بہ) + (جب عہ - جب بہ) = ۲، جب $\frac{2}{3}$ عہ = $\frac{2}{3}$$$

$$۱۲۔ جب ۱ = ۲، مس $\frac{1}{4}$ = ۱۳، جم ۱ = ۱، مس $\frac{1}{4}$ = ۱، مس $\frac{1}{4}$ = ۱$$

$$۱۳۔ قط (۲ + طہ) - قط (طہ - ۲) = ۲، قط ۲ = ۲$$

$$۱۵۔ مس (۲۵ + $\frac{1}{4}$) = ۱۸، جب ۱ = ۱، جب ۱ = ۱، قط ۱ = ۱$$

$$۱۶- \text{جب } \left(\frac{d}{v} + \frac{\pi}{\lambda}\right)^2 - \text{جب } \left(\frac{d}{v} - \frac{\pi}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{v^2} \text{ جب } d$$

$$۱۷- \text{جم } e + \text{جم } (e + 920) + \text{جم } (e - 920) = \frac{3}{4}$$

$$۱۸- \text{جم } \frac{\pi}{\lambda} + \text{جم } \frac{\pi}{\lambda} + \text{جم } \frac{\pi}{\lambda} + \text{جم } \frac{\pi}{\lambda} = \frac{3}{4}$$

$$۱۹- \text{جب } \frac{\pi}{\lambda} + \text{جب } \frac{\pi}{\lambda} + \text{جب } \frac{\pi}{\lambda} + \text{جب } \frac{\pi}{\lambda} = \frac{3}{4}$$

$$۲۰- \text{جم } 2 \text{ فہ } + \text{جب } (2 \text{ فہ} - \text{فہ}) - \text{جب } (2 \text{ فہ} + \text{فہ}) = \text{جب } (2 \text{ فہ} + 2 \text{ فہ})$$

$$۲۱- \text{مس } (2 \text{ مس} + 1) (1 - 2 \text{ مس}) = 2 \text{ مس } 3 \text{ قطا}$$

$$۲۲- (1 + \text{مس } \frac{e}{2} - \text{قط } \frac{e}{2}) (1 + \text{مس } \frac{e}{2} + \text{قط } \frac{e}{2}) = \text{جب } 2 \text{ قطا}$$

ذیل کی تین صورتوں میں علامات جذر کے ماقبل جو مناسب علامات جبریتہ لکھی جانی چاہئیں انہیں دریافت کرو۔

$$۲۳- 2 \text{ جم } \frac{d}{v} = \pm \sqrt{1 - \text{جب } d} \pm \sqrt{1 + \text{جب } d} \text{ جہاں } \frac{d}{v} = 928$$

$$۲۴- 2 \text{ جب } \frac{d}{v} = \pm \sqrt{1 - \text{جب } d} \pm \sqrt{1 + \text{جب } d} \text{ جہاں } \frac{d}{v} = \frac{119}{11}$$

$$۱۵- 2 \text{ جم } \frac{d}{v} = \pm \sqrt{1 - \text{جب } d} \pm \sqrt{1 + \text{جب } d} \text{ جہاں } \frac{d}{v} = 920$$

$$۲۶- \text{اگر } d = 920 \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$2 \text{ جب } \frac{d}{v} = - \sqrt{1 + \text{جب } d} + \sqrt{1 - \text{جب } d}$$

$$2 \text{ جم } \frac{d}{v} = - \sqrt{1 + \text{جب } d} - \sqrt{1 - \text{جب } d} \text{ اور}$$

$$۲۷- \text{اگر } d = 920 \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$2 \text{ جم } \frac{d}{v} = - \sqrt{1 + \text{جب } d} + \sqrt{1 - \text{جب } d}$$

۲۸۔ اگر $1 = 580$ تو ثابت کرو کہ

$$2 \text{ جب } \frac{1}{4} = -1 + 1 \text{ جب } 1 - 1 \text{ جب } 1$$

۲۹۔ کن حدود کے درمیان $\frac{1}{4}$ کو واقع ہونا چاہیے کہ

$$(1) 2 \text{ جب } \frac{1}{4} = 1 + 1 \text{ جب } 1 + 1 - 1 \text{ جب } 1$$

$$(2) 2 \text{ جب } \frac{1}{4} = -1 + 1 \text{ جب } 1 + 1 - 1 \text{ جب } 1$$

$$(3) 2 \text{ جب } \frac{1}{4} = 1 + 1 \text{ جب } 1 - 1 \text{ جب } 1$$

$$(4) 2 \text{ جب } \frac{1}{4} = 1 + 1 \text{ جب } 1 - 1 \text{ جب } 1$$

۳۰۔ کن حدود کے درمیان $\frac{1}{4}$ کو واقع ہونا چاہیے کہ ضابطہ

$$2 \text{ جب } \frac{1}{4} = 1 + 1 \text{ جب } 1 \neq 1 - 1 \text{ جب } 1$$

میں (۱) دونوں علامات مثبت لیجا سکیں

(۲) دونوں علامات منفی لیجا سکیں

(۳) پہلی علامت منفی ہو اور دوسری مثبت

۳۱۔ اگر n کوئی عدد صحیح ہو اور کوئی زاویہ $2n\pi - \frac{\pi}{4}$ اور $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ کے

درمیان واقع ہو تو ثابت کرو کہ اس کی جیب از روئے المجہر جیب الثمام سے کم ہوگی۔

۳۲۔ اگر جب $\frac{1}{4}$ کی قیمت مساوات

$$\text{جب } 1 = 3 \text{ جب } \frac{1}{4} - 4 \text{ جب } \frac{1}{4}$$

سے دریافت کی جائے تو ثابت کرو کہ اس کے علاوہ اسی مساوات سے بہکو

جب $\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$ اور جب $\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$ کی قیمتیں حاصل کرنے کی توقع رکھنی چاہیے

ہندسی طریق سے اس کی توضیح کرو۔

۳۳۔ اگر حجم $\frac{1}{3}$ کی قیمت مساوات

$$\text{حجم } ۱ = ۴ \text{ حجم } \frac{1}{3} - ۳ \text{ حجم } \frac{1}{3}$$

سے دریافت کی جائے تو ثابت کرو کہ علاوہ اس کے اُسی مساوات سے ہمو
حجم $۱ - ۳۲$ اور حجم $\frac{1}{3} + ۳۲$ کی قیمتیں حاصل کرنے کی
توقع رکھنی چاہیے۔

ہندسی طریق سے اس کی توضیح کرو

۱۲۶۔ اس باب کے عنا بطوں کے استعمال سے اب ہم چند

مشہور زاویوں کی مثلثی نسبتیں دریافت کر سکتے ہیں۔

ناویہ ۱۸ کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو

فرض کرو کہ طہ = ۱۸ پس ۲ طہ = ۳۶ اور ۳ طہ = ۵۴

نیز ۲ طہ = ۹۰ - ۳ طہ

اس لئے جب ۲ طہ = جب (۹۰ - ۳ طہ) = حجم ۳ طہ

۲ جب ۲ طہ = ۴ حجم ۲ طہ - ۳ حجم طہ (دفعات ۱۱۱ اور ۱۱۳)

اس سے معلوم ہوا کہ حجم طہ = ۰ جس سے طہ = ۹۰

یا ۲ جب طہ = ۴ حجم ۲ طہ - ۳ = ۱ - ۴ جب ۲ طہ

۴ جب ۲ طہ + ۲ جب طہ = ۱

اس مساوات درجہ دوم کو حل کرنے سے حاصل ہوگا

جب طہ = $\pm \sqrt{۵} - ۱$

حاصل ہو سکتی ہیں۔

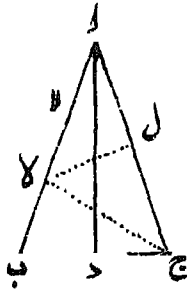
بہوجب اقلیدس م ۶ ش ۱۰ ایک مثلث Δ ب ج بناؤ یعنی مثلث کے زاویوں ب اور ج میں سے ہر ایک زاویہ Δ کا دو چنڈ ہو۔ تب

$$180^\circ = \Delta + \Delta + \Delta = 3\Delta$$

اس لئے $36^\circ = \Delta$

پس اگر ب ج پر عمود Δ نکالا جائے تو

$$\Delta = 18^\circ$$



اب اقلیدس کے عمل سے ہم جانتے ہیں

کہ ب ج برابر Δ کے ہے جہاں Δ ایسا

نقطہ Δ پر ہے کہ

$$\Delta \times \Delta = \Delta (\Delta)$$

فرض کرو کہ $\Delta = \Delta$ اور $\Delta = \Delta$

اوپر کے ربط سے حاصل ہوگا

$$\Delta = (\Delta - \Delta)$$

$$\Delta + \Delta = \Delta$$

$$\Delta = \Delta - 1$$

$$\text{اس لئے جب } 18^\circ = \Delta \text{ ب ج } \Delta = \frac{\Delta}{\Delta} \times \frac{1}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta} \times \frac{1}{\Delta}$$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}$$

نیز بہوجب اقلیدس م ۶ ش ۱۰ Δ اور Δ ج باہم مساوی ہیں۔

اس لئے اگر اوج پر عمود لال نکالا جائے تو اوج کی تنصیف نقطہ ل پر ہوگی۔

$$\text{اس لئے حجم } ۳۶ = \frac{۱۸}{۱۸} = \frac{۱}{۲} \div ۱۸ = \frac{۱}{۱۸}$$

$$\frac{۱-۵۲}{۳} = \frac{۱-۵۲}{(۱+۵۲)(۱-۵۲)} =$$

۱۲۹۔ زاویہ ۹۰ کی مثلثی نسبتیں دریافت کرو
چونکہ جب ۹۰ اور حجم ۹۰ دونوں مثبت ہیں اسلئے ربط (۳) دفعہ ۱۱۹ سے حاصل ہوگا۔

$$\text{جب } ۹۰ + ۱۲ = ۹۰ \text{ حجم} + ۱۲ = \text{جب } ۹۰$$

$$(۱) \quad \frac{۱۲+۵۲}{۲} = \frac{۱-۵۲}{۳} + ۱۲ =$$

نیز چونکہ حجم ۹۰ مقدار میں جب ۹۰ سے بڑا ہے (دفعہ ۱۵۹) اسلئے جب ۹۰ - ۹۰ = حجم ۹۰ منفی ہے لہذا ربط ۳ دفعہ (۱۱۹) سے حاصل ہوگا

$$\text{جب } ۹۰ - ۱۲ = ۹۰ \text{ حجم} - ۱۲ = \text{جب } ۹۰$$

$$- \frac{۱-۵۲}{۳} - ۱۲ =$$

$$(۲) \quad \frac{۵۲-۱۲}{۲} =$$

(۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے

$$\text{جب } ۹۰ = \frac{۵۲-۱۲}{۲} - \frac{۱-۵۲}{۳}$$

نمبر (۲) کو (۱) سے تفریق کرنے سے

$$\overline{a}^2 - \overline{a} + \overline{a} + \overline{a}^2 = 9$$

اب زاویہ ۹۰ کے باقی جملے دریافت ہو سکتے ہیں
نیز چونکہ ۸۱ زاویہ ۹۰ کا متمم ہے اسلئے دفعہ ۵ کی مدد سے ۸۱
کی مشقی نسبتیں معلوم ہو سکتی ہیں۔

۱۹. امثلہ نمبری

ثبات کروک

۱- جب ۲۲٪ - جب ۴۰٪ = ۱۵٪

۲- $ج^۲۸ - ج^۱۲ = ۱ + ۵۱$

۳۳۔ حجم ۱۲ + حجم ۹۰ + حجم ۸۴ = حجم ۲۴ + حجم ۴۸ عمل تزیینی سے اس کی تصدیق کرو۔

م- جیب $\frac{\pi}{5}$ جیب $\frac{\pi^2}{5}$ جیب $\frac{\pi^3}{5}$ جیب $\frac{\pi^4}{5} = \frac{5}{14}$

۵- جب $\frac{\pi}{10}$ + جب $\frac{\pi}{10}$ = $\frac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{2} = \frac{113}{10} \text{ جیب } \frac{11}{10} \text{ جیب } - 4$$

۱ = ۲۸ مس ۴۴ مس ۴۲ مس ۴ مس

$$\frac{1}{4} = \frac{\pi^4}{15} \zeta \frac{\pi^4}{15} \zeta \frac{\pi^5}{15} \zeta \frac{\pi^2}{15} \zeta \frac{\pi^3}{15} \zeta \frac{\pi^2}{15} \zeta \frac{\pi}{15} \zeta \quad -A$$

$$1 = \frac{\pi 1^2}{15} \text{ جم } \frac{\pi 8}{15} \text{ جم } \frac{\pi 9}{15} \text{ جم } \frac{\pi 2}{15} \text{ جم } 14 - 4$$

۱۰۔ ایک دائرہ کے دو متوازی وتر مرکز کی ایک ہی جانب میں واقع ہیں اور اُن کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاوے ۷۲° اور ۱۴۴° بالترتیب بنتے ہیں، ثابت کرو کہ وتروں کے درمیان عمودی فاصلہ دائرہ کے نصف قطر کے برابر ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ کسی دائرہ کا ایک وتر جس کے محاذی ۱۰۸° کا زاویہ مرکز پر بنتا ہے دو ایسے وتروں کے مجموعہ کے برابر ہوگا جن کے متقابل مرکز پر زاوے ۳۶° اور ۶۰° بنتے ہیں۔

۱۲۔ ایک ایسا زاویہ بناؤ جس کی جیب التمام اُس کے مماس کے برابر ہو۔
۱۳۔ مساوات ذیل کو حل کرو۔

$$\text{جب } ۵^\circ \text{ جم } ۳^\circ = \text{جب } ۹^\circ \text{ جم } ۷^\circ$$

باب نہم

متاثلات اور مثلثی معاوالات

۱۳۰۔ ضوابط دفعہ ۹۴ اور ۹۶ کی مدد سے دو سے زیادہ زاویوں کے حاصل جمع کی مثلثی نسبتیں حاصل ہو سکتی ہیں، مثلاً

$$\text{جب } (ا + ب + ج) = \text{جب } (ا + ب) \text{ جم} + \text{جم} (ا + ب) \text{ جب ج}$$

$$= (\text{جب } ا \text{ جم} ب + \text{جم } ا \text{ جب ب}) \text{ جم ج}$$

$$+ (\text{جم } ا \text{ جم} ب - \text{جب } ا \text{ جب ب}) \text{ جب ج}$$

$$= \text{جب } ا \text{ جم} ب \text{ جم ج} + \text{جم } ا \text{ جب ب} \text{ جم ج}$$

$$+ \text{جم } ا \text{ جم} ب \text{ جب ج} - \text{جب } ا \text{ جب ب} \text{ جب ج}$$

اسی طرح سے

$$\text{جم } (ا + ب + ج) = \text{جم } (ا + ب) \text{ جم ج} - \text{جب } (ا + ب) \text{ جب ج}$$

$$= (\text{جم } ا \text{ جم} ب - \text{جب } ا \text{ جب ب}) \text{ جم ج}$$

$$- (\text{جب } ا \text{ جم} ب + \text{جم } ا \text{ جب ب}) \text{ جب ج}$$

$$= \text{جم } ا \text{ جم} ب \text{ جم ج} - \text{جم } ا \text{ جب ب} \text{ جب ج} - \text{جب } ا \text{ جم} ب \text{ جب ج}$$

$$- \text{جب } ا \text{ جب ب} \text{ جم ج}$$

$$\text{یز مس } (ا + ب + ج) = \text{مس } (ا + ب) + \text{مس ج}$$

$$- \text{مس } (ا + ب) \text{ مس ج}$$

$$= \frac{\text{مس} + \text{مس} + \text{مس}}{\text{مس} + \text{مس} + \text{مس}}$$

$$1 - \frac{\text{مس} + \text{مس} + \text{مس}}{\text{مس} + \text{مس} + \text{مس}}$$

$$= \frac{\text{مس} + \text{مس} + \text{مس}}{\text{مس} + \text{مس} + \text{مس}}$$

۱۱۔ دفعہ گذشتہ کا آخری ضابطہ ایک ایسے مسئلہ عامہ کی خاص صورت ہے جس کی مدد سے زاویوں کی کسی تعداد کے مجموعہ کا ماس خود اُن زاویوں کے مماسوں کی رقوم میں دریافت ہو سکتا ہے مسئلہ مذکورہ یہ ہے

$$\text{مس} (\text{ا} + \text{ا} + \text{ا} + \dots + \text{ا} + \text{ا})$$

$$= \frac{\text{ص} - \text{ص} + \text{ص} - \text{ص} + \dots + \text{ص} - \text{ص}}{\text{ا} - \text{ص} + \text{ص} - \text{ص} + \dots + \text{ص} - \text{ص}}$$

جہاں $\text{ص} = \text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \dots + \text{مس} + \text{مس}$
 = مختلف زاویوں کے مماسوں کا مجموعہ

$$\text{ص} = \text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \dots + \text{مس} + \text{مس}$$

= دو دو مماسوں کے حاصل ضرب کا مجموعہ

$$\text{ص} = \text{مس} + \text{مس} + \text{مس} + \dots + \text{مس} + \text{مس}$$

اور علی بن القیاس

تب مس (1, 2, 3, ... + 1)

$$= \text{مس} (ل_1 + ل_2 + ل_3 + \dots + ل_n) + \text{مس} ل_n +$$

ص - ص + ص - ص + ...
+ مس لان +

فرض کرو کہ مس'، مس'، مس' مس' +۱ کو
ہم بالترتیب م'، م'، م' م' +۱ سے تعبیر کرتے ہیں

$$(v_1 - v_2 + v_3 - \dots) + (v_1 + v_2 - v_3 + \dots)$$

$$\dots + (v_1 + m_{1+n}) - (v_2 + m_{2+n}) + (v_3 + m_{3+n}) + \dots$$

$$\dots - (1 + n\text{م} + \text{ص} + \text{ص}) - (1 + n\text{م} + \text{ص} + \text{ص}) + (1 + n\text{م} + \text{ص} + \text{ص}) - 1$$

لیکن $ص_۱ + م_۱ + (م_۲ + م_۳ + \dots + م_۱ + م_۱) = (ن + ۱) ماسوں کا مجموعہ$

$ص_۲ + م_۲ + (م_۳ + م_۴ + \dots + م_۲ + م_۲) = (ن + ۱) ماسوں میں سے دو دو کے حاصل ضرب کا مجموعہ$

$ص_۳ + م_۳ + (م_۴ + م_۵ + \dots + م_۳ + م_۳) = (ن + ۱) ماسوں میں سے تین تین کے حاصل ضرب کا مجموعہ$

اور علیٰ ہذا القیاس

اس سے معلوم ہوا کہ $(ن + ۱)$ زاویوں کے لئے بھی وہی قانون درست ہے جو $ن$ زاویوں کے لئے ہے، اس لئے اگر مسئلہ $ن$ زاویوں کے لئے صحیح ہو تو یہ $(ن + ۱)$ زاویوں کے لئے بھی صحیح ہوتا ہے، لیکن بموجب دہمات ۱۰۳ اور ۱۳۰ یہ ۲ اور ۳ زاویوں کے لئے صحیح ہے، اس لئے یہ ۴ زاویوں کے لئے صحیح ہے، اس لئے ۵ زاویوں کے لئے اس لئے ثابت ہوا کہ یہ بالعموم صحیح ہے۔

نتیجہ صریح - اگر کل زاوئے تعداد میں $ن$ ہوں اور ان میں سے ہر ایک ط کے برابر ہو تو

$ص_۱ = ن \times مس ط = ص_۲ = ص_۳ = \dots = ص_۱ = مس ط$ کی قیمت دریافت کرو۔

یہاں $مس لہ ط = \frac{ص_۱ - ص_۲}{۱ - ص_۲ + ص_۳}$

$\frac{ص_۱ - ص_۲ + ص_۳}{ص_۱ - ص_۲ + ص_۳} = مس ط$

$$= 4\text{ مسطه} - 4\text{ مسطه} + 1\text{ مسطه}$$

مثال - ثابت کرد که $5 ط = 10 ط - 5 ط + 5 ط$

۱۴۲۔ ترکیب دفعہ گذشتہ کے موافق سہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

جب $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

= حجم ۱، حجم ۲، حجم ۳ حجم ۱۰ (ص ۱ - ص ۳ + ص ۵ -)

اور $(1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1)$

$= \text{جم لہ جم لہ جم لہ} \dots \dots \dots \text{جم لہ} (1 - \text{یس} + \text{ص} - \dots)$

جہاں صاف صاف ہے، اسی کی وہی قیمتیں ہیں جو دفعہ
گزشتہ میں بیان ہوئیں۔

۱۳۳۔ مثلث کے زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے ہم ای ارتباطات

جب تین زاوے ۱، ۲، ۳ ایسے ہوں کہ ان کا مجموعہ ۱۸۰ ہو تو ان کی مثلثی نسبتوں کے کئی ایک باہمی تعلقات آسان حاصل ہو سکتے ہیں ترکیب ثبوت کی توضیح منسلک ذیل سے ہوگی۔

مثال ۱- اگر $a + b + c = 980$ تو ثابت کرو کہ

جب ۱۲ + جب ۲ ب + جب ۲ ج = ۴ جب ا جب ب جب ج

اور جیب ۲/۱ + جیب ۲/۲ + جیب ۲/۳ ج

$$= 2 \text{ جب } (1 + \text{ب}) \text{ جم } (1 - \text{ب}) + 2 \text{ جب } \text{ج} \text{ جم } \text{ج}$$

اب چونکہ

$$۱ + ب + ج = ۱۸۰$$

اس لئے

$$۱ + ب = ۱۸۰ - ج$$

اور اس لئے

$$ج + (۱ + ب) = ج + ج$$

اور

$$ج + (۱ + ب) = ج + ج \dots \dots (وفہ ۷۶)$$

اس لئے

$$ج + ج = ۲ + (۱ + ب) + ج + ج$$

$$۲ + ج = ج + ج + (۱ + ب) + ج$$

$$۲ + ج = ج + ج + (۱ + ب) + ج$$

$$۲ + ج = ج + ج + ۱ + ب$$

$$۴ + ج = ج + ج + ۱ + ب$$

مثال ۲۔ اگر $۱ + ب + ج = ۱۸۰$ تو ثابت کرو کہ

$$ج + ج + ج = ج + ج + ج = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰$$

$$ج + ج + ج = ج + ج + ج = (ج + ج + ج)$$

$$۲ + ج = ج + ج + ۱ + ب$$

اب

$$۱ + ب + ج = ۱۸۰$$

یعنی

$$۱ + ب + ج = ۱۸۰$$

اور اس لئے

$$ج + ج + ج = ج + ج + ج$$

اور

$$ج + ج + ج = ج + ج + ج$$

$$۲ + ج = ج + ج + ۱ + ب$$

$$= ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} [\text{جم } \frac{۱}{۲} + \text{ج } - \text{ب}] - ۱$$

$$= ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} (\text{ج } + \text{ب} + \text{ج} + \text{ج} + \text{ج} - \text{ب}) - ۱$$

$$= ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \times ۲ \text{ ج } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲} - ۱$$

$$= ۱ - ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ ج } \frac{۱}{۲}$$

مثال ۳ - اگر $۱ + \text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰$ ثوابت کرو کہ

ج $۱ + \text{ج} + \text{ب} + \text{ج} = ۲ + ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ ج } \frac{۱}{۲}$
فرض کرو کہ $\text{ص} = \text{ج} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ج}$

$$\text{تب } ۲ \text{ ص} = ۲ \text{ ج} + ۱ + ۱ - \text{جم } \frac{۱}{۲} \text{ ب} + ۱ - \text{جم } \frac{۱}{۲} \text{ ج}$$

$$= ۲ \text{ ج} + ۱ - ۲ + ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} (\text{ب} + \text{ج}) - \text{جم } \frac{۱}{۲} (\text{ب} - \text{ج})$$

$$= ۲ - ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} + ۲ - ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} (\text{ب} + \text{ج}) - \text{جم } \frac{۱}{۲} (\text{ب} - \text{ج})$$

$$\text{اس لئے } \text{ص} = ۲ + \text{جم } \frac{۱}{۲} [\text{جم } \frac{۱}{۲} (\text{ب} - \text{ج}) + \text{جم } \frac{۱}{۲} (\text{ب} + \text{ج})]$$

$$\text{چونکہ } \text{جم } \frac{۱}{۲} = \text{جم } \frac{۱}{۲} [۱۸۰ - (\text{ب} + \text{ج})] = - \text{جم } \frac{۱}{۲} (\text{ب} + \text{ج})$$

$$\therefore \text{ص} = ۲ + \text{جم } \frac{۱}{۲} \times ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ ج}$$

$$= ۲ + ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ ج}$$

مثال ۴ - اگر $۱ + \text{ب} + \text{ج} = ۱۸۰$ ثوابت کرو کہ

$$\text{س } ۱ + \text{س } \text{ب} + \text{س } \text{ج} = \text{س } ۱ + \text{س } \text{ب} + \text{س } \text{ج}$$

مس (ا + ب + ج) = مس ا + مس ب + مس ج - مس ا و مس ب مس ج
 ا - (مس ب مس ج + مس ا و مس ب مس ج)

لیکن مس (ا + ب + ج) = مس ۱۸۰ = ۰

اس لئے مس ا + مس ب + مس ج - مس ا و مس ب مس ج =

یعنی مس ا + مس ب + مس ج = مس ا و مس ب مس ج

اس کو براہ راست اس طرح بھی ثابت کر سکتے ہیں

مس (ا + ب) = مس (۱۸۰ - ج) = - مس ج

مس ا + مس ب = - مس ج
 ا - مس ا و مس ب

مس ا + مس ب = - مس ج + مس ا و مس ب مس ج

یعنی مس ا + مس ب + مس ج = مس ا و مس ب مس ج

مثال ۵ - اگر لا + ما + می = لا می تو ثابت کرو کہ

$$\frac{۲۲}{۲۲-۱} \times \frac{۲۲}{۲۲-۱} \times \frac{۲۲}{۲۲-۱} = \frac{۲۲}{۲۲-۱} + \frac{۲۲}{۲۲-۱} + \frac{۲۲}{۲۲-۱}$$

فرض کرو کہ لا = مس ا + ما = مس ب اور می = مس ج

تو حاصل ہوگا

مس ا + مس ب + مس ج = مس ا و مس ب مس ج

مس ا + مس ب = - مس ج
 ا - مس ا و مس ب

یعنی مس (ا + ب) = مس (۲۲ - ج) (دفعہ ۷۸)

اس لئے لا + ب + ج = ۲۲ + ۲۲ = ۴۴

$$\therefore \frac{۲۲}{۲۱-۱} + \frac{۱۲}{۲۱-۱} + \frac{۱۲}{۲۱-۱} = \frac{۲۲}{۲۱-۱} + \frac{۱۲}{۲۱-۱} + \frac{۱۲}{۲۱-۱}$$

= مس ۲ + مس ۲ + مس ۲ ج = مس ۲ + مس ۲ + مس ۲ ج
(اسی قسم کے عمل سے جو آخری مثال میں ہوا۔)

$$= \frac{۲۲}{۲۱-۱} \times \frac{۱۲}{۲۱-۱} \times \frac{۱۲}{۲۱-۱}$$

امثلہ نمبری ۲۰

اگر ۱۸۰ = ج + ب + ج تو ثابت کر دو

- ۱۔ جب ۲ + جب ۲ ب - جب ۲ ج = ۲ جم ۱ + جم ۱ جب ب جب ج
- ۲۔ جم ۲ + جم ۲ ب + جم ۲ ج = ۲ - ۱ جم ۱ + جم ۱ جب ب جب ج
- ۳۔ جم ۲ + جم ۲ ب - جم ۲ ج = ۲ - ۱ جب ۱ + جب ۱ جب ب جب ج
- ۴۔ جب ۱ + جب ۱ ب + جب ۱ ج = ۲ جم ۱ + جم ۱ جب ب جب ج
- ۵۔ جب ۱ + جب ۱ ب - جب ۱ ج = ۲ جب ۱ + جب ۱ جب ب جب ج
- ۶۔ جم ۱ + جم ۱ ب + جم ۱ ج = ۲ + ۱ جب ۱ + جب ۱ جب ب جب ج
- ۷۔ جب ۱ + جب ۱ ب - جب ۱ ج = ۲ جب ۱ + جب ۱ جب ب جب ج
- ۸۔ جم ۱ + جم ۱ ب + جم ۱ ج = ۲ - ۱ جم ۱ + جم ۱ جب ب جب ج
- ۹۔ جم ۱ + جم ۱ ب - جم ۱ ج = ۲ - ۱ جب ۱ + جب ۱ جب ب جب ج
- ۱۰۔ جب ۱ + جب ۱ ب + جب ۱ ج = ۲ - ۱ جب ۱ + جب ۱ جب ب جب ج

$$۱۱- \text{جب } \frac{۱}{۲} + \text{جب } \frac{۱}{۲} - \text{جب } \frac{۱}{۲} = ۱ - ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{۱}{۲}$$

$$۱۲- \text{مس } \frac{۱}{۲} \text{ مس } \frac{۱}{۲} + \text{مس } \frac{۱}{۲} \text{ مس } \frac{۱}{۲} + \text{مس } \frac{۱}{۲} \text{ مس } \frac{۱}{۲} = ۱$$

$$۱۳- \text{مم } \frac{۱}{۲} \text{ مم } \frac{۱}{۲} + \text{مم } \frac{۱}{۲} = \text{مم } \frac{۱}{۲} \text{ مم } \frac{۱}{۲} \text{ مم } \frac{۱}{۲}$$

$$۱۴- \text{مم ب مم ج} + \text{مم ج مم ا} + \text{مم ا مم ب} = ۱$$

$$۱۵- \text{جب (ب+ج)} + \text{جب (ج+ا)} + \text{جب (ا+ب)} = ۱$$

$$= \text{مم جب } \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{۱}{۲} - \text{جب } \frac{۱}{۲} - \text{جب } \frac{۱}{۲}$$

$$۱۶- \text{جب } \frac{۱}{۲} + \text{جب } \frac{۱}{۲} + \text{جب } \frac{۱}{۲} = ۱ - ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} - ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} - ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲}$$

$$۱۷- \text{جم } \frac{۱}{۲} + \text{جم } \frac{۱}{۲} - \text{جم } \frac{۱}{۲} = ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} - ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} - ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲}$$

$$۱۸- \text{جب } \frac{۱}{۲} + \text{جب } \frac{۱}{۲} + \text{جب } \frac{۱}{۲} = ۸ \text{ جب } \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{۱}{۲}$$

$$۱۹- \text{جب (ب+ج-ا)} + \text{جب (ج+ا-ب)} + \text{جب (ا+ب-ج)} = ۱$$

$$= \text{مم جب } \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{۱}{۲}$$

اگر $۱ + ۲ + ۳ = ۶$ ص ثوابت کرو کہ

$$۲۰- \text{جب (ص-ا)} \text{ جب (ص-ب)} + \text{جب (ص-ج)} = \text{جب (ا+ب+ج)}$$

$$۲۱- \text{مم جب (ص-ا)} \text{ مم جب (ص-ب)} \text{ مم جب (ص-ج)} = \text{مم جب (ا+ب+ج)}$$

$$= ۱ - \text{جم } \frac{۱}{۲} - \text{جم } \frac{۱}{۲} - \text{جم } \frac{۱}{۲} + ۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲}$$

$$۲۲- \text{جب (ص-ا)} + \text{جب (ص-ب)} + \text{جب (ص-ج)} = \text{جب (ا+ب+ج)}$$

$$= \text{مم جب } \frac{۱}{۲} \text{ مم جب } \frac{۱}{۲} \text{ مم جب } \frac{۱}{۲}$$

$$۲۳ - \text{جم ص} + \text{جم}^۲ (\text{ص} - \text{ل}) + \text{جم}^۳ (\text{ص} - \text{ب}) + \text{جم}^۴ (\text{ص} - \text{ج})$$

$$= ۲ + ۲ \text{جم} + \text{جم}^۲ \text{جم} + \text{جم}^۳$$

$$۲۴ - \text{جم}^۲ \text{ل} + \text{جم}^۳ \text{ب} + \text{جم}^۴ \text{ج} + ۲ \text{جم}^۲ \text{ل} \text{جم} + \text{جم}^۳ \text{ب} \text{جم} + \text{جم}^۴ \text{ج} \text{جم}$$

$$= ۱ + ۴ \text{جم ص} + \text{جم} (\text{ص} - \text{ل}) + \text{جم} (\text{ص} - \text{ب}) + \text{جم} (\text{ص} - \text{ج})$$

$$۲۵ - \text{اگر ع} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ل} = ۲۲ \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$(۱) \text{جم ع} + \text{جم ب} + \text{جم ج} + \text{جم ل} + ۴ \text{جم ع}^۲ + ۴ \text{جم ب}^۲ + ۴ \text{جم ج}^۲ + ۴ \text{جم ل}^۲ = ۰$$

$$(۲) \text{جب ع} + \text{جب ب} + \text{جب ج} + \text{جب ل} + ۴ \text{جم ع}^۲ + ۴ \text{جم ب}^۲ + ۴ \text{جم ج}^۲ + ۴ \text{جم ل}^۲ = ۰$$

$$\text{اور (۳) مس ع} + \text{مس ب} + \text{مس ج} + \text{مس ل}$$

$$= \text{مس ع} \text{مس ب} \text{مس ج} \text{مس ل} (\text{م ع} + \text{م ب} + \text{م ج} + \text{م ل})$$

$$۲۶ - \text{اگر چار زاویوں کا مجموعہ } ۱۸۰^\circ \text{ ہو تو ثابت کرو کہ ان کی جیوب اتمام}$$

$$\text{میں سے دو دو کے حاصل ضرب کا مجموعہ ان کی جیوب میں سے دو دو}$$

$$\text{کے حاصل ضرب کے مجموعہ کے برابر ہوگا۔}$$

$$۲۷ - \text{اگر ع} + \text{ب} + \text{ج} = ۰ \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{جب}^۲ \text{ع} + \text{جب}^۲ \text{ب} + \text{جب}^۲ \text{ج} = ۰$$

$$= ۲ (\text{جب ع} + \text{جب ب} + \text{جب ج}) (\text{ا} + \text{جم ع} + \text{جم ب} + \text{جم ج})$$

$$۲۸ - \text{اس کی تصدیق کرو کہ}$$

$$\text{جب}^۳ \text{ا} \text{جب}^۳ (\text{ب} - \text{ج}) + \text{جب}^۳ \text{ب} \text{جب}^۳ (\text{ج} - \text{ل}) + \text{جب}^۳ \text{ج} \text{جب}^۳ (\text{ل} - \text{ب})$$

$$+ \text{جب}^۳ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) \text{جب}^۳ (\text{ب} - \text{ج}) \text{جب}^۳ (\text{ج} - \text{ل}) \text{جب}^۳ (\text{ل} - \text{ب}) = ۰$$

$$\text{اگر 'ا' 'ب' 'ج' 'د' کوئی زاوے ہوں تو ثابت کرو کہ}$$

$$۲۹ - \text{جب}^۳ \text{ا} \text{جب}^۳ \text{ب} \text{جب}^۳ (\text{ا} - \text{ب}) + \text{جب}^۳ \text{ب} \text{جب}^۳ \text{ج} \text{جب}^۳ (\text{ب} - \text{ج})$$

$$+ \text{جب}^۳ \text{ج} \text{جب}^۳ \text{ا} \text{جب}^۳ (\text{ج} - \text{ا}) + \text{جب}^۳ (\text{ا} - \text{ب}) \text{جب}^۳ (\text{ب} - \text{ج}) \text{جب}^۳ (\text{ج} - \text{ا}) = ۰$$

$$\begin{aligned}
 ۳۰- & \text{جب (ا-ب) جم (ا+ب) + جب (ب-ج) (ج+ب) جم (ب+ج) } \\
 & + \text{جب (ج-د) جم (ج+د) + جب (د-ا) جم (ا+د) = } \\
 ۳۱- & \text{جب (ا+ب-ج۲) جم ب-جب (ا+ج-۲ب) جم ج } \\
 = & \text{جب (ب-ج) جم (ج+ب-ا) + جم (ج+ا-ب) + جم (ا+ب-ج) } \\
 ۳۲- & \text{جب (ا+ب+ج+د) + جب (ا+ب-ج-د) + جب (ا+ب+ج+د) } \\
 & + \text{جب (ا+ب+ج-د) = ۴ جب (ا+ب) جم ج جم د }
 \end{aligned}$$

۳۳- اگر کوئی مسئلہ 'ا' ب 'ج' کی ایسی قیمتوں کے لئے درست ہو جو مساوات 'ا+ب+ج=۱۸۰' کو پورا کریں تو ثابت کرو کہ مسئلہ مذکورہ 'ا' ب 'ج' کی جگہ مقادیر ذیل کو مندرج کرنے سے بھی درست رہے گا۔

$$(۱) \quad ۹۰ - \frac{ا}{۴} \quad ۹۰ - \frac{ب}{۴} \quad \text{اور} \quad ۹۰ - \frac{ج}{۴}$$

$$(۲) \quad ۱۸۰ - ا \quad ۱۸۰ - ب \quad \text{اور} \quad ۱۸۰ - ج$$

اس طرح مثال ۱۶ کو مثال ۶ سے اور مثال ۱۷ کو مثال ۵ سے متنبط کرو۔

اگر لا+ما+می = لامای تو ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned}
 ۳۳- & \frac{۳لا-لا}{۱-۳لا} + \frac{۳ما-ما}{۱-۳ما} + \frac{۳می-می}{۱-۳می} \\
 = & \frac{۳لا-لا}{۱-۳لا} \times \frac{۳ما-ما}{۱-۳ما} \times \frac{۳می-می}{۱-۳می}
 \end{aligned}$$

اور ۳۵- لا (۱-ما) (۲می-۱) + ما (۱-می) (۲لا-۱) + می (۱-لا) (۲ا-۱) = ۳لامای

۱۳۴- زاویوں کے مسائل جمع و تفریق کی مدد سے خاص قسم کی مثلثی معادلات حل ہو سکتی ہیں
مثال- مساوات ذیل کو حل کرو

جب لا + جب ۵ لا = جب ۳ لا
 یہو جب صائبہ دفعہ ۱۰۰ یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے
 ۲ جب ۳ لا جم ۲ لا = جب ۳ لا
 جب ۳ لا = ۰ یا ۲ جم ۲ لا = ۱
 اگر جب ۳ لا = ۰ تو ۳ لا = ۲ ن
 اگر جم ۲ لا = $\frac{1}{2}$ تو ۲ لا = ۲ ن $\pm \frac{2}{3}$
 اس لئے لا = $\frac{2}{3}$ ن یا ۲ ن $\pm \frac{2}{3}$
 ۱۳۵۔ جن معادلات کی صورت عامہ لا جم طہ + ب جب طہ ج
 ہو ان کا حل عام دریافت کرو۔

طرفین مساوات کو $\frac{1}{\text{جم طہ} + \text{ب} + \frac{1}{\text{جم طہ} + \text{ب}}}$ پر تقسیم کرو اور مساوات کو اس طرح لکھو
 $\frac{1}{\text{جم طہ} + \text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{جم طہ} + \text{ب}} = \frac{\text{ج}}{\text{جم طہ} + \text{ب}}$
 مساوات کی جدول سے اُس زاوے کی قیمت دریافت کرو جس کا
 تماس $\frac{\text{ب}}{\text{جم طہ} + \text{ب}}$ ہو اور اس کو عم سے تعبیر کرو
 تب مس عم = $\frac{\text{ب}}{\text{جم طہ} + \text{ب}}$ اور
 جب عم = $\frac{\text{ب}}{\text{جم طہ} + \text{ب}}$ اور جم عم = $\frac{\text{ج}}{\text{جم طہ} + \text{ب}}$

مساوات بصورت ذیل بھی لکھی جاسکتی ہے
 جم عم جم طہ + جب عم جب طہ = $\frac{\text{ج}}{\text{جم طہ} + \text{ب}}$
 یعنی جم (طہ - عم) = $\frac{\text{ج}}{\text{جم طہ} + \text{ب}}$

اور قی پر ملتا ہے اس لئے زاوئے ن وق اور ن وق دونوں
جداگانہ بد کے برابر ہیں پس زاویہ قی وق = عدہ - بد اور قی وق = عدہ +
اس لئے مساوات کے حل بالترتیب

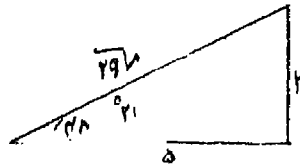
$$۲ن۲ + قی وق اور ۲ن۲ + قی وق ہوں گے۔$$

صریحاً اوپر کا عمل ناممکن ہوگا اگر ج کے $\frac{۲}{۵} + \frac{۲}{۲۹۲}$

کیونکہ اس صورت میں نقطہ ن دائرہ کے باہر واقع ہوگا
۱۳۷۔ بطور ایک عددی مثال کے ہم مساوات ذیل کو حل کریں گے

$$۵ \text{ جم طہ} - ۲ = ۲ \text{ معلوم ہے مس } ۲۸^{\circ} ۲۱' = \frac{۲}{۵}$$

طرفین مساوات کو $\frac{۲}{۵} + ۲$ یعنی $\frac{۲۹۲}{۲۹۲}$ پر تقسیم کرو تو حاصل ہوگا



$$\frac{۲}{۲۹۲} = \text{جم طہ} - \frac{۲}{۲۹۲}$$

اس لئے جم طہ جم $۲۸^{\circ} ۲۱'$ - جم طہ جب $۲۸^{\circ} ۲۱'$

$$= \text{جم } ۲۸^{\circ} ۲۱' = \text{جم } (۹۰ - ۴۸^{\circ} ۱۲')$$

$$= \text{جم } ۴۸^{\circ} ۱۲'$$

$$\therefore \text{جم } (۲۸^{\circ} ۲۱' + ۴۸^{\circ} ۱۲') = \text{جم } ۷۶^{\circ} ۳۳'$$

اس لئے طہ + $۲۸^{\circ} ۲۱' = ۷۶^{\circ} ۳۳' \times ۱۸۰ = ۱۳۷۸۰ \pm ۴۸^{\circ} ۱۲' \text{ (دفعہ ۸۹)}$

$$\therefore \text{طہ} = ۷۶^{\circ} ۳۳' \times ۱۸۰ - ۴۸^{\circ} ۱۲' = ۱۳۷۸۰ \pm ۴۸^{\circ} ۱۲'$$

$$= ۲۰ \times ۱۸۰ - ۹۰ \text{ یا } ۲۰ \times ۱۸۰ + ۹۰ = ۲۳ \text{ جہاں}$$

ن کوئی صحیح عدد ہے
متبادل ثبوت مساوات دفعہ ۱۳۵ ایک اور طرح سے بھی حل
ہو سکتی ہے۔

$$\text{فرض کرو کہ } م = مس \frac{ط}{۲}$$

$$\text{پس } \frac{م}{۲} = مس \frac{ط}{۲} \text{ جب } ط = ۲ \text{ } \frac{م}{۲} = مس \frac{۲}{۲}$$

$$\text{اور } \frac{۱-م}{۲} = مس \frac{۲}{۲} \text{ } \frac{۱-م}{۲} = مس \frac{۲}{۲} \text{ (دفعہ ۱۱۵)}$$

مساوات میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے اس کی صورت یہ ہو جائے گی

$$۱ - \frac{م}{۲} + \frac{۲}{۲} = ج$$

$$\text{یعنی } م (ج + ۱) - ۲ ب م + ج - ۱ = ۰$$

یہ ایک مساوات درجہ دوم ہے جس سے م کی دو قیمتیں یعنی مس $\frac{ط}{۲}$
کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں مثلاً موافق مثال دفعہ ہذا

$$۴۰ + م - ۳ = ۰ \text{ یعنی } م = ۱ \text{ یا } \frac{۳}{۲}$$

$$= مس (-۲۵) \text{ یا مس } ۲۳ \text{ (جدولوں سے)}$$

$$\text{اس لئے } \frac{ط}{۲} = ۲۰ \times ۱۸۰ - ۹۰ \text{ یا } ۲۰ \times ۱۸۰ + ۹۰$$

$$\text{یعنی } ط = ۲۰ \times ۳۶۰ - ۹۰ \text{ یا } ۲۰ \times ۳۶۰ + ۹۰$$

امثله نمبری ۲۱

عادلات ذیل کو حل کرو

- ۱- جب ط + جب ۷ ط = جب ۴ ط
- ۲- جم ط + جم ۷ ط = جم ۴ ط
- ۳- جم ط + جم ۳ ط = ۲ جم ط
- ۴- جب ۴ ط - جب ۲ ط = جم ۳ ط
- ۵- جم ط - جب ۳ ط = جم ۲ ط
- ۶- جب ۷ ط = جب ط + جب ۳ ط
- ۷- جم ط + جم ۲ ط + جم ۳ ط = ۰
- ۸- جب ط + جب ۳ ط + جب ۵ ط = ۰
- ۹- جب ۲ ط - جم ۲ ط - جب ط + جم ط = ۰
- ۱۰- جب (۳ ط + ۷) + جب (۳ ط - ۷) + جب (۷ ط - ۳) + جب (۳ ط - ۷) = جم ۷
- ۱۱- جم (۳ ط + ۷) + جم (۳ ط - ۷) + جم (۵ ط - ۷) + جم (۵ ط + ۷) + جم (۷ ط - ۷) = جم ۳
- ۱۲- جم ن ط = جم (ن - ۲) ط + جب ط
- ۱۳- جب $\frac{ن+۱}{۲}$ ط = جب $\frac{ن-۱}{۲}$ ط + جب ط
- ۱۴- جب م ط + جب ن ط = ۰
- ۱۵- جم م ط + جم ن ط = ۰
- ۱۶- جب ن ط - جب (ن - ۱) ط = جب ط
- ۱۷- جب ۳ ط + جم ۲ ط = ۰

$$۱۸ - \overline{۳۶} = \text{جم ط} + \text{جب ط} = \overline{۲۶}$$

$$۱۹ - \text{جب ط} + \text{جم ط} = \overline{۲۶}$$

$$۲۰ - \overline{۳۶} = \text{جب ط} - \text{جم ط} = \overline{۲۶}$$

$$۲۱ - \text{جب لا} + \text{جم لا} = \overline{۲۶} = \text{جم لا}$$

$$۲۲ - ۵ = \text{جب ط} + ۲ = \text{جم ط} = ۵ \text{ (معلوم ہے مس } ۱۲۸^{\circ} ۲۸' = ۵۴)$$

$$۲۳ - ۶ = \text{جم لا} + ۸ = \text{جب لا} = ۹ \text{ (معلوم ہے مس } ۵۳^{\circ} ۸' = \frac{۱}{۳۳})$$

$$\text{اور جم } ۲۵^{\circ} ۵۰' = ۱۹$$

$$۲۴ - ۱ = \text{جب ط} = ۳ = \text{جب ط} + \text{جم ط} \text{ (معلوم ہے مس } ۱۷۱^{\circ} ۳۳' = ۳)$$

$$۲۵ - \text{قم ط} = \text{قم ط} + \overline{۳۶}$$

$$۲۶ - \text{قم لا} = ۱ + \text{قم لا}$$

$$۲۷ - (\overline{۳۶} + ۲) = \text{جم ط} = ۱ = \text{جب ط}$$

$$۲۸ - \text{مس ط} + \text{قط ط} = \overline{۳۶}$$

$$۲۹ - \text{جم ط} = \text{جم ط}$$

$$۳۰ - ۴ = \text{جم ط} - ۳ = \text{قط ط} = \text{مس ط}$$

$$۳۱ - \text{جم ط} + ۳ = \text{جم ط} = ۰$$

$$۳۲ - \text{جم ط} + ۲ = \text{جم ط} = ۰$$

$$۳۳ - \text{جم ط} = (\overline{۳۶} + ۱) \left(\text{جم ط} - \frac{۱}{۲۶} \right)$$

- ۳۴ - مم ط - مس ط = ۲
 ۳۵ - مم ۲ ط = مم ط - مس ط
 ۳۶ - مس ۳ ط = مس (ط - ۱۵) = مس (ط + ۱۵)
 ۳۷ - مس ط + مس ۲ ط + مس ۳ ط = ۰
 ۳۸ - مس ط + مس ۲ ط + مس ۳ ط = مس ط = ۳۸
 ۳۹ - جب ۳ عہ = مم جب عہ جب (لا + عہ) جب (لا - عہ)
 ۴۰ - ثابت کرو کہ اگر لا کو ۲۱ جب ۵۰ عہ ۲۰ جب ۱۸ عہ ۲۰ جب ۳۳ عہ
 میں سے کسی ایک قیمت کے برابر رکھا جائے تو شرائط مساوات
 لا - ۲ + لا ۲ = ۱ + ۰ ہر ایک صورت میں پوری ہوں گی -
 ۴۱ - اگر جب (۲۱ جم ط) = جم (۲۱ جب ط) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم (ط)} = \left(\frac{۲۱}{۲} \pm \frac{۱}{۲} \right)$$

- ۴۲ - اگر جب (۲۱ مم ط) = جم (۲۱ مس ط) تو ثابت کرو کہ قمر ط
 یا مم ط مساوی ن + ۱/۲ کے ہے، اس میں ن کوئی مثبت یا منفی
 صحیح عدد ہے -

۴۳ - مثال اگر لاصفر سے ۲۲ تک بڑھے تو ہمہ
 جب لا + جم لا کے تغیرات کو قمرم کرو -

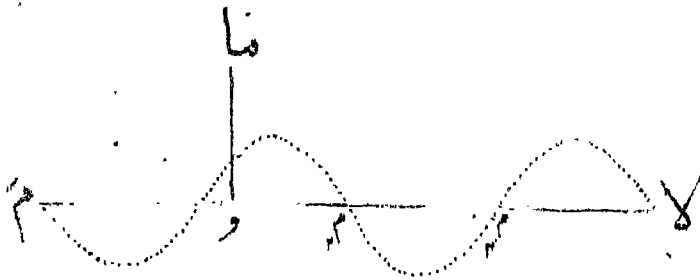
$$\text{جب لا + جم لا} = \left[\frac{۱}{۲} \text{ جب لا} + \frac{۱}{۲} \text{ جم لا} \right] ۲۱ =$$

$$۲۱ = \left[\text{جب لا جم} + \frac{۱}{۲} \text{ جم لا جب} \right] ۲۱ = \left[\text{جب لا} + \frac{۱}{۲} \right] ۲۱$$

اس طرح سے ہکو قیمتوں کی جدول ذیل حاصل ہوگی

$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	۰	لا
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} + لا$
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	۰	۱	۰	۱	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	جب $(\frac{\pi}{2} + لا)$
۱	۰	$\sqrt{2}$	۰	$\sqrt{2}$	۱	ما جب $(\frac{\pi}{2} + لا)$

دفعہ ۶۸ کے عمل تبصیر کے موافق جملہ مذکورہ کی ترسیم یہ ہوگی۔



۱۳۹۔ مثال۔ - اجم طہ + ب جب طہ کی مقدار اور علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو اور جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت دریافت کرو

$$[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{ب}{ب + لا} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{جم طہ}{جم طہ + لا}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{ب + جم طہ}{ب + لا + جم طہ + لا}$$

فرض کرو کہ عہ چھوٹے سے چھوٹا نسبت زاویہ ایسا ہے کہ

$$\text{جہم } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ اور جب } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

اس لئے جملہ مجوزہ = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ [جہم طہ جہم + جب طہ جب جہم]

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \text{جہم (طہ - عم)}$
 جب زاویہ طہ کی قیمت عم سے ۲۲ + عم تک بڑھتی ہے تو زاویہ طہ - عم صفر سے ۲۲ تک بڑھتا ہے اور اس لئے جملہ کی مقدار اور علامت کے تغیرات باسانی حاصل ہو سکتے ہیں۔
 اب چونکہ مقدار جہم (طہ - عم) کی بڑی سے بڑی قیمت ایک ہے (یعنی جب زاویہ طہ = عم) اس لئے معلوم ہوا کہ جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ہے۔
 نیز ظاہر ہے کہ جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت کے موافق طہ کی جو قیمت ہو اس کی جیب التمام $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ہوگی

امثلہ نمبری ۲۲

جب زاویہ طہ صفر سے ۲۲ تک بڑھے تو جہات ذیل کی مقدار و علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو اور ان کی ترسیات ہر ایک صورت میں بناؤ۔

۱۔ جب طہ - جہم طہ

۲۔ جب طہ + جہم طہ

$$[\text{یاد رہے کہ جب طہ + جہم طہ} = 2 \left[\frac{1}{2} \text{ جب طہ} + \frac{3}{4} \text{ جہم طہ} \right]]$$

$$2 = \text{جب } \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right)$$

۳۔ جب طہ - ۱۳۳ جم طہ

۴۔ جم طہ - جب طہ

۵۔ جب طہ جم طہ

۶۔ جب ۳ طہ

۷۔ سس ۳ طہ

۸۔ قط ۲ طہ

۹۔ $\frac{\text{جب طہ} + \text{جب ۲ طہ}}{\text{جم طہ} + \text{جم ۲ طہ}}$

۱۰۔ جب (۱۱ جب طہ)

۱۱۔ جم (۱۱ جب طہ)

۱۲۔ اگر زاویہ ۰ سے ۹۰ تک بڑھے تو جملہ $\frac{\text{جب ۳ طہ}}{\text{جم ۲ طہ}}$ کی مقدار و علامت کے تغیرات کی تحقیق کرو۔

باب دہم

لوکار تم

۱۔ فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے

$$۲۵۳ = ۲۵۳۰۳۱۲۰۵۱۰ \quad ۲۵۳ = ۲۵۳۰۳۱۲۰۵۱۰ \quad ۲۵۳ = ۲۵۳۰۳۱۲۰۵۱۰$$

$$۱۰۲۹۶۱ = ۵۶۰۱۲۶۱۲۹۱۰ \quad \text{اور}$$

تو عمل ضرب کی مدد کے بغیر ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$۱۰۲۹۶۱ = ۲۵۳ \times ۴۰۷ \quad \text{کیونکہ}$$

$$۲۵۳۰۳۱۲۰۵۱۰ \times ۲۵۳۰۳۱۲۰۵۱۰ = ۴۰۷ \times ۲۵۳$$

$$۲۵۳۰۳۱۲۰۵۱۰ + ۲۵۳۰۳۱۲۰۵۱۰ =$$

$$۱۰۲۹۶۱ = ۵۶۰۱۲۶۱۲۹۱۰ =$$

ظاہر ہے کہ اس جگہ عمل ضرب اُس سے آسان تر عمل جمع میں تبدیل ہو گیا ہے، نیز فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ

$$۷۹۵۰۷ = ۲۵۹۰۰۲۰۵۵$$

$$۲۵۳ = ۱۶۴۳۳۲۶۸۵۱۰ \quad \text{اور}$$

ہم آسانی ثابت کر سکتے ہیں کہ ۷۹۵.۷ کا جذر الکعب ۳۴ ہے
 کیونکہ $\sqrt[3]{(۳۶۹۰۰۴۰۵۵۱۰)} = \sqrt[3]{۷۹۵.۷} = ۷۹۵.۷$

$$۳۴ = ۱۲۶۳۳۲۶۸۴۱۰ = ۳۶۹۰۰۴۰۵۵ \times \frac{1}{10} =$$

اس صورت میں استخراج جذر کا محال عمل آسان تر عمل تقسیم میں تبدیل ہو گیا ہے۔

۱۴۔ لوکارتم۔ تعریف اگر کوئی عدد ہو اور لا اور ن دو اور ایسے عدد ہوں کہ $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ تو لا کو لوکارتم ن کا اساس $\frac{1}{n}$ پر کہتے ہیں اور اس ربط کو اس طرح لکھتے ہیں لوکارتم ن اس لئے کسی عدد کا لوکارتم اساس معلوم پر وہ قوت نما ہے جس کے موافق ضرور ہے کہ اساس کو اٹھایا جائے تاکہ حاصل عدد معلوم کے برابر ہو جائے۔

مثلاً چونکہ $۱۰ = ۱۰۰$ اس لئے $\frac{1}{10} = ۱۰۰$ لوکارتم ۱۰۰

چونکہ $۱۰ = ۱۰۰۰۰$ اس لئے $\frac{1}{10} = ۱۰۰۰۰$ لوکارتم ۱۰۰۰۰

چونکہ $۱۶ = ۲۵۶$ اس لئے $\frac{1}{16} = ۲۵۶$ لوکارتم ۱۶

چونکہ $\frac{1}{8} = \left[\frac{1}{16}\right] = ۲ = ۲$ اس لئے $\frac{1}{8} = ۲$ لوکارتم ۲

چونکہ $\frac{1}{9} = \frac{1}{81} = \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$ اس لئے $\frac{1}{9} = ۹$ ک (۹)

یادداشت چونکہ $\frac{1}{1} = ۱$ اس لئے ایک کا لوکارتم کسی اساس پر ہمیشہ

صفر ہوتا ہے۔

۱۴۲۔ اگر م اور ن کوئی حقیقی مقادیر جبریہ ہوں تو ان کے لئے
قوانین ذیل جن کو قوت نماؤں کے قانون کہتے ہیں، ہمیشہ
صادق آتے ہیں۔

$$(۱) \quad \text{لو} \times \text{لو} = \text{لو} + \text{م}$$

$$(۲) \quad \text{لو} \div \text{لو} = \text{م} - \text{م}$$

$$(۳) \quad (\text{لو})^{\text{م}} = \text{لو}^{\text{م}}$$

ان کے مطابق لوکارمیں کے تین اساسی قوانین مندرجہ ذیل ہیں۔

$$(۱) \quad \text{لو} \text{ م ن} = \text{لو} \text{ م} + \text{لو} \text{ ن}$$

$$(۲) \quad \text{لو} \text{ م ن} = \text{لو} \text{ م} - \text{لو} \text{ ن}$$

$$(۳) \quad \text{لو} \text{ م} (\text{م})^{\text{ن}} = \text{ن} \text{ لو} \text{ م}$$

ان کے ثبوت ذیل کی دفعت میں دئے گئے ہیں۔

۱۴۳۔ دو مقداروں کے حاصل ضرب کا لوکارم ان کے
لوکارمیں کے حاصل جمع کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\text{لو} \text{ م} (\text{م ن}) = \text{لو} \text{ م} + \text{لو} \text{ ن}$$

فرض کرو کہ لا = لو م م یعنی لا = م

اور ما = لو ن ن یعنی ما = ن

$$\text{تب} \quad \text{م ن} = \text{لا} \times \text{ما} = \text{لا} + \text{ما}$$

$$\therefore \quad \text{لو} \text{ م ن} = \text{لا} + \text{ما} \quad (\text{دفعہ ۱۴۳ تعریف})$$

۴۴۔ دو مقداروں کے خارج قسمت کا لوکارتم اُن کے
لوکارتموں کے حاصل تقریق کے برابر ہوتا ہے یعنی

$$\text{لوکارتم} \left(\frac{ج}{م} \right) = \text{لوکارتم} - \text{لوکارتم} ن$$

فرض کرو کہ لا = لوکارتم یعنی لا = م (دفعہ ۱۴۱ تعریف)
اور ما = لوکارتم یعنی لا = ن

$$\text{تب} \quad \frac{ج}{م} = \frac{لا}{ما} = \frac{لا}{ن}$$

$$\therefore \text{لوکارتم} \left(\frac{ج}{م} \right) = لا - ما \quad (\text{دفعہ ۱۴۱ تعریف})$$

$$= \text{لوکارتم} - \text{لوکارتم} ن$$

۴۵۔ ایک ایسی مقدار کا لوکارتم جو کسی خاص قوت پر
اُٹھائی گئی ہو مساوی ہے اُس حاصل ضرب کے جو مقدار
کے لوکارتم اور قوت نما کے باہم ضرب دینے سے حاصل ہوئی

$$\text{لوکارتم} (م) = ن \text{ لوکارتم}$$

فرض کرو کہ لا = لوکارتم یعنی لا = م

$$\text{تب} \quad م = (لا) = لا$$

$$\therefore \text{لوکارتم} (م) = ن لا \quad (\text{دفعہ ۱۴۱ تعریف})$$

$$= ن \text{ لوکارتم}$$

مثلاً لوکارتم = لوکارتم (۴ × ۳) = لوکارتم ۴ + لوکارتم ۳ = لوکارتم ۲ + لوکارتم ۳

$$\text{لوک } \frac{۶۳}{۳۸۳} = \text{لوک } \frac{۷}{۱۱} \times \frac{۳}{۲} = \text{لوک } ۷ + \text{لوک } ۳ - \text{لوک } ۲ - \text{لوک } ۱۱$$

$$= \text{لوک } ۷ + \text{لوک } ۳ - \text{لوک } ۲ - \text{لوک } ۲ - \text{لوک } ۱۱$$

$$\text{لوک } \frac{۱}{۱۳} = \text{لوک } \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۵} \text{ لوک } ۱۳$$

۱۴۶۔ مروج لوکارتم علیات میں جو لوکارتم مستعمل ہیں اُن میں اساس ۱۰ مقرر ہے، پس اگر کوئی اساس بیان نہ کیا جائے تو اساس ۱۰ کو ہمیشہ محدود خیال کرنا چاہئے، اساس ۱۰ کے فوائد و فعات ذیل سے معلوم ہوں گے۔

۱۴۷۔ ممیز اور اعشاریہ لوکارتمی۔ تعریف اگر کسی عدد کے لوکارتم کا کچھ حصہ صحیح اور کچھ حصہ کسور ہو تو لوکارتم کے حصہ صحیح کو ممیز اور حصہ اعشاریہ کو اعشاریہ لوکارتمی کہتے ہیں مثلاً فرض کرو کہ لوک ۷۹۵ = ۷۹۵۰۰۳۴۷۱ تو عدد ۲ کو

لوکارتم کا ممیز اور ۷۹۵۰۰۳۴۷۱ کو اعشاریہ لوکارتمی کہیں گے۔

منفی ممیز۔ فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے کہ لوک ۲ = ۱۰.۳۰۳

تب بموجب دفعہ ۱۴۴

$$\text{لوک } \frac{۱}{۲} = \text{لوک } ۱ - \text{لوک } ۲ = ۰ - \text{لوک } ۲ = -۱۰.۳۰۳$$

جس سے معلوم ہوا کہ لوک $\frac{۱}{۲}$ منفی ہے

جیسا دفعہ ۱۴۹ سے معلوم ہو گا اس میں خاص سہولت ہے

کہ لوکارتموں کے اعشاریوں کو ہمیشہ مثبت رکھا جائے۔

اس لئے بجائے -۱۰.۳۰۳ کے ہم [۱۰.۳۰۳] لکھتے ہیں

یعنی لوک $\frac{1}{10} = - (1 - 149896) = -1 + 149896$

اختصاراً اس جملہ کو ۱۴۹۸۹۶ جتے لکھتے ہیں۔

عدد ۱ کے اوپر خط افقی یہ ظاہر کرتا ہے کہ لوکارتم کا صحیح حصہ منفی ہے لیکن اعشاریہ لوکارتمی مثبت ہے۔

ایک اور مثال لو، ۱۴۹۸۹۶ قائم مقام - ۳ + ۳۱۳۱۴۱۴۱۴۱۴ کا ہے۔

۱۴۸ - کسی عدد کے لوکارتم کا مینر صرف دیکھنے ہی سے معلوم ہو سکتا ہے۔

(۱) فرض کرو کہ عدد ایک سے بڑا ہے۔

چونکہ $1 = 1$ اس لئے لوک $1 = 0$ ۔

چونکہ $10 = 1$ اس لئے لوک $10 = 1$ ۔

چونکہ $100 = 2$ اس لئے لوک $100 = 2$ ۔

اور علیٰ ہذا قیاس

اس لئے معلوم ہوا کہ جو عدد ۱ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہو

اُس کا لوکارتم صفر اور ۱ کے درمیان واقع ہوگا یعنی لوکارتم

ایک کسر اعشاریہ ہوگا۔

اس لئے اس کا مینر صفر ہوگا

ایسے ہی جو عدد ۱۰ اور ۱۰۰ کے درمیان واقع ہو اُس کا لوکارتم

۱ اور ۲ کے درمیان واقع ہوگا، یعنی اس کا مینر ایک ہوگا

اسی طرح سے جو عدد ۱۰۰ اور ۱۰۰۰ کے درمیان واقع ہو اس کا

لوکارتم ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگا یعنی اُس کا مینر ۲ ہوگا

ایسے ہی اگر عدد ۱۰۰۰ اور ۱۰۰۰۰ کے درمیان واقع ہو تو اُس کا مینر ۳ ہوگا اور بالعموم کسی عدد کے لوکارتم کا مینر اُن ہندسوں کی تعداد سے جو اس کے صحیح حصہ میں شامل ہوں بقدر ایک کے کم ہوگا

مثلاً عدد ۲۹۶۳۴۵۷ کے صحیح حصہ میں ۳ ہندسے ہیں اس لئے اسکے لوکارتم کا مینر ۲ ہے

۲۹۶۳۴۵۷ کے لوکارتم کا مینر ۵-۱ یعنی ۴ ہے

(۲) فرض کرو کہ عدد ایک سے کم ہے

چونکہ $1 = 1$ اس لئے لوگ $1 = 0$

" $10 = \frac{1}{10}$ اس لئے لوگ $10 = -1$

" $100 = \frac{1}{100}$ اس لئے لوگ $100 = -2$

" $1000 = \frac{1}{1000}$ اس لئے لوگ $1000 = -3$

اور علیٰ ہذا قیاس

اس لئے معلوم ہوا کہ اگر عدد ۱ اور ۱۰ کے درمیان واقع ہو تو اس کا لوکارتم صفر اور -۱ کے درمیان واقع ہوگا، پس لوکارتم مطلوب -۱ + ایک کسر اعشاریہ کے برابر ہوگا یعنی اس کا مینر آ ہوگا۔

ایسے ہی جو عدد ۱۰ اور ۱۰۰ کے درمیان واقع ہو اس کا لوکارتم -۱ اور -۲ کے درمیان واقع ہوگا اور اس لئے وہ

-۲ + ایک کسر اعشاریہ کے برابر ہوگا یعنی اس کا مینر ۲ ہوگا اسی طرح سے جو عدد ۱۰۰ اور ۱۰۰۰ کے درمیان واقع ہو اُس کا

لوکارتم ۲۔ اور ۳ کے درمیان واقع ہوگا یعنی اُس کا میز ۳۲ ہوگا اور معلوم ہوا کہ کسی کسر اعشاریہ کے لوکارتم کا میز منقعی ہوتا ہے اور علامت اعشاریہ کے بعد پہلے ملحوظ ہند سے تک جتنے صفر ہوں میز اُن سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتا ہے۔

کیونکہ جو کسر اور ا کے درمیان واقع ہو (مثلاً ۵) اُس میں علامت اعشاریہ کے بعد کوئی صفر نہیں ہو سکتا اور ہم کو معلوم ہے کہ اس کا میز آ ہے ' نیز جو کسر ا اور ا کے درمیان واقع ہو (مثلاً ۵۰۰) اُس میں عین علامت اعشاریہ کے بعد ایک صفر ہوگا اور ہم جانتے ہیں کہ اس کا میز آ ہے۔

جو کسر ا اور ۵۰۰ کے درمیان واقع ہو (مثلاً ۵۰۰۳) اس میں عین علامت اعشاریہ کے بعد دو صفر ہونگے، اور ہم کو معلوم ہے کہ اس کا میز ۳۲ ہے کسی اور کسر کی بھی یہ ہی کیفیت ہے۔

۱ مثلاً عدد ۵۰۰۸۳۵ کے لوکارتم کا میز ۳۲ ہے

عدد ۵۰۰۰۰۰۵۳ کے لوکارتم کا میز ۶ ہے

عدد ۵۳۴۵۶۷ کے لوکارتم کا میز آ ہے

۱۴۹۔ جن عددوں کی ترکیب میں وہی ہند سے شامل ہوں

اُن کے اعشاریہ لوکارتمی وہی ہونگے ہیں۔

اس کی توضیح ایک مثال سے ہوگی۔

فرض کرو کہ ہمیں معلوم ہے

$$\text{لوک } ۴۵۸۲۳۸۹۳۵ = ۶۶۸۱۸$$

$$\text{تو لوک } ۴۵۸۲۳۸۹۳۵۰۰ = ۶۶۸۱۸ + ۲ = ۶۶۸۲۰$$

$$\begin{aligned} ۲۵۸۲۳۸۹۳۵ &= ۲ - ۳۵۸۲۳۸۹۳۵ = \\ \text{لوک } ۴۴۸۱۸ &= \text{لوک } \frac{۴۴۸۱۸}{۱۰۰۰۰} = \text{لوک } ۴۴۸۱۸ - \text{لوک } ۱۰۰۰۰ \text{ (دفعہ ۱۴۴)} \end{aligned}$$

$$۲۵۸۲۳۸۹۳۵ = ۵ - ۳۵۸۲۳۸۹۳۵ =$$

$$\text{نیز لوک } ۴۴۸۱۸ = ۵۰۰۰۰۴۴۸۱۸ = \text{لوک } ۴۴۸۱۸$$

$$\text{لوک } ۴۴۸۱۸ - \text{لوک } ۱۰ = ۳۵۸۲۳۸۹۳۵ = ۸ - ۳۵۸۲۳۸۹۳۵ =$$

اب اعداد ۴۴۸۱۸، ۴۴۸۱۸، ۴۴۸۱۸ اور ۵۰۰۰۰۴۴۸۱۸ میں ملحوظ
ہندسے وہی ہیں صرف علامت اعشاریہ کے مقام میں فرق ہے
ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اُن کی لوکارتموں میں حصہ اعشاریہ وہی
ہے صرف میز مختلف ہیں۔

ہر ایک صورت میں میز کی قیمت قانون دفعہ گزشتہ کی مدد سے
معلوم ہوتی ہے۔

یاد رہے کہ لوکارتم کا اعشاریہ لوکارتمی ہمیشہ مثبت ہوتا ہے۔

۱۵۰۔ لوکارتمی جدولیں اسے لیکر ۱۰۸۰۰۰ تک تمام
اعداد کے لوکارتم چمبر صاحب کی لوکارتمی جدولوں میں مندرج
ہیں اور یہ قیمتیں سات مرتبہ کے اعشاریہ تک صحیح ہیں۔

طالب علم کے پاس چمبر کی جدول یا کسی اور اچھی جدول کا ایک نسخہ
موجود ہونا چاہیئے آئندہ چند بابوں میں کئی مثالیں حل کرنے میں
اس کی ضرورت ہوگی۔

مقابل کے صفحہ پر چمبر کی جدولوں سے ایک صفحہ بطور نمونہ کے منتخب
کیا گیا ہے اس میں ۵۲۵۰۰ سے لیکر ۵۳۰۰۰ تک تمام اعداد صحیح
کے اعشاریہ لوکارتمی مندرج ہیں۔

ታሪክ

ገ

ሐ

ረ

ሐ

ወ

ረ

ሐ

ረ

ሐ

ረ

ሐ

ረሐ.

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

ሐሐሐሐ

312

[illegible]

۲۲

نوع

ق ا ل ه و ز ح ط ذ ر ز س د ن ت ث ي ك

عدد

٤٢١	٩٢٤٢	٩٥٨٩	٩٥٠٤	٩٣٢٢	٩٣٢٢	٩٢٤٠	٩١٤٤	٩٠٩٥	٩٠١٣	٨٩٣٠	٥٢٤١
٤٢٢	١٣١٩	١٣٣٤	١١٥٢	١٠٤٢	٠٩٩٠	٠٩٠٤	٠٨٢٥	٠٤٢٢	٠٤٤٨	٠٤٤٨	٤٣
١٢٢	٢٠٤٠	١٩٤٨	١٨٩٥	١٨١٣	١٤٢١	١٤٢٨	١٥٤٤	١٣٨٢	١٣٠١	١٣٠١	٤٢
٢٥٢	٢٩٩٤	٢٨٨٣	٢٨٠١	٢٤١٩	٢٣٣٤	٢٥٥٢	٢٢٤٢	٢٣٨٩	٢٣٠٤	٢٢٢٥	٤٥
٢٢٢	٢٤٨٩	٢٤٠٤	٢٣٣٢	٢٥٢٢	٢٢٢٥	٢٣٤٤	٢٢٩٥	٢٣١٢	٢٣١٣	٢٣٠٨	٤٦
٢٢٢	٢٤٩١	٢٤٢٩	٢٢٢٢	٢٢٣٥	٢٢٨٢	٢٢٠٠	٢١١٨	٢٠٣٤	٢٢٩٥	٢٢٤١	٤٧
٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٤٨
٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٤٩
٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٥٠

تاريخ

رقم

٩

٨

٧

٦

٥

٤

٣

٢

١

٠

مجموع

٥٢

رقم	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	٠	مجموع
٤٢٢	٤٩٠٢	٤٨٢٠	٤٤٢٤	٤٧٥٥	٤٥٤٢	٤٢٩١	٤٢٠٨	٤٢٢٧	٤٢٢٢	٤١٧٢	٥٢٣١
٨٤٢٢	٨٧٢٢	٨٥٥٩	٨٢٤٤	٨٢٩٥	٨٢١٢	٨٢٢١	٨١٢٨	٨٠٧٧	٨٠٧٢	٨٠٧٢	٨٢٣١
٩٥٢٧	٩٢٧٢	٩٢٨٢	٩٢٩٩	٩٢١٤	٩١٢٥	٩٠٥٢	٨٩٤١	٨٨٨٨	٨٨٠٧	٨٨٠٧	٨٢٣١
١٧	٠٢٧٨	٠٢٨٧	٠٢٠٢	٠١٢١	٠٠٢٩	٩٩٥٤	٩٨٤٥	٩٤٩٢	٩٤١٠	٩٧٢٨	٨٢٣١
٢٥	٤٢٢٣	١١٨٩	١١٠٤	١٠٢٥	٠٩٢٢	٠٨٧١	٠٤٤٩	٠٧٩٧	٠٧١٢	٠٥٢٧	٨٥
٣٢											
٣١											
٣٩	٢٠١١	١٩٢٩	١٨٢٤	١٤٧٥	١٧٨٢	١٧٠٠	١٥١٨	١٢٢٧	١٢٥٢	١٢٤٢	٨٧
٥٤											
٧٧	٢٨٢٢	٢٤٥٠	٢٧٧٨	٢٥٨٧	٢٥٠٢	٢٢٢٢	٢٢٢٢	٢٢٥٤	٢١٤٥	٢٠٩٢	٨٤
٤٢											
٩	٢٧٥٢	٢٥٤١	٢٢٨٩	٢٢٠٤	٢٢٢٥	٢٢٢٢	٢١٧١	٢٠٤٩	٢٩٩٤	٢٩١٢	٨٨
	٢٢٢٤٥	٢٢٢٢٢	٢٢٢١٠	٢٢٢٢٨	٢١٢٢٧	٢٠٧٢٢	٢٠٧٢٢	٢٠٧٢٢	٢٠٧٢٢	٢٠٧٢٢	٨٨
	٥٢٩٧	٥٢١٢	٥١٢١	٥٠٢٩	٢٩٧٤	٢٨٨٥	٢٨٠٢	٢٤٢١	٢٧٢٩	٢٥٥٤	٩٠

۱۵۱- فرض کرو کہ ہمیں عدد ۵۲۶۸۷ کا لوکارتم مطلوب ہے۔ جدول کے دائیں طرف سب سے پہلے خانے میں اوپر سے نیچے کی طرف دیکھتے جاؤ اور عدد ۵۲۶۸۷ کو تلاش کرو جب یہ عدد ملجائے تو عین اس مقام سے افقی سطر میں بائیں طرف دیکھتے جاؤ جب تک کہ نوٹ اُس خانے کی نہ آجائے جس کے سر پر سب سے اوپر عدد ۷ لکھا ہوا ہے، اس خانے میں ہم کو عدد ۷۰۳۵ ملے گا، اس سے ہم کو یہ معلوم ہوا کہ ۵۲۶۸۷ کا متعلقہ عدد جدول میں ۷۰۳۵۷۲۱ ہے لیکن اس عدد میں صرف اعشاریہ لوکارتمی کے ہند سے شامل ہیں یعنی اعشاریہ لوکارتمی مطلوب ۷۰۳۵۷۲۱۷ ہے، لیکن ۵۲۶۸۷ کا میز ۴ ہے اس لئے

$$\text{لوک } ۵۲۶۸۷ = ۷۰۳۵۷۲۱۷$$

$$\text{پس لوک } ۷۰۳۵۷۲۱۷ = ۲۵۷۲۱۷۰۳۵$$

$$\text{اور لوک } ۲۵۷۲۱۷۰۳۵ = ۷۰۳۵۷۲۱۷$$

اگر ۵۲۷۲۵ کا لوکارتم مطلوب ہو تو طالب علم کو چاہیئے کہ جدول کے دائیں طرف پہلے خانے میں اوپر سے نیچے کی طرف دیکھتا جائے جب تک کہ عدد ۵۲۷۲۵ کی نوٹ نہ آجائے اس کے بعد افقی سطر میں بائیں طرف اُس خانے تک دیکھتا جائے جس کے اس پر ۵ لکھا ہوا ہے، وہاں اُس کو عدد ۱۶۶۷ لکھا ہوا ملے گا، ان ہندوں پر خط افقی کا یہ مطلب ہے کہ ان کے باقی ۱۶۶۷ لکھنا چاہیئے، نیز ۷۲۱ اس سے معلوم ہوا کہ عدد ۵۲۷۲۵ کے متعلق اعشاریہ لوکارتمی ۱۶۶۷۰۳۵۷۲۱ ہے۔

نیز عدد ۵۲۷۲۵ کا میٹر ۳ ہے

اس لئے لوک $۵۲۷۲۵ = ۳۷۷۲۲۰۱۶۶$

پس لوک $۳۷۷۲۲۰۱۶۶ = ۵۰۵۲۷۲۵$

اب ہم چند عددی مثالیں حل کریں گے جن سے علی حسابات میں
لوکارتم کے استعمال کی صلاحیت واضح ہوگی

۱۵۲۔ مثال ۱۔ نمبر ۲۳۳ کی قیمت دریافت کرد

فرض کرو کہ لا = نمبر ۲۳۳ = $(۳۳۳)^{\frac{1}{3}}$

یعنی لوک لا = $\frac{1}{3}$ لوک (۳۳۳) ... دفعہ ۱۳۵

اب جدول لوکارتمی میں عدد ۲۳۳ کے محاذی ہم کو اُس کا لوکارتم ۳۷۹۲۱۵۹
لکھا ہوا ہے۔ لکھا۔

اس لئے لوک $۳۷۹۲۱۵۹ = ۲۳۳$

اس لئے لوک لا = $\frac{1}{3}$ [۳۷۹۲۱۵۹] = ۵۲۷۳۸۳۳۲

نیز لوکارتم ۲۷۳۸۳۳۲ کے متعلق جدول سے عدد ۱۸۷۸۶۴ ملے گا پس

لوک $۱۸۷۸۶۴ = ۵۲۷۳۸۳۳۲$

لا = ۱۸۷۸۶۴

مثال ۲۔ کی قیمت دریافت کرد

$$\frac{(۹۳۷۵)^3 \times ۳}{(۹۳۷۵)^2 \times ۳} = \frac{۳ \times ۳ \times ۳}{۳ \times ۳} = ۳$$

فرض کرو کہ لا قیمت مطلوبہ ہے اس لئے ہو سب دشوار ۱۳۳ اور ۱۲۵

لوک لا = لوک (۹۳۷۵) + ۳ لوک (۳) = لوک (۳۰۰۳۳) = $\frac{1}{3}$ لوک (۹۳۷۵) = لوک (۸۲۹۳)

= ۳ لوک (۹۳۷۵) + $\frac{1}{3}$ لوک (۳۰۰۳۳) = ۲ لوک (۹۳۷۵) = $\frac{1}{3}$ لوک (۸۲۹۳)

اب جدولوں سے معلوم ہوگا کہ

۶۴۵	کے محاذی لوکارتم	۸۰۹۵۵۹۷	۷
۳۴	"	۵۳۱۴۷۸۹	"
۹۳۷	"	۹۷۱۷۳۹۶	"
۸۹۳	"	۹۵۰۸۵۱۵	"

اس لئے

$$\text{لوک لا} = ۸۰۹۵۵۹۷ \times ۳ + \frac{۱}{۳} (۵۳۱۴۷۸۹) =$$

$$- ۵۳۱۴۷۸۹ \times ۲ + \frac{۱}{۲} (۹۷۱۷۳۹۶) =$$

$$\text{لیکن } \frac{۱}{۳} (۵۳۱۴۷۸۹) = \frac{۱}{۲} (۹۷۱۷۳۹۶ + ۴) =$$

$$۵۸۴۳۸۲۴۳ + ۲ =$$

$$\text{اس لئے لوک لا} = [۵۸۴۳۸۲۴۳ + ۲] + ۲۵۳۲۸۹۷۹۱ =$$

$$۱۵۹۴۳۴۷۹۲ - ۲۳۷۷۱۲۹ =$$

$$۱۵۷۰۵۷۶۶۲ - ۳۵۱۸۱۱۹۲۱ =$$

$$۱۲۱۸۷۶۴۵۰۵۴ + ۱ =$$

$$۱۲۱۸۷۶۴۵۰۵۴ =$$

جدولوں سے عدد ۱۲۳۴۰ کے مقابل لوکارتم ۰۹۱۳۱۵۲ لکھا ہوا ملے گا

پس

$$\text{لوک } ۱۲۳۴۰ = ۰۹۱۳۱۵۲$$

$$\text{اس لئے لوک لا} = \text{لوک } ۱۲۳۴۰ \text{ تقریباً}$$

$$\text{اور اس لئے لا} = ۱۲۳۴۰ \text{ تقریباً}$$

جب کسی عدد کا لوکارتم جدول کے کسی لوکارتم کے بالکل مطابق نہ ہو لیکن دو متصل لوکارتموں کے درمیان واقع ہو تو اس صورت میں بھی عدد دریافت

ہو سکتا ہے اس کا بیان اگلے باب میں ہوگا۔

مثال ۳۔ معلوم ہے لوک $2 = 30.103$

عدد ۲^{۴۰} میں ہندسوں کی تعداد اور ۲^{۴۰} میں پہلے ملحوظ ہندسے کا مقام دریافت کرو۔

لوک $2 = 2 \times 4 = 30.103 \times 4 = 20.149.0$

چونکہ ۲^{۴۰} کے لوکارتم کا میز ۲۰ ہے اس لئے بوجب دفعہ ۱۴۸ اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ ۲^{۴۰} میں ۲۱ ہندسے ہیں

نیز لوک $2 = 30.103 \times 3 = 30.103 \times 3 = 2$

$$13584189 = 11513811 =$$

اس لئے بوجب دفعہ ۱۴۸ عدد ۲^{۴۰} میں علامت اعشاریہ کے بعد ۱۱ صفر ہیں اس سے معلوم ہوا کہ پہلا ملحوظ ہندسہ کسر اعشاریہ میں بارہویں مقام پر ہے

مثال ۴۔ معلوم ہے لوک $3 = 5361213$

لوک $4 = 845.980$ اور لوک $11 = 150.113926$

مسادات $3 \times 4 = 12 = 11 + 1$ کو حل کرو

طرفین کے لوکارتم لینے سے حاصل ہوگا

$$\text{لوک } 3 + \text{لوک } 4 = \text{لوک } 12 = 11 + 1$$

$$\therefore \text{لا } \text{لوک } 3 + \text{لوک } 4 = \text{لوک } 12 = 11 + 1$$

$$\therefore \text{لا } [\text{لوک } 3 + \text{لوک } 4] = \text{لوک } 12 = 11 + 1$$

$$\therefore \text{لا } \text{لوک } 3 + \text{لوک } 4 = \text{لوک } 12 = 11 + 1$$

$$5361213 + 845.980 = 5361213$$

$$= 5361213 + 845.980 = 5361213$$

$$۳۶۸۷۰۰۰ = ۳۶۸۷۰۰۰$$

$$۱۵۱۲۵۹۲۲۶$$

۱۵۳ - ثابت کرو کہ

$$\text{لوک م} = \text{لوک پ م} \times \text{لوک ب}$$

فرض کرو کہ $\text{لوک م} = \text{لا}$ یعنی $\text{لا} = \text{م}$
 نیز فرض کرو کہ $\text{لوک پ م} = \text{فا}$ یعنی $\text{فا} = \text{پ م}$
 $\therefore \text{لا} = \text{ب}$

اس لئے $\text{لوک (لا)} = \text{لوک (ب)}$

$\therefore \text{لا} = \text{ما لوک ب}$ (دفعہ ۱۳۵)

$$\text{اس لئے لوک م} = \text{لوک پ م} \times \text{لوک ب}$$

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ جب کسی عدد کا لوکار تم اساس ب پر معلوم ہو تو مسئلہ مندرجہ بالا کی اعانت سے ہم اُسی عدد کا لوکار تم کسی اور اساس لا پر دریافت کر سکتے ہیں، اگلے باب سے معلوم ہوگا کہ لوکارتموں کو بلا واسطہ اساس ۱۰ کے موافق نہیں نکالنا چاہیئے بلکہ اس میں زیادہ سہولت ہے کہ ان کو سب سے اول ایک اور اساس کے موافق نکالا جائے اور پھر اس مسئلہ کی مدد سے انکو اساس ۱۰ میں منتقل کر دیا جائے۔

امثلہ نمبری ۲۳

- ۱۔ اگر لوک ۳ = ۶۰۲۰۶ اور لوک ۳ = ۱۲۱۳۷۷۷
 تو ۸ و ۱۰۰۳ و ۱۰۸ اور (۱۸۰۰۰) کے لوکارقم دریافت کرو
- ۲۔ معلوم ہے لوک ۱۱ = ۱۰۳۹۲۷ اور لوک ۱۳ = ۱۱۳۹۳۳۷ اور
 مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو
 (۱) لوک ۱۴ اور (۲) لوک ۱۳ اور (۳) لوک ۱۲ اور
 (۴) لوک ۱۱ اور ۱۰۰۱۹۹
- ۳۔ ۲۳۳۷۷، ۱۵۳، ۲۷۸۷۱۳، ۷۷۷۷۷، ۲۳ اور
 ۱۴۱۵۷ اور (۲۳۵۸۹) کے لوکارمتوں کے میسر دریافت کرو
- ۴۔ عدد ۱۰۰۳ کا پانچواں جذر دریافت کرو
 معلوم ہے لوک ۳ = ۱۲۱۳۷۷ اور
 لوک ۳۱۲۹۳۶ = ۵۷۳۹۵۲۲۳
- ۵۔ مفصلہ ذیل کی قیمتیں دریافت کرو
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) (۸۴) اور (۳) (۷۰۲) کے
 معلوم ہے لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ اور لوک ۳ = ۱۲۱۳۷۷
- لوک ۷ = ۸۴۵۰۹۸۰ اور لوک ۱۳۲۰۵۷ = ۱۲۰۷۷۷
 لوک ۵۸۸۳۵۳ = ۵۷۷۷۷ اور لوک ۲۷۱۷۹ = ۷۷۷۷۷
- ۶۔ معلوم ہے لوک ۳ = ۱۲۱۳۷۷
 مفصلہ ذیل میں ہندسوں کی تعداد دریافت کرو
 (۱) ۳ (۲) ۳ اور (۳) ۳

اور اعداد ذیل میں پہلے ملحوظ ہندسے کا مقام دریافت کرو

$$(۴) ۳۰۰ (۵) ۳۰۰ اور (۶) ۳۰۰$$

$$۶ - \text{معلوم ہے لوک } ۳ = ۳۰۰ \text{ اور لوک } ۳ = ۳۰۰$$

$$\text{اور لوک } ۳ = ۳۰۰$$

معادلات ذیل کو حل کرو۔

$$(۱) \quad ۳ = ۳ + ۳ \times ۳$$

$$(۲) \quad ۳ = ۳ + ۳ \times ۳$$

$$(۳) \quad ۳ = ۳ - ۳ \div ۳$$

$$(۴) \quad \begin{cases} ۳ = ۳ + ۳ \times ۳ \\ ۳ = ۳ - ۳ \div ۳ \end{cases}$$

۸ - جدولوں کی مدد سے ۲۶۷۵۱۰۰۰ کا ساتواں جنر دریافت کرو

نوکارتی جدولوں کی مدد سے مفصلہ ذیل کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو

$$۹ - \quad ۳۳۵ \div ۳ \quad ۱۰ - \quad ۳۳۵ \div ۳$$

$$۱۱ - \quad \frac{۳۳ \times ۵۵}{۹۳ \times ۸۳} \quad ۱۲ - \quad \frac{۸۵ \times ۳۳}{۱۶۵ \div ۹۳}$$

$$۱۳ - \quad \frac{۳۳ \times ۵۵}{۹۳ \times ۸۳}$$

جملات ذیل کی ترسیات کھینچو ۱۳ - لوک لا ۱۵ - لوک جب لا

$$۱۴ - \quad \text{لوک جم لا} \quad ۱۵ - \quad \text{لوک مس لا}$$

$$۱۸ - \quad \text{لوک قم لا} \quad ۱۹ - \quad \text{لوک مم لا}$$

باب یازدہم

لوکارتموں اور مثلثی نسبتوں کی جدولیں

اصول اجزائے متناسب

۱۵۴۔ اوپر اس کا ذکر آچکا ہے کہ اسے لیکر ۱۰۸۰۰ تک تمام اعداد کے لوکارتم چیمبر صاحب کی جدول حسابیہ میں مندرج ہیں مثلاً اعداد ۴۳۵۸۳۴ اور ۴۴۵۸۳۴ کے لوکارتم بلا واسطہ ان جدولوں سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

مگر فرض کرو کہ ہمیں ایک ایسے عدد کا لوکارتم مطلوب ہے جو ان دو عددوں کے درمیان واقع ہے مثلاً ایک ایسا عدد ۴۴۵۸۳۴۳۴ ہے۔ اس عدد کا لوکارتم معلوم کرنے کے لئے ہم اصول اجزائے متناسب سے مدد لیتے ہیں جس کا مطلب یہ ہے کہ کسی عدد کے لوکارتم کی افزائش خود اس عدد کی افزائش کے متناسب ہوتی ہے۔

مثلاً جدولوں سے حاصل ہوگا

$$\text{لوک } ۴۴۵۸۳ = ۴۴۵۸۳۹۸۲۶۸۴ \dots (۱)$$

اور لوک $۴۳۵۸۴ = ۴۳۵۸۳ + ۱$ (۲)
 اب مقدار لوک ۴۳۵۸۳ سرچا لوک ۴۳۵۸۳ اور
 لوک ۴۳۵۸۴ کے درمیان واقع ہوگی۔
 فرض کرو کہ لوک $۴۳۵۸۳ = ۴۳۵۸۳ + ۱$

(۳) لا $۴۳۵۸۳۹۸ =$
 (۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ جب عدد کی زیادتی ایک ہو تو لوکارتم
 کی زیادتی ۵۹ ہوتی ہے۔
 اب مسئلہ اجزائے متناسب کا منشا یہ ہے کہ عدد کی زیادتی ۳ کے
 واسطے لوکارتم کی زیادتی $۳ \times ۵۹ = ۱۷۷$ یعنی ۱۷۷ ہو
 اس لئے لوک $۴۳۵۸۳۹۸ = ۴۳۵۸۳ + ۱۷۷$

$$۴۳۵۸۳۹۸ = ۴۳۵۸۳ + ۱۷۷$$

۱۵۵۔ بطور ایک اور مثال کے ہم لوک ۴۳۵۸۳۹۸ کی
 قیمت دریافت کریں گے اور عمل کو ایک مختصر صورت میں ترتیب
 دیں گے۔

جدولوں سے حاصل ہوگا۔

$$۴۳۵۸۳۹۸ = ۴۳۵۸۳ + ۱۷۷$$

$$۴۳۵۸۳۹۸ = ۴۳۵۸۳ + ۱۷۷$$

$$۱۷۷ = ۱۷۷$$

$$۱۷۷ \times ۱۷۷ = ۱۷۷$$

$$۱۷۷ = ۱۷۷$$

$$\text{لوک } ۶۵۸۲۹۱۵۲ = ۶۰۳۸۲۷۵۷$$

$$۶۰۰۰۰۰۷۹۱ +$$

$$۶۵۸۲۹۲۳۱۱ =$$

اب چونکہ ہمیں صرف سات مرتبہ کے اعشاریہ تک لوکارتموں کی ضرورت ہے اس لئے ہم آخری ہندسے کو حذف کرتے ہیں پس جواب مطلوب ۶۵۸۲۹۲۳۱ ہے

۱۵۶- اوپر کے سوال کا عکس یہ ہے "ایک عدد کا لوکارتم معلوم ہے وہ عدد دریافت کرو" اکثر عملی حسابات میں اس سوال کا حل مطلوب ہوتا ہے۔

اب اگر دیا ہوا لوکارتم جدول میں موجود ہو تو عدد باسانی حاصل ہو سکتا ہے مگر جب ایسا نہ ہو تو طریق عمل کی توضیح مسئلہ ذیل سے ہوگی۔

ایک عدد کا لوکارتم ۲۵۶۲۸۳۹۲۴ ہے اُس کو معلوم کرو جدولوں میں تلاش کرنے سے معلوم ہوگا کہ لوکارتم ۶۲۸۳۹۲۴ جدول میں موجود نہیں لیکن اس کے قریب ترین لوکارتم ۶۲۸۳۸۸۹ اور ۶۲۸۳۹۹۱ موجود ہیں اور ان کے درمیان لوکارتم معلوم واقع ہے۔

$$\text{پس لوک } ۶۲۸۳۸۸۹ = ۴۲۵۶۰۰ \dots (۱)$$

$$\text{اور لوک } ۶۲۸۳۹۹۱ = ۴۲۵۶۰۱ \dots (۲)$$

$$\text{فرض کرو کہ لوک } (۷ + ۴۲۵۶۰۰) = ۶۵۶۲۸۳۹۲۴ \dots (۳)$$

(۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ عدد کے فرق ۰.۱ کے مطابق لوکارتم کا فرق

$$۶۰۰۰۰۰۱۰۲ \text{ ہے۔}$$

نیز (۱) اور (۳) سے ہم دیکھتے ہیں کہ عدد کے فرق لا کے مطابق لوکارتم کا فرق ۳۵ ۱ ہے۔

اس لئے ہمیں حاصل ہوگا

$$لا : ۵۰۱ = ۳۵ ۱۰۲ : ۵۰۰۰۰$$

$$\therefore لا = ۳۵ \times \frac{۵۰۱}{۱۰۲} = \frac{۱۷۵۳۵}{۱۰۲} = ۱۷۲۳۳.۳۳۳ \dots \text{ تقریباً}$$

اس لئے عدد مطلوب = ۱۷۲۳۳ + ۳۲۵۵۰۰ = ۱۷۲۳۳۳۲۵

۱۵۷۔ جب لوکارتموں کو جدولوں سے لیا جائے تو مستقل لوکارتموں کو ایک دوسرے سے منفی کرنیکی محنت سے ہم اس طرح بچ سکتے ہیں۔

صفحات ۲۱۳ تا ۲۱۷ کے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ بائیں طرف کے آخری خانے کے سر پر فرق لکھا ہوا ہے اور سب سے اوپر عدد ۸۲ ہے، اس کا یہ مطلب ہے کہ صفحہ مذکورہ پر جو اعداد ہیں اگر ان کا فرق ایک ہو تو ان کے متعلقہ لوکارتموں کا فرق ۸۲ ہوتا ہے کیونکہ عدد ۸۲ دراصل قائم مقام ۸۲ کا ہے

۸۲ کے نیچے متواتر سطروں میں ۱، ۲، ۳، کے متعلقہ فرق دئے ہوئے ہیں مثلاً پانچویں سطر میں ۵ کے مطابق فرق ۴۱ ہے۔

بطور ایک مثال کے ۴۷۶۴۵۲۷ کا لوکارتم دریا فت کرو صفحہ (۲۱۵) پر لوک ۵۲۷۴۷ = ۴۷۶۴۲۱۸۹۵

فرق ۷ کے لئے = ۵۷۷ ۵

فرق ۴ کے لئے

$$\left(= \frac{1}{10} \times \text{فرق شعلقہ} \right) = ۳۰۰۰۰۰۰۰$$

$$\therefore \text{لوک} = ۳۰۴۶۴۵۵ = ۵۲۴۳۴۵۵$$

اب ہم دو اور مثالیں حل کریں گے جن میں تمام لوکار تم جدولوں سے لئے جائیں گے اور صرف ضروری عمل مندرج ہوگا۔

مثال ۱۔ ۳۰۳۵۴۳ کا ساواں جذر دریافت کرو۔

فرض کرو کہ لا مقدار مطلوبہ ہے تب

$$\text{لوک لا} = \frac{1}{2} \text{ لوک } (۳۰۳۵۴۳) = \frac{1}{2} (۳۵۳۸۴۹۶)$$

$$= \frac{1}{2} (۳۵۳۸۴۹۶ + ۲)$$

$$\begin{array}{r} ۲۱۱ (۱۵۰) \\ ۱۳۲ \\ \hline ۸۰ \\ ۷۱ \\ \hline ۹۰ \\ ۷۱ \\ \hline ۱۹ \end{array}$$

$$\therefore \text{لوک لا} = ۳۵۳۸۴۹۶$$

$$\text{لیکن لوک} = ۳۵۳۸۴۹۶ = ۳۵۳۸۴۹۶$$

$$\text{فرق} = ۱۵۰۰۰۰۰۰$$

$$\text{لیکن فرق } ۱۰۰۰۰۰۰۰ \text{ کیلئے} = ۷۰۰۰۰۰۰۰$$

$$\text{اسلئے مطلوبہ زیادتی} = ۲۱۱۰۰۰۰۰۰$$

$$\text{اس لئے لا} = ۳۵۳۸۴۹۶ + ۲۱۱ = ۳۵۳۸۴۹۸$$

مثال ۲۔ اگر ۳۵۳۸۴۹۸ اور ۳۵۳۸۴۹۶ = ۲۸۳۳۴۹۱۲ تو

۱۔ ب کے جذر المربع کی قیمت دریافت کرو۔

اگر لا مقدار مطلوبہ ہو تو ۲ لوک لا = لوک (۱۔ ب)

$$= \text{لوک (۱۔ ب)} + \text{لوک (۱۔ ب)} = \text{لوک } ۳۵۳۸۴۹۸ + \text{لوک } ۳۵۳۸۴۹۶ = ۴۲۹۱۰۴۴۲$$

$$\text{اب} \quad ۳۵۳۸۴۹۸ \mid ۴۲۹۱۰۴۴۲$$

$$\begin{array}{r} ۷ \\ ۵۹ \end{array}$$

$$\text{اس لئے لوک } ۳۵۳۸۴۹۸ = ۴۲۹۱۰۴۴۲$$

$$\begin{array}{r|l} ۳۵۷۹۸۷۱۹۷ & = ۶۲۹۱۰۵۰۰۰ \text{ لوک} \\ ۳۱ & ۶ \\ ۲۸ & ۳ \\ ۱۴ & ۲ \end{array}$$

$$۳۵۷۹۸۷۲۳۰۹۴ = ۶۲۹۱۰۵۴۳۲ \text{ لوک}$$

$$۸۶۵۹۲۱۵۲۵۵۳ = ۲ \text{ لوک لا} = \text{اسلئے جمع کرنے سے}$$

$$۳۵۷۹۹۰۷۴۳ = \text{لوک لا} = \text{اس لئے}$$

$$۳۵۷۹۹۰۷۲۶ = ۱۹۷۷۳ \text{ لوک لیکن}$$

$$۳۷ = \text{فرق}$$

$$۲۲۰ = \text{فرق ۱ کے لئے لیکن}$$

$$۱۹۷۷۳ = ۱ \times \frac{۳۷}{۲۲۰} = \text{اسلئے متناسب زیادتی}$$

$$۱۹۷۷۳۱۹۷۸ = \text{لا}$$

۱۵۸- اس جگہ اصول اجزائے متناسب کا ثبوت نہیں دیا جائے گا یہ اصول صرف بعض حدود کے درمیان صحیح ہے اس کا استعمال صرف اُن عددوں کی صورت میں ہو سکتا ہے جن میں پانچ سے کم ملحوظ ہند سے نہ ہوں اور اس پر بھی ہم اپنے نتائج کی صحت کا صرف پانچ مرتبہ کے اعشاریہ تک اعتبار کر سکتے ہیں۔

مثلاً ہم کو یہ اصول لوک ۲ اور لوک ۳ کی قیمتوں سے لوک ۵ کی قیمت حاصل کرنے میں نہیں استعمال کرنا چاہیئے کیونکہ اگر ہم ایسا کریں تو چونکہ لوک ۲ = ۳۰۱۰۳ اور لوک ۳ = ۳۷۷۱۴۱۳ اس لئے لوک ۵ کی قیمت اس طرح سے ۳۸۹۰۷۵ ہوگی

مگر جدولوں میں لوک ۲۵ کی قیمت ۳۹۷۹۴۰۰، مندرج ہے اس لئے معلوم ہوا کہ اس طرح جو قیمت حاصل ہوگی وہ غلط ہوگی۔

مثلثی نسبتوں کی جدولیں

۱۵۹۔ چمبہ کی جدولوں میں ان سب زاویوں کی مثلثی نسبتیں مندرج ہیں جو ۰° اور ۴۵° کے درمیان واقع ہوں اور ان میں متواتر زاویوں کا فرق اُسے۔

اب چونکہ ۴۵° اور ۹۰° کے درمیان جو زاوے واقع ہوں انکی مثلثی نسبتیں ان زاویوں کی نسبتوں میں تحویل ہو سکتی ہیں جو ۰° اور ۴۵° کے درمیان واقع ہوں (دفعہ ۸۱) اس لئے معلوم ہوا کہ جو زاوے ۴۵° اور ۹۰° کے درمیان واقع ہوں ان کی مثلثی نسبتوں کی جدولوں کو جداگانہ مرتب کرنے کی ضرورت نہیں مثلاً

[جب ۱۱° = جب (۹۰° - ۴۹°۱۳) = جم ۴۹°۱۳ اس لئے

چیب مجوزہ معلوم ہو سکتی ہے] اس قسم کی جدولوں کو لوکار تھی جیوب، جیوب التمام وغیرہ کی جدولوں سے تمیز کرنے کے لئے ان کو طبعی جیوب، جیوب التمام کی جدولیں کہتے ہیں۔

اگر ایک ایسے زاوے کی جیب مطلوب ہو جس میں صرف درجوں اور دقیقوں کی صحیح تعداد شامل ہو تو وہ جدولوں سے

حاصل ہو سکتی ہے، لیکن اگر زاوے میں شانے بھی موجود ہوں تو اُس صورت میں ہمیں اصول اجزائے متناسب سے مدد لینا چاہیے۔

مثال ۱۔ معلوم ہے جب $۱۴۰۲۹ = ۳۸۸۳۶۷۴$

اور جب $۱۵۰۲۹ = ۳۸۸۶۲۱۲$

جب ۱۴۰۲۹ کی قیمت دریافت کرو

تفریق کرنے سے حاصل ہوگا

جیب کا فرق ۱ کے لئے $۳۸۰۰۰۲۵۳۸ =$

اس لئے جیب کا فرق ۳۲ کے لئے $= ۳۸۰۰۰۲۵۳۸ \times \frac{۳۲}{۱}$

$= ۱۳۵۳۶۰۰۰$

∴ جب $۱۴۰۲۹ = ۳۸۸۳۶۷۴$

$+ ۱۳۵۳۶۰۰۰$

$= ۳۸۸۵۰۲۷۹$

چونکہ ہمیں صرف سات مرتبہ کے اعشاریہ تک جواب کی ضرورت ہے اسلئے

ہم ۶ کو ساقط کرتے ہیں اور چونکہ ۷۶ بہ نسبت ۷۰ کے عدد ۸۰ کے زیادہ

قریب ہے اس لئے ہم لکھتے ہیں

جب $۱۴۰۲۹ = ۳۸۸۵۰۲۷۹$

یا دواشت جب اعشاریہ کے آٹھویں مقام سے کسی ہندسے کو ساقط

کیا جائے تو ساتویں مقام پر جو ہندسہ ہو اُس میں ۱ زیادہ کرنا چاہیئے

اگر عدد مسقوط ۵ یا ۵ سے بڑا ہو۔

مثال ۲۔ معلوم ہے جم $۲۷۹۶ = ۵۵۹۰۷۷۲$

۱۹۵۸۹۸۲۸ = ۴۸ ۹۴ ۲

جم ۹۶ ۶۷ ۴۷ کی قیمت دریافت کرو

دفعہ ۶۱ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ جب زاویہ بڑھتا ہے تو اس کی جیب تمام گھٹتی ہے۔

اس لئے خب زانوہ بقدر آ یعنی ۶۰ کے بڑھے گا توجیب انہام بقدر ۸۲۳ کے گھٹے گی۔

اور اس لئے جب زاویہ بقدر $\frac{2\pi}{3}$ کے بڑھے گا تو جیب تمام بقدر $\frac{2\pi}{3} \times 82.4 \dots$ کے گھٹے گی۔

$$s \dots \dots 822 \times \frac{96}{4} = 909.462 = 96 \text{ } 96 \text{ } 94 \text{ جم} \therefore$$

5000 475-5909.4645

590 9.424

5 . . . 480 -REV

5909.. 26 =

محترم! اس کو یوں لکھتے ہیں

سقا د اقا ملا = ۴۸ ۹۴

$$5959.442 = 5959 \frac{442}{1000} = 5959 \frac{1105}{2500}$$

فرق ا کیلئے = $843 - 800 = 43$

$$5 \dots \text{APF} \times \frac{96}{4} = \text{"96"}$$

444-425-22

5909-464 = جواب :-

SECRET

5909.0.24

$$\begin{array}{r} 155 \\ 66 \\ \hline 221 \\ 1594 \\ \hline 4) 2216 \\ 400 \\ \hline \end{array}$$

۱۶۰۔ جب کسی زاویہ کی ایک مثلثی نسبت دی ہوئی ہو تو اُس زاویہ کا دریافت کرنا اب آسان ہوگا۔

مثال۔ ایک زاویہ کا مماس التمام ۱۵۴۱۰۹۳۲۵ ہے اُس کو

معلوم کرو دیا ہوا ہے $\text{مم } ۱۹^{\circ}۳۵ = ۱۵۴۱۱۲۷۹۹$

اور $\text{مم } ۲۰^{\circ}۳۵ = ۱۵۴۱۰۶۰۹۸$

فرض کرو کہ زاویہ مطلوبہ $۱۹^{\circ}۳۵ + \text{لا}$ ہے

یعنی $\text{مم } (۱۹^{\circ}۳۵ + \text{لا}) = ۱۵۴۱۰۹۳۲۵$

اوپر کی تین مساواتوں سے ظاہر ہے کہ

جب زاویہ بقدر ۱۹° کے بڑھتا ہے تو اُس کا مماس التمام بقدر ۸۷۰۰۰ کے گھٹتا ہے

جب زاویہ بقدر لا کے بڑھتا ہے تو اس کا مماس التمام بقدر ۵۴۷۳ کے گھٹتا ہے۔

∴ $۱۹^{\circ}۳۵ = ۱۵۴۱۱۲۷۹۹$ اسلئے $\text{لا} = ۳۷۷۳$

پس زاویہ مطلوبہ $۱۹^{\circ}۳۵ + ۳۷۷۳$

۱۶۱۔ ایسے سوالات میں مسئلہ اجزائے تناسب استعمال

کرتے وقت طالب علم کو اس بات کا خیال رکھنا چاہیے کہ

جب زاویہ بڑھتا ہے تو اُس کی مثلثی نسبتیں بڑھتی ہیں یا گھٹتی

ہیں، شاید اس بات کے یاد رکھنے سے اُس کو مدد ملے کہ

جب زاویہ ربع اول میں بڑھتا ہے تو اُس کی تین مثلثی

نسبتیں جن کے آخر میں ”التمام“ ہے یعنی جیب التمام،

مماس التمام اور قاطع التمام گھٹتی ہیں۔

لوکار نمی جیوب، جیوب التمام وغیرہ کی جدولیں

۱۶۲۔ کئی قسم کے مثلثی حسابات ایسے ہیں (مثلاً مثلثات کا حل) جن میں مثلثی نسبتوں کے لوکار نمٹوں کی ضرورت پڑتی ہے اب اگر ہم سب سے اول جدولوں سے کسی زاویہ کی جیب دریافت کریں اور پھر اُس جیب کا لوکار تم دوبارہ جدولوں سے پڑھیں تو اس میں وقت ہوگی، ایسی محنت سے بچنے کے لئے مثلثی نسبتوں کے لوکار نمٹوں کی جدولیں جداگانہ مرتب کی گئی ہیں اور بموجب سابق ان جدولوں میں صرف ان زاویوں کی قیمتوں کا مندرج کرنا کافی ہے جو 0° اور 90° کے درمیان واقع ہوں۔ چونکہ زاویہ کی جیب ہمیشہ ایک سے کم ہوتی ہے اس لئے جیب کا لوکار تم منفی ہوگا [صفحہ ۱۴۸]

نیز چونکہ جو زاویہ 0° اور 90° کے درمیان واقع ہو اُس کا ماس ایک سے کم ہوتا ہے اس لئے اس کا لوکار تم ہمیشہ منفی ہوگا۔ لیکن جو زاویہ 90° اور 180° کے درمیان واقع ہوا سکے ماس ایک سے بڑا ہوتا ہے اس لئے اس کا لوکار تم ہمیشہ مثبت ہوگا۔

۱۶۳۔ ہر ایک صورت میں مثلثی جملوں کے لوکار نمٹوں کے ماقبل مناسب علامت تحریر کرنے کی محنت سے بچنے کے لئے جدولوں میں لوکار نمٹوں کی اصلی قیمتیں نہیں لکھی جاتیں لیکن ہر ایک لوکار تم کی اصلی قیمت پر دس کا اضافہ کر دیا

جاتا ہے

مثلاً جب $\frac{1}{p} = 30$

اس لئے لوک جب $30 = \text{لوک } \frac{1}{p} = - \text{لوک } 2$

$$7549896 = 130103 =$$

لیکن جدولوں میں جو قیمت مندرج ہوگی وہ

+10 لوک جب 30 یعنی 7549896 ہوگی

نیز $\frac{1}{p} = 40$

اس لئے لوک $\frac{1}{p} = 40 = \text{لوک } 3 = \frac{1}{p} (52441213)$

$$52385404 =$$

اس لوکارتم کی قیمت جدولوں میں

+10 52385404 یعنی 52385404 مندرج ہوگی۔

ان ”جدولی لوکارتموں“ کو ہم حرف ل سے تعبیر کریں گے

مثلاً ل جب $15 = 10 + \text{لوک جب } 15$

اور ل قط $28 = 10 + \text{لوک قط } 28$

۱۶ = اگر کسی زاویہ میں صرف درجوں اور دقیقوں کی

صحیح تعداد شامل ہو تو اس کے کسی جملہ کی جدولی لوکارتم بلا واسطہ

جدولوں سے حاصل ہو سکتی ہے، لیکن اگر زاویہ میں ثانیہ بھی موجود

ہوں تو اصول اجزائے تناسب کو استعمال کرنا چاہیے، اس

صورت میں ترکیب عمل دفعہ ۵۹ کے بالکل متشابه ہے۔

اب ہم اس کی اور اس کے عکس سوال کی ایک ایک مثال

حل کریں گے۔

مثال ۱۔ معلوم ہے ل قم ۳۲ ۲۱ = ۱۰۶۲۷۱۵۷۳۳

اور ل قم ۳۲ ۲۲ = ۱۰۶۲۷۱۳۷۴۰

ل قم ۳۲ ۲۱ ۵۱ کی قیمت دریافت کرو

جب زاویہ بقدر ۶۰ کے بڑھتا ہے تو اس کا لوکار تم بقدر ۱۹۹۳... کے گھٹا

ہے۔ اس لئے جب زاویہ بقدر ۵۱ کے بڑھے گا تو لوکار تم میں تناسب

کی برابر $\frac{۵۱}{۶۰} \times ۱۹۹۳ = ۱۶۹۴$ یعنی ۱۶۹۴ کے ہوگی

پس ل قم ۳۲ ۲۱ ۵۱ = ۱۰۶۲۷۱۵۷۳۳

- ۱۶۹۴ = ۱۰۶۲۷۱۴۰۳۹

= ۱۰۶۲۷۱۴۰۳۹

مثال ۲۔ ایک ایسا زاویہ معلوم کرو جس کے ماس کا جدولی لوکار تم

۹۶۳۳۱۷۲۵۰ ہو

فرض کرو کہ لا زاویہ مطلوب ہے

جدولوں سے حاصل ہوگا

ل مس ۴۸۱۵ = ۹۶۳۳۲۰۰۶۲

ل مس لا = ۹۶۳۳۱۷۲۵۰

ل مس ۴۷۱۵ = ۹۶۳۳۱۵۱۴۵

ل مس ۴۷۱۵ = ۹۶۳۳۱۵۱۴۵

فرق آ کے لئے = ۳۹۱۷

فرق = ۲۱۰۵

۲۱۰۵
۶۰

تناسب زیادتی = $\frac{۲۱۰۵}{۳۹۱۷} \times ۶۰$

= ۳۵۶۷

∴ لا = ۴۷۱۵ + ۳۵۶۷

(۲۵۶۷) ۱۳۶۳۰۰ (۳۹۱۷)
۹۸۳۳
۲۷۹۶۰
۳۳۵۸۵
۳۳۷۵۰

مثال ۳۔ معلوم ہے ل جب ۹۴ = ۶۳۸۶۷۰۴۰

ل قم ۹۴ کی قیمت دریافت کرو

لوک جب ۹۴ = ل جب ۹۴ = ۱۰۔

$$۶۳۸۶۷۰۴۰ + ۱ =$$

اب لوک قم ۹۴ = لوک جب ۹۴

= لوک جب ۹۴

$$۶۳۸۶۷۰۴۰ - ۱ =$$

$$۶۴۱۳۲۹۴۰ =$$

اس لئے ل قم ۹۴ = ۶۴۱۳۲۹۴۰

اور اس سے زیادہ عام صورت یہ ہے، چونکہ جب طہ × قم طہ = ۱

∴ لوک جب طہ + لوک قم طہ =

∴ ل جب طہ + ل قم طہ = ۲۰

اس عمل میں اس قسم کی غلطی سے بچنا چاہیئے، طالب علم بعض اوقات فرض کرتا ہے کہ

چونکہ لوک قم ۹۴ = ۶۴۱۳۲۹۴۰ ∴ لوک جب ۹۴

اس لئے ل قم ۹۴ = ۶۴۱۳۲۹۴۰ ∴ ل جب ۹۴

اور یہ صحیحاً غلط ہے

۲۳۸ مثلاً نمبری

۱۔ معلوم ہے لوک ۳۵۷۰۵ = ۳۵۵۲۷۲۹۰

اور لوک ۳۵۷۰۶ = ۳۵۵۲۷۲۱۲

لوگ ۳۵۷۰۵۷۷ اور لوگ ۳۵۷۷۰۵۸۵ کی قیمتیں دریافت کرو

۲ - معلوم ہے لوگ $۳۵۷۷۰۵۸۵ = ۵۸۷۷۲۷۷$

اور لوگ $۳۵۷۷۰۵۷۷ = ۵۸۷۷۲۷۶$

لوگ ۵۸۷۷۲۷۵ اور لوگ ۵۸۷۷۲۷۶ کی قیمتیں دریافت کرو

۳ - معلوم ہے لوگ $۵۸۷۷۲۷۵ = ۷۷۷۷۷۷۷$

اور لوگ $۵۸۷۷۲۷۶ = ۷۷۷۷۷۷۸$

ان عددوں کو دریافت کرو جن کے لوکارتم بالترتیب ۷۷۷۷۷۷۷ اور ۷۷۷۷۷۷۸ ہوں

۴ - معلوم ہے لوگ $۷۷۷۷۷۷۷ = ۷۷۷۷۷۷۷$

اور لوگ $۷۷۷۷۷۷۸ = ۷۷۷۷۷۷۸$

وہ عدد دریافت کرو جن کے لوکارتم بالترتیب ۷۷۷۷۷۷۸ اور ۷۷۷۷۷۷۷ ہوں

۵ - اس کتاب میں جدول اعداد کا کچھ حصہ جو بطور نمونہ کے دیا گیا ہے اُس کی مدد سے ذیل کے اعداد کے لوکارتم دریافت کرو۔

(۱) ۷۷۷۷۷۷۷ (۲) ۷۷۷۷۷۷۸ (۳) ۷۷۷۷۷۷۹ اور

وہ عدد دریافت کرو جن کے لوکارتم مفصلہ ذیل ہوں

(۴) ۷۷۷۷۷۷۸ (۵) ۷۷۷۷۷۷۹ (۶) ۷۷۷۷۷۸۰ اور

۶ - معلوم ہے جب $۷۷۷۷۷۷۷ = ۷۷۷۷۷۷۷$

اور جب $۷۷۷۷۷۷۸ = ۷۷۷۷۷۷۸$

جب $۷۷۷۷۷۷۹ = ۷۷۷۷۷۷۹$ کی قیمت دریافت کرو

۷ - ایک زاویہ کی جیب ۷۷۷۷۷۷۷ ہے اُس کو معلوم کرو۔

۸۔ معلوم ہے حجم $۱۶^{\circ} ۳۲' = ۵۸۴۵۵۶۶$

اور حجم $۱۴^{\circ} ۳۲' = ۵۸۴۵۴۱۴۲$

حجم $۱۶^{\circ} ۳۲'$ اور حجم $۱۴^{\circ} ۳۲'$ کی قیمت دریافت کرو۔

۹۔ نیز اُن زاویوں کو دریافت کرو جن کی جیوب اتمام

$۳۳^{\circ} ۵۸' ۵۸''$ اور $۲۸^{\circ} ۵۵' ۱۴''$ ہوں۔

۱۰۔ معلوم ہے مس $۲۱^{\circ} ۲۶' = ۴۵۱۱۷۷۷۸۳$

اور مس $۲۲^{\circ} ۲۶' = ۴۵۱۲۳۰۰۷۹$

مس $۲۱^{\circ} ۲۶'$ اور مس $۲۲^{\circ} ۲۶'$ کی قیمتیں دریافت کرو

۱۱۔ معلوم ہے قوس $۱۳^{\circ} ۱۸' = ۴۵۲۰۱۰۶۱۶$

اور قوس $۱۳^{\circ} ۱۹' = ۴۵۲۰۹۵۵۸۱۷$

قوس $۱۳^{\circ} ۱۸'$ اور قوس $۱۳^{\circ} ۱۹'$ کی قیمتیں دریافت کرو

۱۲۔ نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا قاطع اتمام $۳۳^{\circ} ۵۸' ۵۸''$ ہو

۱۳۔ معلوم ہے ل حجم $۳۳^{\circ} ۳۲' = ۹۵۹۱۴۷۷۲۹$

اور ل حجم $۳۳^{\circ} ۳۵' = ۹۵۹۱۴۷۸۵۲$

ل حجم $۳۳^{\circ} ۳۲'$ کی قیمت دریافت کرو

۱۴۔ نیز زاویہ طہ معلوم کرو جہاں

ل حجم طہ $= ۹۵۹۱۴۷۳۲۸$

۱۵۔ معلوم ہے ل مم $۲۱^{\circ} ۲۷' = ۹۵۵۲۵۷۷۷۹$

اور ل مم $۲۱^{\circ} ۲۸' = ۹۵۵۲۵۳۵۸۹$

ل مم $۲۱^{\circ} ۲۷'$ کی قیمت دریافت کرو

نیز مساوات ل مم طہ $= ۹۵۵۲۵۳۷۸۲$ کو حل کرو۔

۱۶- معلوم ہے ل قط ۹۸ = ۶۷ ۱۰۶۰۲۲۹۱۶۸

اور ل قط ۹۸ = ۶۸ ۱۰۶۰۲۲۹۵۹۰

ل قط ۹۸ ۶۷ ۳۵ کی قیمت دریافت کرو

۱۷- نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا ل قط مساوی ہو ۱۰۶۰۲۲۹۳۸۵ کے

۱۸- انگریزی درجوں و دقیقوں اور ثانیوں میں وہ زاویہ معلوم کرو جس کی جیب ۶۶ ہو معلوم ہے

لوک ۶ = ۷۷۸۱۵۱۳

لی جیب ۳۶ ۵۲ = ۹۶۷۷۸۱۱۸۶

اور ل جیب ۳۶ ۵۳ = ۹۶۷۷۸۲۸۷۰

۱۹۵- اس جگہ (صفحہ ۲۴۲) چمبہر کے جدولوں سے ہم ایک صفحہ بطور نمونہ کے دیتے ہیں، اس میں اُن سب زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے جدولی لوکارتم مندرج ہیں جو ۳۲° اور ۳۳° نیز ۵۷° اور ۵۸° کے درمیان واقع ہیں۔

پہلے خانے میں اُن سب زاویوں کی جدولی جیب مندرج ہیں جو ۳۲° اور ۳۳° کے درمیان بقدر ایک منٹ یا دقیقہ کے بڑھتے ہیں۔

دوسرے خانے میں فقط فرق کے نیچے عدد ۲۰۲۱ لکھا

ہوا ہے، اس کا یہ مطلب ہے کہ ل جیب ۳۲° اور ل جیب ۳۲° ۱

کے درمیان فرق ۲۰۲۱... ہے، اسکی تصدیق ۹۶۷۷۸۲۲۰۹۷

کو ۹۶۷۷۸۲۲۱۱۸ سے تفریق کرنے سے ہو سکتی ہے، نیز یاد رہے

کہ عدد ۲۰۲۱ کو اعداد ۹۶۷۷۸۲۲۰۹۷ اور ۹۶۷۷۸۲۲۱۱۸ کے

١٠

[illegible]

۲۴۴

لو کار تھی جیوب، ماسٹر غیر

1

رق	قطاع	مستقيم	مستقيم	مستقيم	مستقيم	مستقيم
٤٩٥	١٠٥٠٤٢٠٥	١٠٥	٢٠٧٥٢٥٥	٢٨٠٩	٩٥٤٢٤٢٥	١٠٥٢٢٤٢٥
٤٩٤	١٠٥٠٤٢٠٥	١٠٥	٢٠٧٥٢٥٥	٢٨٠٩	٩٥٤٢٤٢٥	١٠٥٢٢٤٢٥
٤٩٣	١٠٥٠٤٢٠٥	١٠٥	٢٠٧٥٢٥٥	٢٨٠٥	٩٥٤٢٤٢٥	١٠٥٢٢٤٢٥
٤٩٢	١٠٥٠٤٢٠٥	١٠٥	٢٠٧٥٢٥٥	٢٨٠٩	٩٥٤٢٤٢٥	١٠٥٢٢٤٢٥
٤٩١	١٠٥٠٤٢٠٥	١٠٥	٢٠٧٥٢٥٥	٢٨٠٩	٩٥٤٢٤٢٥	١٠٥٢٢٤٢٥
٤٩٠	١٠٥٠٤٢٠٥	١٠٥	٢٠٧٥٢٥٥	٢٨٠٩	٩٥٤٢٤٢٥	١٠٥٢٢٤٢٥
٤٨٩	١٠٥٠٤٢٠٥	١٠٥	٢٠٧٥٢٥٥	٢٨٠٩	٩٥٤٢٤٢٥	١٠٥٢٢٤٢٥
٤٨٨	١٠٥٠٤٢٠٥	١٠٥	٢٠٧٥٢٥٥	٢٨٠٩	٩٥٤٢٤٢٥	١٠٥٢٢٤٢٥

7986

باب سیزدهم

الحمد لله

لوکار نمی جیب اسماس و غیره

جیب	نق	قاطح التام	مس	نق	مس التام	نق	قاطح	مس	نق	جیب التام
۱۱	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰
۱۲	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰
۱۳	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰
۱۴	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰
۱۵	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰
۱۶	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰
۱۷	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰
۱۸	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰
۱۹	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰
۲۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰	۷۰۰

در جیب

باب یازدهم

جیب	نق	قاطع الناقص	مس	نق	قاطع الناقص	نق	جیب
۲۱	۹۷۷۲۸۴۲۴	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۹۷۸۰۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۹۷۸۰۰۰۰۰۰۰	۱۹۹۳	۹۷۷۲۸۴۲۴
۲۲	۹۷۷۲۸۴۲۴۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۹۷۸۰۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۹۷۸۰۰۰۰۰۰۰	۱۹۹۳	۹۷۷۲۸۴۲۴۰
۲۳	۹۷۷۲۸۴۲۵۳	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۹۷۸۰۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۹۷۸۰۰۰۰۰۰۰	۱۹۹۱	۹۷۷۲۸۴۲۵۳
۲۴	۹۷۷۲۹۰۲۲۴	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۹۷۸۰۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۹۷۸۰۰۰۰۰۰۰	۱۹۹۰	۹۷۷۲۹۰۲۲۴
۲۵	۹۷۷۲۹۲۲۴۲۵	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۹۷۸۰۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۹۷۸۰۰۰۰۰۰۰	۱۹۸۹	۹۷۷۲۹۲۲۴۲۵

770

[illegible]

لوکارنمی حبیب، حماس وغیرہ

جیب تمام فرق قاطع ماس فرق ماس قاطع تمام فرق جیب

جیب	زنی	قاطعات	مساحت	زنی	مساحت	قاطعات	زنی	جیب
۳۹	۹۵۹۲۵۹۲۸۷	۸۰۶	۱۰۵۰۷۰۳۱۳	۱۰۵۱۹۵۵۳۳۴	۲۷۸۶	۹۵۸۰۲۲۶۶۱	۱۰۵۲۶۹۵۸۵۲	۱۳
۳۸	۹۵۹۲۵۸۶۸۱	۸۰۶	۱۰۵۰۷۰۳۱۳	۱۰۵۱۹۵۵۳۳۴	۲۷۸۶	۹۵۸۰۲۲۶۶۱	۱۰۵۲۶۹۵۸۵۲	۱۳
۳۷	۹۵۹۲۵۷۰۷۵	۸۰۶	۱۰۵۰۷۰۳۱۳	۱۰۵۱۹۵۵۳۳۴	۲۷۸۶	۹۵۸۰۲۲۶۶۱	۱۰۵۲۶۹۵۸۵۲	۱۳
۳۶	۹۵۹۲۵۵۴۰۶۹	۸۰۶	۱۰۵۰۷۰۳۱۳	۱۰۵۱۹۵۵۳۳۴	۲۷۸۶	۹۵۸۰۲۲۶۶۱	۱۰۵۲۶۹۵۸۵۲	۱۳
۳۵	۹۵۹۲۵۳۷۲۶۱	۸۰۶	۱۰۵۰۷۰۳۱۳	۱۰۵۱۹۵۵۳۳۴	۲۷۸۶	۹۵۸۰۲۲۶۶۱	۱۰۵۲۶۹۵۸۵۲	۱۳
۳۴	۹۵۹۲۵۲۰۴۷۲	۸۰۶	۱۰۵۰۷۰۳۱۳	۱۰۵۱۹۵۵۳۳۴	۲۷۸۶	۹۵۸۰۲۲۶۶۱	۱۰۵۲۶۹۵۸۵۲	۱۳
۳۳	۹۵۹۲۵۰۳۵۲	۸۰۶	۱۰۵۰۷۰۳۱۳	۱۰۵۱۹۵۵۳۳۴	۲۷۸۶	۹۵۸۰۲۲۶۶۱	۱۰۵۲۶۹۵۸۵۲	۱۳
۳۲	۹۵۹۲۴۸۲۶۶	۸۰۶	۱۰۵۰۷۰۳۱۳	۱۰۵۱۹۵۵۳۳۴	۲۷۸۶	۹۵۸۰۲۲۶۶۱	۱۰۵۲۶۹۵۸۵۲	۱۳
۳۱	۹۵۹۲۴۶۱۷۷	۸۰۶	۱۰۵۰۷۰۳۱۳	۱۰۵۱۹۵۵۳۳۴	۲۷۸۶	۹۵۸۰۲۲۶۶۱	۱۰۵۲۶۹۵۸۵۲	۱۳
۳۰	۹۵۹۲۴۴۰۸۸	۸۰۶	۱۰۵۰۷۰۳۱۳	۱۰۵۱۹۵۵۳۳۴	۲۷۸۶	۹۵۸۰۲۲۶۶۱	۱۰۵۲۶۹۵۸۵۲	۱۳

۷۵ درجه

باب اول

۲۲

لوکارنی جنوبی ناماس دینه

جیب	نق	قاطع	ماس	نق	قاطع	ماس	نق	جیب
۱۹	۹۹۳۵۱۳۰۸	۱۰۵۰۶۸۵۹۲	۱۰۵۰۹۳۵۵۰۶	۲۷۷۹	۹۹۸۰۰۶۲۹۳۲	۱۰۵۰۲۶۶۶۰۹۸	۱۹۶۸	۹۹۳۳۳۹۰۲۰۳۱
۱۸	۹۹۳۵۰۵۹۷	۱۰۵۰۶۸۵۹۲	۱۰۵۰۹۳۵۵۰۶	۲۷۷۹	۹۹۸۰۰۶۲۹۳۲	۱۰۵۰۲۶۶۶۰۹۸	۱۹۶۸	۹۹۳۳۳۹۰۲۰۳۱
۱۷	۹۹۳۴۹۷۸۱	۱۰۵۰۶۸۵۹۲	۱۰۵۰۹۳۵۵۰۶	۲۷۷۹	۹۹۸۰۰۶۲۹۳۲	۱۰۵۰۲۶۶۶۰۹۸	۱۹۶۸	۹۹۳۳۳۹۰۲۰۳۱
۱۶	۹۹۳۴۸۹۷۸	۱۰۵۰۶۸۵۹۲	۱۰۵۰۹۳۵۵۰۶	۲۷۷۹	۹۹۸۰۰۶۲۹۳۲	۱۰۵۰۲۶۶۶۰۹۸	۱۹۶۸	۹۹۳۳۳۹۰۲۰۳۱
۱۵	۹۹۳۴۸۱۷۱	۱۰۵۰۶۸۵۹۲	۱۰۵۰۹۳۵۵۰۶	۲۷۷۹	۹۹۸۰۰۶۲۹۳۲	۱۰۵۰۲۶۶۶۰۹۸	۱۹۶۸	۹۹۳۳۳۹۰۲۰۳۱
۱۴	۹۹۳۴۷۳۷۱	۱۰۵۰۶۸۵۹۲	۱۰۵۰۹۳۵۵۰۶	۲۷۷۹	۹۹۸۰۰۶۲۹۳۲	۱۰۵۰۲۶۶۶۰۹۸	۱۹۶۸	۹۹۳۳۳۹۰۲۰۳۱
۱۳	۹۹۳۴۶۵۷۱	۱۰۵۰۶۸۵۹۲	۱۰۵۰۹۳۵۵۰۶	۲۷۷۹	۹۹۸۰۰۶۲۹۳۲	۱۰۵۰۲۶۶۶۰۹۸	۱۹۶۸	۹۹۳۳۳۹۰۲۰۳۱
۱۲	۹۹۳۴۵۷۷۱	۱۰۵۰۶۸۵۹۲	۱۰۵۰۹۳۵۵۰۶	۲۷۷۹	۹۹۸۰۰۶۲۹۳۲	۱۰۵۰۲۶۶۶۰۹۸	۱۹۶۸	۹۹۳۳۳۹۰۲۰۳۱
۱۱	۹۹۳۴۴۹۷۱	۱۰۵۰۶۸۵۹۲	۱۰۵۰۹۳۵۵۰۶	۲۷۷۹	۹۹۸۰۰۶۲۹۳۲	۱۰۵۰۲۶۶۶۰۹۸	۱۹۶۸	۹۹۳۳۳۹۰۲۰۳۱
۱۰	۹۹۳۴۴۱۷۱	۱۰۵۰۶۸۵۹۲	۱۰۵۰۹۳۵۵۰۶	۲۷۷۹	۹۹۸۰۰۶۲۹۳۲	۱۰۵۰۲۶۶۶۰۹۸	۱۹۶۸	۹۹۳۳۳۹۰۲۰۳۱

۹۵ درخت

جیب	زق	قاطع انعام	ماس	زق	ماس انعام	زق	جیب
۵۱	۹۵۴۳۳۵۲۹	۱۰۵۲۲۵۴۲۱	۹۵۸۱۰۰۷۵۳	۲۷۷۲	۱۰۵۲۲۵۴۲۱	۱۹۵۶	۹۵۴۳۳۵۲۹
۵۲	۹۵۴۳۳۵۲۸۵	۱۰۵۲۲۵۴۲۱۵	۹۵۸۱۰۰۳۰۲۵	۲۷۷۳	۱۰۵۲۲۵۴۲۱۵	۱۹۵۷	۹۵۴۳۳۵۲۸۵
۵۳	۹۵۴۳۳۵۲۸۰	۱۰۵۲۲۵۴۲۱۰	۹۵۸۱۰۰۵۷۹۶	۲۷۷۴	۱۰۵۲۲۵۴۲۱۰	۱۹۵۸	۹۵۴۳۳۵۲۸۰
۵۴	۹۵۴۳۳۵۲۷۵	۱۰۵۲۲۵۴۲۰۵	۹۵۸۱۰۰۸۵۹۲	۲۷۷۵	۱۰۵۲۲۵۴۲۰۵	۱۹۵۹	۹۵۴۳۳۵۲۷۵
۵۵	۹۵۴۳۳۵۲۷۰	۱۰۵۲۲۵۴۲۰۰	۹۵۸۱۰۱۱۳۲۶	۲۷۷۶	۱۰۵۲۲۵۴۲۰۰	۱۹۶۰	۹۵۴۳۳۵۲۷۰
۵۶	۹۵۴۳۳۵۲۶۵	۱۰۵۲۲۵۴۱۹۵	۹۵۸۱۰۱۴۱۳۳	۲۷۷۷	۱۰۵۲۲۵۴۱۹۵	۱۹۶۱	۹۵۴۳۳۵۲۶۵
۵۷	۹۵۴۳۳۵۲۶۰	۱۰۵۲۲۵۴۱۹۰	۹۵۸۱۰۱۶۹۴۰	۲۷۷۸	۱۰۵۲۲۵۴۱۹۰	۱۹۶۲	۹۵۴۳۳۵۲۶۰
۵۸	۹۵۴۳۳۵۲۵۵	۱۰۵۲۲۵۴۱۸۵	۹۵۸۱۰۱۹۷۴۷	۲۷۷۹	۱۰۵۲۲۵۴۱۸۵	۱۹۶۳	۹۵۴۳۳۵۲۵۵
۵۹	۹۵۴۳۳۵۲۵۰	۱۰۵۲۲۵۴۱۸۰	۹۵۸۱۰۲۲۵۵۴	۲۷۸۰	۱۰۵۲۲۵۴۱۸۰	۱۹۶۴	۹۵۴۳۳۵۲۵۰
۶۰	۹۵۴۳۳۵۲۴۵	۱۰۵۲۲۵۴۱۷۵	۹۵۸۱۰۲۵۳۶۱	۲۷۸۱	۱۰۵۲۲۵۴۱۷۵	۱۹۶۵	۹۵۴۳۳۵۲۴۵
۶۱	۹۵۴۳۳۵۲۴۰	۱۰۵۲۲۵۴۱۷۰	۹۵۸۱۰۲۸۱۶۸	۲۷۸۲	۱۰۵۲۲۵۴۱۷۰	۱۹۶۶	۹۵۴۳۳۵۲۴۰
۶۲	۹۵۴۳۳۵۲۳۵	۱۰۵۲۲۵۴۱۶۵	۹۵۸۱۰۳۰۹۷۵	۲۷۸۳	۱۰۵۲۲۵۴۱۶۵	۱۹۶۷	۹۵۴۳۳۵۲۳۵
۶۳	۹۵۴۳۳۵۲۳۰	۱۰۵۲۲۵۴۱۶۰	۹۵۸۱۰۳۳۷۸۲	۲۷۸۴	۱۰۵۲۲۵۴۱۶۰	۱۹۶۸	۹۵۴۳۳۵۲۳۰
۶۴	۹۵۴۳۳۵۲۲۵	۱۰۵۲۲۵۴۱۵۵	۹۵۸۱۰۳۶۵۸۹	۲۷۸۵	۱۰۵۲۲۵۴۱۵۵	۱۹۶۹	۹۵۴۳۳۵۲۲۵
۶۵	۹۵۴۳۳۵۲۲۰	۱۰۵۲۲۵۴۱۵۰	۹۵۸۱۰۳۹۳۹۶	۲۷۸۶	۱۰۵۲۲۵۴۱۵۰	۱۹۷۰	۹۵۴۳۳۵۲۲۰
۶۶	۹۵۴۳۳۵۲۱۵	۱۰۵۲۲۵۴۱۴۵	۹۵۸۱۰۴۲۲۰۳	۲۷۸۷	۱۰۵۲۲۵۴۱۴۵	۱۹۷۱	۹۵۴۳۳۵۲۱۵
۶۷	۹۵۴۳۳۵۲۱۰	۱۰۵۲۲۵۴۱۴۰	۹۵۸۱۰۴۵۰۱۰	۲۷۸۸	۱۰۵۲۲۵۴۱۴۰	۱۹۷۲	۹۵۴۳۳۵۲۱۰
۶۸	۹۵۴۳۳۵۲۰۵	۱۰۵۲۲۵۴۱۳۵	۹۵۸۱۰۴۷۸۱۷	۲۷۸۹	۱۰۵۲۲۵۴۱۳۵	۱۹۷۳	۹۵۴۳۳۵۲۰۵
۶۹	۹۵۴۳۳۵۲۰۰	۱۰۵۲۲۵۴۱۳۰	۹۵۸۱۰۵۰۶۲۴	۲۷۹۰	۱۰۵۲۲۵۴۱۳۰	۱۹۷۴	۹۵۴۳۳۵۲۰۰
۷۰	۹۵۴۳۳۵۱۹۵	۱۰۵۲۲۵۴۱۲۵	۹۵۸۱۰۵۳۴۳۱	۲۷۹۱	۱۰۵۲۲۵۴۱۲۵	۱۹۷۵	۹۵۴۳۳۵۱۹۵
۷۱	۹۵۴۳۳۵۱۹۰	۱۰۵۲۲۵۴۱۲۰	۹۵۸۱۰۵۶۲۳۸	۲۷۹۲	۱۰۵۲۲۵۴۱۲۰	۱۹۷۶	۹۵۴۳۳۵۱۹۰
۷۲	۹۵۴۳۳۵۱۸۵	۱۰۵۲۲۵۴۱۱۵	۹۵۸۱۰۵۹۰۴۵	۲۷۹۳	۱۰۵۲۲۵۴۱۱۵	۱۹۷۷	۹۵۴۳۳۵۱۸۵
۷۳	۹۵۴۳۳۵۱۸۰	۱۰۵۲۲۵۴۱۱۰	۹۵۸۱۰۶۱۸۵۲	۲۷۹۴	۱۰۵۲۲۵۴۱۱۰	۱۹۷۸	۹۵۴۳۳۵۱۸۰
۷۴	۹۵۴۳۳۵۱۷۵	۱۰۵۲۲۵۴۱۰۵	۹۵۸۱۰۶۴۶۵۹	۲۷۹۵	۱۰۵۲۲۵۴۱۰۵	۱۹۷۹	۹۵۴۳۳۵۱۷۵
۷۵	۹۵۴۳۳۵۱۷۰	۱۰۵۲۲۵۴۱۰۰	۹۵۸۱۰۶۷۴۸۶	۲۷۹۶	۱۰۵۲۲۵۴۱۰۰	۱۹۸۰	۹۵۴۳۳۵۱۷۰
۷۶	۹۵۴۳۳۵۱۶۵	۱۰۵۲۲۵۴۰۹۵	۹۵۸۱۰۷۰۳۱۳	۲۷۹۷	۱۰۵۲۲۵۴۰۹۵	۱۹۸۱	۹۵۴۳۳۵۱۶۵
۷۷	۹۵۴۳۳۵۱۶۰	۱۰۵۲۲۵۴۰۹۰	۹۵۸۱۰۷۳۱۴۰	۲۷۹۸	۱۰۵۲۲۵۴۰۹۰	۱۹۸۲	۹۵۴۳۳۵۱۶۰
۷۸	۹۵۴۳۳۵۱۵۵	۱۰۵۲۲۵۴۰۸۵	۹۵۸۱۰۷۵۹۶۷	۲۷۹۹	۱۰۵۲۲۵۴۰۸۵	۱۹۸۳	۹۵۴۳۳۵۱۵۵
۷۹	۹۵۴۳۳۵۱۵۰	۱۰۵۲۲۵۴۰۸۰	۹۵۸۱۰۷۸۷۹۴	۲۸۰۰	۱۰۵۲۲۵۴۰۸۰	۱۹۸۴	۹۵۴۳۳۵۱۵۰
۸۰	۹۵۴۳۳۵۱۴۵	۱۰۵۲۲۵۴۰۷۵	۹۵۸۱۰۸۱۶۲۱	۲۸۰۱	۱۰۵۲۲۵۴۰۷۵	۱۹۸۵	۹۵۴۳۳۵۱۴۵
۸۱	۹۵۴۳۳۵۱۴۰	۱۰۵۲۲۵۴۰۷۰	۹۵۸۱۰۸۴۴۴۸	۲۸۰۲	۱۰۵۲۲۵۴۰۷۰	۱۹۸۶	۹۵۴۳۳۵۱۴۰
۸۲	۹۵۴۳۳۵۱۳۵	۱۰۵۲۲۵۴۰۶۵	۹۵۸۱۰۸۷۲۷۵	۲۸۰۳	۱۰۵۲۲۵۴۰۶۵	۱۹۸۷	۹۵۴۳۳۵۱۳۵
۸۳	۹۵۴۳۳۵۱۳۰	۱۰۵۲۲۵۴۰۶۰	۹۵۸۱۰۹۰۱۰۲	۲۸۰۴	۱۰۵۲۲۵۴۰۶۰	۱۹۸۸	۹۵۴۳۳۵۱۳۰
۸۴	۹۵۴۳۳۵۱۲۵	۱۰۵۲۲۵۴۰۵۵	۹۵۸۱۰۹۲۹۲۹	۲۸۰۵	۱۰۵۲۲۵۴۰۵۵	۱۹۸۹	۹۵۴۳۳۵۱۲۵
۸۵	۹۵۴۳۳۵۱۲۰	۱۰۵۲۲۵۴۰۵۰	۹۵۸۱۰۹۵۷۵۶	۲۸۰۶	۱۰۵۲۲۵۴۰۵۰	۱۹۹۰	۹۵۴۳۳۵۱۲۰
۸۶	۹۵۴۳۳۵۱۱۵	۱۰۵۲۲۵۴۰۴۵	۹۵۸۱۰۹۸۵۸۳	۲۸۰۷	۱۰۵۲۲۵۴۰۴۵	۱۹۹۱	۹۵۴۳۳۵۱۱۵
۸۷	۹۵۴۳۳۵۱۱۰	۱۰۵۲۲۵۴۰۴۰	۹۵۸۱۰۱۰۱۱۴۱۰	۲۸۰۸	۱۰۵۲۲۵۴۰۴۰	۱۹۹۲	۹۵۴۳۳۵۱۱۰
۸۸	۹۵۴۳۳۵۱۰۵	۱۰۵۲۲۵۴۰۳۵	۹۵۸۱۰۱۰۳۹۶۳۷	۲۸۰۹	۱۰۵۲۲۵۴۰۳۵	۱۹۹۳	۹۵۴۳۳۵۱۰۵
۸۹	۹۵۴۳۳۵۱۰۰	۱۰۵۲۲۵۴۰۳۰	۹۵۸۱۰۱۰۶۸۱۶۴	۲۸۱۰	۱۰۵۲۲۵۴۰۳۰	۱۹۹۴	۹۵۴۳۳۵۱۰۰
۹۰	۹۵۴۳۳۵۰۹۵	۱۰۵۲۲۵۴۰۲۵	۹۵۸۱۰۱۰۹۶۶۹۱	۲۸۱۱	۱۰۵۲۲۵۴۰۲۵	۱۹۹۵	۹۵۴۳۳۵۰۹۵
۹۱	۹۵۴۳۳۵۰۹۰	۱۰۵۲۲۵۴۰۲۰	۹۵۸۱۰۱۱۲۵۲۱۸	۲۸۱۲	۱۰۵۲۲۵۴۰۲۰	۱۹۹۶	۹۵۴۳۳۵۰۹۰
۹۲	۹۵۴۳۳۵۰۸۵	۱۰۵۲۲۵۴۰۱۵	۹۵۸۱۰۱۱۵۳۷۴۵	۲۸۱۳	۱۰۵۲۲۵۴۰۱۵	۱۹۹۷	۹۵۴۳۳۵۰۸۵
۹۳	۹۵۴۳۳۵۰۸۰	۱۰۵۲۲۵۴۰۱۰	۹۵۸۱۰۱۱۸۲۲۷۲	۲۸۱۴	۱۰۵۲۲۵۴۰۱۰	۱۹۹۸	۹۵۴۳۳۵۰۸۰
۹۴	۹۵۴۳۳۵۰۷۵	۱۰۵۲۲۵۴۰۰۵	۹۵۸۱۰۱۲۱۰۷۲۹	۲۸۱۵	۱۰۵۲۲۵۴۰۰۵	۱۹۹۹	۹۵۴۳۳۵۰۷۵
۹۵	۹۵۴۳۳۵۰۷۰	۱۰۵۲۲۵۴۰۰۰	۹۵۸۱۰۱۲۳۹۲۳۶	۲۸۱۶	۱۰۵۲۲۵۴۰۰۰	۲۰۰۰	۹۵۴۳۳۵۰۷۰
۹۶	۹۵۴۳۳۵۰۶۵	۱۰۵۲۲۵۳۹۹۵	۹۵۸۱۰۱۲۶۸۳۶۳	۲۸۱۷	۱۰۵۲۲۵۳۹۹۵		۹۵۴۳۳۵۰۶۵
۹۷	۹۵۴۳۳۵۰۶۰	۱۰۵۲۲۵۳۹۹۰	۹۵۸۱۰۱۲۹۷۴۶۰	۲۸۱۸	۱۰۵۲۲۵۳۹۹۰		۹۵۴۳۳۵۰۶۰
۹۸	۹۵۴۳۳۵۰۵۵	۱۰۵۲۲۵۳۹۸۵	۹۵۸۱۰۱۳۲۶۵۵۷	۲۸۱۹	۱۰۵۲۲۵۳۹۸۵		۹۵۴۳۳۵۰۵۵
۹۹	۹۵۴۳۳۵۰۵۰	۱۰۵۲۲۵۳۹۸۰	۹۵۸۱۰۱۳۵۵۶۵۴	۲۸۲۰	۱۰۵۲۲۵۳۹۸۰		۹۵۴۳۳۵۰۵۰
۱۰۰	۹۵۴۳۳۵۰۴۵	۱۰۵۲۲۵۳۹۷۵	۹۵۸۱۰۱۳۸۴۷۵۱	۲۸۲۱	۱۰۵۲۲۵۳۹۷۵		۹۵۴۳۳۵۰۴۵
۱۰۱	۹۵۴۳۳۵۰۴۰	۱۰۵۲۲۵۳۹۷۰	۹۵۸۱۰۱۴۱۳۸۴۸	۲۸۲۲	۱۰۵۲۲۵۳۹۷۰		۹۵۴۳۳۵۰۴۰
۱۰۲	۹۵۴۳۳۵۰۳۵	۱۰۵۲۲۵۳۹۶۵	۹۵۸۱۰۱۴۴۲۹۴۵	۲۸۲۳	۱۰۵۲۲۵۳۹۶۵		۹۵۴۳۳۵۰۳۵
۱۰۳	۹۵۴۳۳۵۰۳۰	۱۰۵۲۲۵۳۹۶۰	۹۵۸۱۰۱۴۷۲۰۴۱	۲۸۲۴	۱۰۵۲۲۵۳۹۶۰		۹۵۴۳۳۵۰۳۰
۱۰۴	۹۵۴۳۳۵۰۲۵	۱۰۵۲۲۵۳۹۵۵	۹۵۸۱۰۱۵۰۱۱۰۳۷	۲۸۲۵	۱۰۵۲۲۵۳۹۵۵		۹۵۴۳۳۵۰۲۵
۱۰۵	۹۵۴۳۳۵۰۲۰	۱۰۵۲۲۵۳۹۵۰	۹۵۸۱۰۱۵۳۰۲۰۲۴	۲۸۲۶	۱۰۵۲۲۵۳۹۵۰		۹۵۴۳۳۵۰۲۰
۱۰۶	۹۵۴۳۳۵۰۱۵	۱۰۵۲۲۵۳۹۴۵	۹۵۸۱۰۱۵۵۹۲۹۲	۲۸۲۷	۱۰۵۲۲۵۳۹۴۵		۹۵۴۳۳۵۰۱۵
۱۰۷	۹۵۴۳۳۵۰۱۰	۱۰۵۲۲۵۳۹۴۰	۹۵۸۱۰۱۵۸۸۳۸۳	۲۸۲۸	۱۰۵۲۲۵۳۹۴۰		۹۵۴۳۳۵۰۱۰
۱۰۸	۹۵۴۳۳۵۰۰۵	۱۰۵۲۲۵۳۹۳۵	۹۵۸۱۰۱۶۱۷۴۷۴	۲۸۲۹	۱۰۵۲۲۵۳۹۳۵		۹۵۴۳۳۵۰۰۵
۱۰۹	۹۵۴۳۳۵۰۰۰	۱۰۵۲۲۵۳۹۳۰	۹۵۸۱۰۱۶۴۶۵۶۵	۲۸۳۰	۱۰۵۲۲۵۳۹۳۰		۹۵۴۳۳۵۰۰۰
۱۱۰	۹۵۴۳۳۴۹۹۵	۱۰۵۲۲۵۳۹۲۵	۹۵۸۱۰۱۶۷۵۶۵۶	۲۸۳۱	۱۰۵۲۲۵۳۹۲۵		۹۵۴۳۳۴۹۹۵
۱۱۱	۹۵۴۳۳۴۹۹۰	۱۰۵۲۲۵۳۹۲۰	۹۵۸۱۰۱۷۰۴۷۴۷	۲۸۳۲	۱۰۵۲۲۵۳۹۲۰		۹۵۴۳۳۴۹۹۰
۱۱۲	۹۵۴۳۳۴۹۸۵	۱۰۵۲۲۵۳۹۱۵	۹۵۸۱۰۱۷۳۳۸۴۸	۲۸۳۳	۱۰۵۲۲۵۳۹۱۵		۹۵۴۳۳۴۹۸۵
۱۱۳	۹۵۴۳۳۴۹۸۰	۱۰۵۲۲۵۳۹۱۰	۹۵۸۱۰۱۷۶۲۹۴۹	۲۸۳۴	۱۰۵۲۲۵۳۹۱۰		۹۵۴۳۳۴۹۸۰
۱۱۴	۹۵۴۳۳۴۹۷۵	۱۰۵۲۲۵۳۹۰۵	۹۵۸۱۰۱۷۹۲۰۵۰	۲۸۳۵	۱۰۵۲۲۵۳۹۰۵		۹۵۴۳۳۴۹۷۵
۱۱۵	۹۵۴۳۳۴۹۷۰	۱۰۵۲۲۵۳۹۰۰	۹۵۸۱۰۱۸۲۱۱۰۶	۲۸۳۶	۱۰۵۲۲۵۳۹۰۰		۹۵۴۳۳۴۹۷۰
۱۱۶	۹۵۴۳۳۴۹۶۵	۱۰۵۲۲۵۳۸۹۵	۹۵۸۱۰۱۸۵۰۲۰۷	۲۸۳۷	۱۰۵۲۲۵۳۸۹۵		۹۵۴۳۳۴۹۶۵
۱۱۷	۹۵۴۳۳۴۹۶۰	۱۰۵۲۲۵۳۸۹۰	۹۵۸۱۰۱۸۷۹۳۰۸	۲۸۳۸	۱۰۵۲۲۵۳۸۹۰		۹۵۴۳۳۴۹۶۰
۱۱۸	۹۵۴۳۳۴۹۵۵	۱۰۵۲۲۵۳۸۸۵	۹۵۸۱۰۱۹۰۸۴۰۹	۲۸۳۹	۱۰۵۲۲۵۳۸۸۵		۹۵۴۳۳۴۹۵۵
۱۱۹	۹۵۴۳۳۴۹۵۰	۱۰۵۲۲۵۳۸۸۰	۹۵۸۱۰۱۹۳۷۵۱۰	۲۸۴۰	۱۰۵۲۲۵۳۸۸۰		۹۵۴۳۳۴۹۵۰
۱۲۰	۹۵۴۳۳۴۹۴۵	۱۰۵۲۲۵۳۸۷۵	۹۵۸۱۰۱۹۶۶۶۱۱	۲۸۴۱	۱۰۵۲۲۵۳۸۷۵		۹۵۴۳۳۴۹۴۵
۱۲۱	۹۵۴۳۳۴۹۴۰	۱۰۵۲۲۵۳۸۷۰	۹۵۸۱۰۱۹۹۵۷۱۲	۲۸۴۲	۱۰۵۲۲۵۳۸۷۰		۹۵۴۳۳۴۹۴۰
۱۲۲	۹۵۴۳۳۴۹۳۵	۱۰۵۲۲۵۳۸۶۵	۹۵۸۱۰۲۰۲۴۸۱۳	۲۸۴۳	۱۰۵۲۲۵۳۸۶۵		۹۵۴۳۳۴۹۳۵
۱۲۳	۹۵۴۳۳۴۹۳۰	۱۰۵۲۲۵۳۸۶۰	۹۵۸۱۰۲۰۵۳۹۱۴	۲۸۴۴	۱۰۵۲۲۵۳۸۶۰		۹۵۴۳۳۴۹۳۰
۱۲۴	۹۵۴۳۳۴۹۲۵	۱۰۵۲۲۵۳۸۵۵	۹۵۸۱۰۲۰۸۳۰۱۵	۲۸۴۵	۱۰۵۲۲۵۳۸۵۵		۹۵۴۳۳۴۹۲۵
۱۲۵	۹۵۴۳۳۴۹۲۰	۱۰۵۲۲۵۳۸۵۰	۹۵۸۱۰۲۱۱۲۱۱۶	۲۸۴۶	۱۰۵۲۲۵۳۸۵۰		۹۵۴۳۳۴۹۲۰
۱۲۶	۹۵۴۳۳۴۹۱۵	۱۰۵۲۲۵۳۸۴۵	۹۵۸۱۰۲۱۴۱۲۱۷	۲۸۴۷	۱۰۵۲۲۵۳۸۴۵		۹۵۴۳۳۴۹۱۵
۱۲۷	۹۵۴۳۳۴۹۱۰	۱۰۵۲۲۵۳۸۴۰	۹۵۸۱۰۲۱۷۰۳۱۸	۲۸۴۸	۱۰۵۲۲۵۳۸۴۰		۹۵۴۳۳۴۹۱۰
۱۲۸	۹۵۴۳۳۴۹۰۵	۱۰۵۲۲۵۳۸۳۵	۹۵۸۱۰۲				

[illegible]

لوکار مٹی جیوب، مماس، قاطع وغیرہ

جیب الائم فرق قاطع الائم فرق ماس فرق قاطع الائم فرق جیب الائم

۱۶۷۔ جدول صفحات ۲۳۳ تا ۲۳۸ سے ۵ اور ۵۸ کے درمیان جو زاوے واقع ہوں ان کی نسبتوں کے جدولی نوکار تم بھی معلوم ہو سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ل مس ۵۰ ۲۰ مطلوب ہے، اگر ہم صفحہ مذکورہ کی سب سے نیچے کی سطر سے شروع ہو کر اس خانے میں اوپر دیکھتے جائیں جس کے پائیں پر ماس لکھا ہوا ہے تو ہمیں ایک عدد ۲۸۶ ۳۰ ۱۹ ۱۰ ملے گا جس کے پائیں طرف افقی سطر کے آخر میں عدد ۲۰ لکھا ہوا ہے، یہ جدولی مس ۵۰ ۲۰ کی قیمت ہے۔

مثلاً نمبری ۲۵

- ۱۔ معلوم ہے حجم طہ = ۵۹۷۲۵۳۸۲
- جم ۱۳ ۲۷ = ۵۹۷۲۵۷۳۳
- فرق آ کے لئے = ۶۷۷
- زاویہ طہ کی قیمت دریافت کرو
- ۲۔ ایک زاوے کی جیب $\frac{۳}{۸}$ ہے اس کو معلوم کرو
- معلوم ہے جیب ۲۲ ۱ = ۵۳۷۴۸۷۶۳
- نیز آ کے لئے فرق = ۲۶۹۶
- ۳۔ معلوم ہے قوس ۹۵ ۲۳ = ۱۵۰۹۹۸۲۴۳
- فرق آ کے لئے = ۱۴۶۴
- قوس ۹۵ ۲۳ کی قیمت دریافت کرو نیز وہ زاویہ معلوم کرو جس کا

قاطع التمام ۹۹۷۹۳۸.۵۱۱

۴- ل مس ۲۲ ۳۷ = ۹۵۶۱۹۷۲۰۵

فرق آ کے لئے = ۳۵۵۷

ل مس ۲۲ ۳۷ ۲۲ کی قیمت دریافت کرو، نیز وہ زاویہ معلوم کرو

جس کا ل مس = ۹۵۶۱۹۵۲۸۳

۵- وہ زاویہ معلوم کرو جس کی ل جم برابر ۹۵۹۹۳ کے ہو۔

معلوم ہے ل جم ۱۰ ۵۱ = ۹۵۹۹۳۰۱۳۱

اور فرق آ کے لئے = ۲۲۹

۶- وہ زاویہ دریافت کرو جس کا ل قط برابر ۱۰۵۱۵ کے ہو معلوم ہے

ل قط ۲۲ ۵۵ = ۱۰۵۱۴۹۸۸۴۳ اور

آ کے لئے فرق = ۱۲۶۰

۷- جدول صفحہ ۲۳۳ تا ۲۳۸ سے جملات ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۱) ل جب ۳۲ ۱۸ ۲۳ ل جم ۳۲ ۱۶ ۲۹

(۳) ل مم ۳۲ ۲۹ ۳۳ ل قط ۳۲ ۵۲ ۲۷

(۵) ل س ۵۷ ۲۵ ۲۸ ل قم ۵۷ ۲۸ ۲۱

(۷) ل جم ۵۷ ۵۸ ۲۹

۸- اسی جدول کی مدد سے ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) ل مس طہ = ۱۰۵۱۹۵۹۲۶۱

(۲) ل قم طہ = ۱۰۵۰۷۳۸۱۲۵

(۳) ل جم طہ = ۹۵۹۲۵۹۲۸۳

(۴) ل جب طہ = ۹۵۹۲۴۱۳۵۲

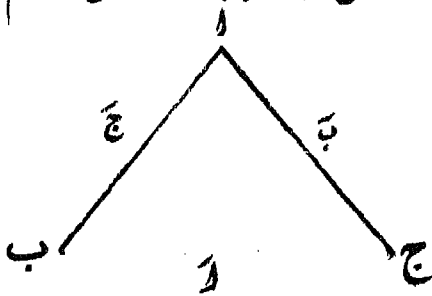
- ۹۔ جدولوں سے ل مس ۱۶ ۶ ۲۳ کی قیمت دریافت کرو اور
ماس کے خیر کی قیمت کا حساب لگاؤ
- ۱۰۔ مقادیر ذیل کو لوکار تہی حسابات کے قابل بناؤ یعنی اُن کو
حاصل ضرب کی صورت میں بیان کرو

(۱)	۱+ مس لا+ مس ما	(۲)	۱- مس لا+ مس ما
(۳)	محم لا+ مس ما	(۴)	محم لا- مس ما
(۵)	۱- حجم ۲ لا	(۶)	مس لا+ مس ما
	۱+ حجم ۲ لا		محم لا+ محم ما

باب دوازدہم

مثلاً شہ کے ضلعوں اور زاویوں کی مثلثی نسبتوں کے تعلقات

۱۶۸۔ مثلث کے زاویوں کو ہم آئندہ حروف 'ا' 'ب' 'ج' سے اور ان کے مقابل کے اضلاع کو بالترتیب حروف 'ا' 'ب' 'ج' سے تعبیر کریں گے، یاد رہے کہ 'ا' 'ب' 'ج' اعداد ہیں کیونکہ وہ مثلث کے اضلاع کے طولوں کو کسی ایک پیمانہ واحد کی رقوم میں بیان کرتے ہیں۔



ب ج = ا

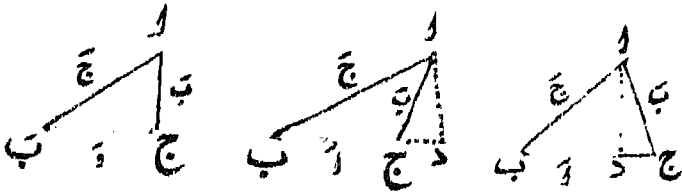
ج ا = ب

ا ب = ج

۱۶۹۔ مسئلہ کسی مثلث ا ب ج میں ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ج ب}}{\text{ا}} = \frac{\text{ج ب ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{ج ب ج}}{\text{ج}}$$

یعنی مثلث کے زاویوں کی جیب مقابل کے اضلاع کے متناسب ہوتی ہیں



زاویہ ا سے عمود ا د مقابل کے ضلع ب ج یا ب ج محدودہ پر نکالو
جو اس کو نقطہ د پر ملے -

مثلث ا ب د میں

$$\frac{ا د}{ب ج} = \frac{ب ج}{ب ج} \text{ یعنی } ا د = ب ج$$

مثلث ا ج د میں

$$\frac{ا د}{ا ج} = \frac{ب ج}{ب ج} \text{ یعنی } ا د = ب ج$$

[اگر زاویہ ج منفرج ہو جیسا کہ دوسری شکل میں تو $\frac{ا د}{ب ج} = \frac{ب ج}{ب ج}$]

$$= \frac{ب ج}{ب ج} (۱۸۰ - ج) = \frac{ب ج}{ب ج} (دفعہ ۶۶) \text{ یعنی } ا د = ب ج$$

ا د کی یہ دونوں قیمتیں برابر رکھنے سے

$$ج = ب ج = ب ج$$

$$\text{یعنی } \frac{ب ج}{ب ج} = \frac{ب ج}{ب ج}$$

اسی طرح زاویہ ب سے ج ا پر عمود نکالنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{جب } \angle}{1} = \text{جب } \angle$$

اگر زاویہ ج قائم ہو جیسا کہ تیسری شکل میں تو جب ج = ۱

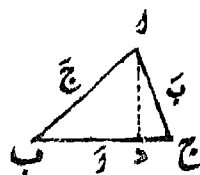
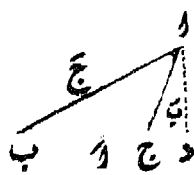
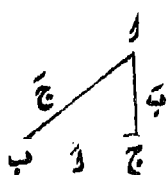
$$\text{جب } \angle = \frac{1}{\text{جب } \angle} \text{ اور جب } \angle = \frac{1}{\text{جب } \angle}$$

$$\text{اس لئے } \text{جب } \angle = \frac{1}{\text{جب } \angle} = \text{جب } \angle = \frac{1}{\text{جب } \angle} = \text{جب } \angle$$

پس ہر ایک صورت میں

$$\text{جب } \angle = \text{جب } \angle = \text{جب } \angle$$

۱۷۰۔ کسی مثلث میں کسی زاویہ کی جیب التمام کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو۔



فرض کرو کہ مثلث ABC میں اگر زاویہ A سے عمود AD مقابل کے
ضلع BC یا BC ممدودہ پر نکالا جائے تو وہ اس کو نقطہ D پر ملتا ہے
صورت اول۔ فرض کرو کہ زاویہ ج حادہ ہے دیکھو شکل اول
بموجب اقلیدس م ۲ ش ۱۳

$$AB = BC + CD = 2 BC \times CD \dots (1)$$

لیکن $\frac{ج}{ا} > \frac{ج}{ب}$ = جم ج یعنی ج $> ب$ جم ج اس لئے
(۱) سے حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} ج^۲ &= ا^۲ + ب^۲ - ۲ \times ا \times ب \times جم ج \\ \text{یعنی } ۲ \times ا \times ب \times جم ج &= ا^۲ + ب^۲ - ج^۲ \\ \text{یعنی جم ج} &= \frac{ا^۲ + ب^۲ - ج^۲}{۲ \times ا \times ب} \end{aligned}$$

صورت دوم - فرض کرو کہ زاویہ ج منفی ہے جیسا کہ
دوسری شکل میں

تب بموجب اقلیدس م ۲ ش ۱۲

$$ا ب^۲ = ب^۲ + ج^۲ + ۲ \times ا \times ب \times ج > \dots (۲)$$

$$\text{لیکن } \frac{ج}{ا} > \frac{ج}{ب} = جم ا ج > جم (ا - ج) = جم ج$$

(صفحہ ۸۷)

پس ج $> ا - ج$ = ب جم ج
اس لئے (۲) سے حاصل ہوگا

$$\begin{aligned} ج^۲ &= ا^۲ + ب^۲ - ۲ \times ا \times (ا - ج) \times جم ج \\ &= ا^۲ + ب^۲ - ۲ \times ا \times ا \times جم ج + ۲ \times ا \times ج \times جم ج \end{aligned}$$

پس موافق صورت اول

$$جم ج = \frac{ا^۲ + ب^۲ - ج^۲}{۲ \times ا \times ب}$$

۱۷۲- مثلث کے نصف زاویوں کی جیوب التمام کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو
 بموجب دفعہ ۱۱۵
 $\text{جہم } ۱ = ۲ \text{ جہم } \frac{۱}{۲} - ۱$

$$\text{اس لئے } ۲ \text{ جہم } \frac{۱}{۲} = ۱ + \text{جہم } ۱ = ۱ + \frac{\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}}{\text{ب} \cdot \text{ج}} - ۱$$

$$۲ \text{ ب} \cdot \text{ج} + \text{ب} + \text{ج} - \text{ا} = \frac{\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}}{\text{ب} \cdot \text{ج}} = \frac{\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}}{\text{ب} \cdot \text{ج}}$$

$$= \frac{[\text{ب} + \text{ج} - \text{ا}][\text{ا} + (\text{ب} + \text{ج})]}{[\text{ا} + (\text{ب} + \text{ج})](\text{ب} + \text{ج} - \text{ا})} = \frac{\text{ب} \cdot \text{ج}}{\text{ب} \cdot \text{ج}} \dots (۱)$$

$$\text{اب } \text{ب} + \text{ج} - \text{ا} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{ا} = \text{ا}^۲ - \text{ن}^۲ = \text{ا}^۲ - (\text{ن} - \text{ا})^۲$$

پس (۱) سے حاصل ہوگا

$$۲ \text{ جہم } \frac{۱}{۲} = \frac{\text{ا}^۲ - (\text{ن} - \text{ا})^۲}{\text{ب} \cdot \text{ج}} = \frac{\text{ا}^۲ - (\text{ن} - \text{ا})^۲}{\text{ب} \cdot \text{ج}}$$

$$\therefore \text{جہم } \frac{۱}{۲} = \frac{\text{ا}(\text{ن} - \text{ا})}{\text{ب} \cdot \text{ج}} \dots (۲)$$

$$\text{اسی طرح سے } \text{جہم } \frac{۱}{۲} = \frac{\text{ا}(\text{ن} - \text{ب})}{\text{ج} \cdot \text{ا}} = \frac{\text{ا}(\text{ن} - \text{ب})}{\text{ج} \cdot \text{ا}}$$

۱۷۳- نصف زاویوں کے مماسات کو اضلاع کی رقوم

میں دریافت کرو

$$\text{چونکہ مس } \frac{1}{2} = \text{جب } \frac{1}{4} \text{ جم } \frac{1}{4}$$

اس لئے بموجب (۲) دفعات ۱۷۱ اور ۱۷۲

$$\text{مس } \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \left| \frac{(ن-ب)(ن-ج)}{ب \cdot ج} \right| \div \frac{1}{4} \left| \frac{(ن-ن)(ن-ن)}{ب \cdot ج} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \left| \frac{(ن-ب)(ن-ج)}{ن(ن-ن)} \right|$$

اسی طرح سے

$$\text{مس } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left| \frac{(ن-ج)(ن-ن)}{ن(ن-ب)} \right| \text{ اور مس } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left| \frac{(ن-ن)(ن-ب)}{ن(ن-ج)} \right|$$

چونکہ ہر ایک مثلث میں زاویہ ۱۸۰° سے ۹۰°

اس لئے $\frac{1}{4}$ کی جیب، جیب التمام اور ماس ہمیشہ مثبت ہونگے (دفعہ ۵۸)

اس لئے معلوم ہوا کہ اس دفعہ میں اور گزشتہ دو دفعات میں

علامات جذر کے ماقبل ہمیشہ مثبت علامت لینی چاہیئے۔

$$۱۷۴ - \text{مثال} - \text{اگر } ۱۳ = ب \text{ اور } ۱۳ = ج \text{ اور } ۱۵ = ن$$

$$\text{تو } ۱۳ + ۱۳ + ۱۵ = ۴۱ \text{، } ۴۱ - ۱۵ = ۲۶ \text{، } ۲۶ - ۱۳ = ۱۳ \text{، } ۱۳ - ۱۳ = ۰$$

اور ن - ج = ۰

$$\text{اس لئے جب } \frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \frac{4 \times 4}{15 \times 12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{جب } \frac{2}{45} = \frac{2}{45} = \frac{8 \times 4}{12 \times 15} = \frac{2}{7}$$

$$\text{جم } \frac{3}{13} = \frac{3}{13} = \frac{4 \times 21}{12 \times 13} = \frac{3}{2}$$

$$\text{مس } \frac{2}{2} = \frac{8 \times 4}{4 \times 21} = \frac{2}{7}$$

۱۷۵- مثلث کے کسی زاویہ کی جیب کو اضلاع کی رقوم میں دریافت کرو۔

بہوجب دفعہ ۱۱۵

جب ۱ = ۲ جب $\frac{1}{4}$ جم $\frac{1}{4}$
لیکن دفعات گزشتہ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$$\text{جب } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{(ن-ب)(ن-ج)}{ب \times ج} \text{ اور جم } \frac{1}{4} = \frac{ن(ن-ن)}{ب \times ج}$$

$$\text{اس لئے جب } ۱ = ۲ = \frac{(ن-ب)(ن-ج)}{ب \times ج} \text{ اور } \frac{ن(ن-ن)}{ب \times ج}$$

$$\text{جب } ۱ = \frac{۲}{ب \times ج} = \frac{ن(ن-ن)}{ب \times ج} \text{ اور } \frac{(ن-ب)(ن-ج)}{ب \times ج}$$

۲۶۰ مثله نمبری

کسی مثلث میں

۱- معلوم ہے ۱ = ۲۵، ۲ = ۵۲ اور ۳ = ۶۳

مس $\frac{1}{4}$ ، مس $\frac{1}{4}$ اور مس $\frac{1}{4}$ معلوم کرو

۲۔ معلوم ہے $\angle = 125^\circ$ ، $\angle B = 123^\circ$ اور $\angle C = 92^\circ$
مثلث کے نصف زاویوں کی جیوب اور زاویوں کی جیوب دریافت کرو

۳۔ معلوم ہے $\angle = 18^\circ$ ، $\angle B = 22^\circ$ اور $\angle C = 30^\circ$
جب $\angle$ ، جب $\angle B$ ، جب $\angle C$ دریافت کرو

ہر صورت میں ترسیمی عمل سے تصدیق کرو

۴۔ معلوم ہے $\angle = 35^\circ$ ، $\angle B = 82^\circ$ اور $\angle C = 91^\circ$
مس $\angle$ ، مس $\angle B$ ، مس $\angle C$ دریافت کرو

۵۔ معلوم ہے $\angle = 13^\circ$ ، $\angle B = 13^\circ$ اور $\angle C = 15^\circ$
زاویوں کی جیوب دریافت کرو۔ نیز عمل ترسیمی سے اپنے نتائج کی تصدیق کرو

۶۔ معلوم ہے $\angle = 284^\circ$ ، $\angle B = 814^\circ$ ، $\angle C = 895^\circ$
مس $\frac{1}{4}$ اور مس $\angle$ کی قیمتیں دریافت کرو،

۷۔ معلوم ہے $\angle = 33^\circ$ ، $\angle B = 22^\circ$ اور $\angle C = 22^\circ + 22^\circ$
مثلث کے زاوے دریافت کرو،

۱۷۶۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$\angle = \angle B + \angle C + \angle A$$

دیکھو شکل دفعہ ۱۷۰

صورت اول میں

$$\angle B = \angle C + \angle A$$

اور $\Delta ج = ج ج یعنی ج د = ب ج ج$
 اس لئے $\Delta = ب ج = ب د + د ج = ج ج ب + ب ج ج$
 صورت دوم میں

$\Delta ب = ج ب یعنی ب د = ج ج ب$
 اور $\Delta ج = ج ج ج = ج (ج - ۱۸۰)$
 $= - ج ج (دفعہ ۷۸)$

پس $\Delta ج = - ب ج ج$
 اس لئے اس صورت میں
 $\Delta = ب ج = ب د - ج د = ج ج ب - (ب ج ج)$
 پس ہر ایک صورت میں

$$\Delta = ب ج ج + ج ج ب$$

اسی طرح سے $\Delta = ج ج ب + ب ج ج$

اور $\Delta = ج ج ب + ب ج ج$
 ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$\Delta = ب ج - ج ب = ج ج - ج ج$$

کسی مثلث میں

$$\begin{aligned}
 & \text{ب} = \text{ج} \text{ ب} \\
 & \text{ج} = \text{ج} \text{ ب} \text{ ج} \\
 & \text{ب} - \text{ج} = \text{ج} \text{ ب} - \text{ج} \text{ ج} = \text{ج} \text{ ب} + \text{ج} \text{ ج} - \text{ج} \text{ ب} - \text{ج} \text{ ج} \\
 & \text{ب} + \text{ج} = \text{ج} \text{ ب} + \text{ج} \text{ ج} = \text{ج} \text{ ب} + \text{ج} \text{ ج} - \text{ج} \text{ ب} - \text{ج} \text{ ج} \\
 & \text{مس} \text{ ب} - \text{ج} \quad \text{مس} \text{ ب} - \text{ج} \\
 & \text{مس} \text{ ب} + \text{ج} = \text{مس} \text{ (} \frac{1}{2} - 90 \text{)} \\
 & \text{مس} \text{ ب} - \text{ج} \\
 & \text{مس} \text{ ب} - \text{ج} = \frac{1}{2} \text{ مم} \quad (\text{دفعہ ۷۵})
 \end{aligned}$$

$$\text{اس لئے} \quad \text{مس} \text{ ب} - \text{ج} = \text{ج} \text{ ب} - \text{ج} \text{ ج} = \frac{1}{2} \text{ مم}$$

۱۷۸- دفعہ ۱۷۰ کے ضابطوں سے ضوابط دفعہ ۱۷۶ حاصل ہو سکتے ہیں اور برعکس اس کے۔

$$\begin{aligned}
 & \text{دفعہ ۱۷۰ کے پہلے اور تیسرے ضابطے سے حاصل ہوگا} \\
 & \text{ب} \text{ جم} \text{ ج} + \text{ج} \text{ جم} \text{ ب} = \frac{1}{2} \text{ ج} + \frac{1}{2} \text{ ج} - \frac{1}{2} \text{ ج} + \frac{1}{2} \text{ ج} = \frac{1}{2} \text{ ج} = \frac{1}{2} \text{ ج}
 \end{aligned}$$

$$\text{اس لئے} \quad \frac{1}{2} = \text{ب} \text{ جم} \text{ ج} + \text{ج} \text{ جم} \text{ ب}$$

اسی طرح سے دفعہ ۱۷۶ کے باقی ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں

نیز دفعہ ۱۷۶ کے تین ضابطوں سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2} = \text{ب} \text{ جم} \text{ ج} + \text{ج} \text{ جم} \text{ ب}$$

$$\text{ب} = \text{ج} + \text{ا} + \text{ا} + \text{ج}$$

$$\text{ا} + \text{ج} = \text{ا} + \text{ج} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج}$$

ان تینوں کو بالترتیب 'ا'، 'ب'، 'ج' سے ضرب دینے اور جمع کرنے سے

$$\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} = \text{ا} + (\text{ب} + \text{ج} + \text{ج} + \text{ج} + \text{ب})$$

$$+ \text{ب} + (\text{ا} + \text{ج} + \text{ا} + \text{ج} + \text{ج}) - \text{ج} = (\text{ا} + \text{ج} + \text{ب} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ج})$$

$$\text{ج} = \text{ا} + \text{ب} - \text{ج}$$

اسی طرح سے دفعہ ۱۶۸ کے باقی ضابطے حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۷۹۔ طالب علم کو اکثر ایسی مساوات متانہ حل کرنی پڑیں گی

جن میں مثلث کے اضلاع اور زاویے دونوں شامل ہوں، ایسی صورت

میں بہتر ہوگا کہ وہ ضلعوں کو زاویوں کی رقوم میں یا زاویوں کی نسبتوں

کو ضلعوں کی رقوم میں بیان کر لے

$$\text{مثال ۱۔ ثابت کرو کہ } \text{ا} + \text{ج} - \text{ب} = \text{ج} = (\text{ب} + \text{ج}) \text{ جب } \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

بوجب دفعہ ۱۶۹

$$\text{ب} + \text{ج} = \text{ج} + \text{ب} + \text{ج} = \text{ج} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ج} + \text{ب} - \text{ج}$$

$$\text{ا} + \text{ج} = \text{ج} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ج} + \text{ب} - \text{ج}$$

$$\text{ج} = \text{ج} + \text{ب} - \text{ج}$$

$$\text{ب} + \text{ج} = \text{ج} + \text{ب} + \text{ج} = \text{ا} + \text{ج} + \text{ب} - \text{ج}$$

مثال ۲۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$(ب^۱ - ج^۱) مم ۱ + (ج^۲ - ک^۲) مم ب + (ک^۳ - ب^۳) مم ج = ۰$$

بحر ج دفعہ ۱۶۹

$$\frac{ج^۱}{ب} = \frac{ج ب}{ب} = \frac{ج ج}{ج} = ک (فرض کرو)$$

پس جہ معلوم

$$= (ب^۱ - ج^۱) \frac{ج ۱}{ک} + (ج^۲ - ک^۲) \frac{ج ب}{ب} + (ک^۳ - ب^۳) \frac{ج ج}{ج}$$

$$= \frac{۱}{ک} [(ب^۱ - ج^۱) ۱ + (ج^۲ - ک^۲) ۲ + (ک^۳ - ب^۳) ۳]$$

$$+ (ک^۳ - ب^۳) \frac{۱}{ک} + (ج^۲ - ک^۲) \frac{۲}{ک} + (ب^۱ - ج^۱) \frac{۳}{ک}$$

$$= ۲ ب^۱ ج^۱ ک [(ب^۱ - ج^۱) ۱ + (ج^۲ - ک^۲) ۲ + (ک^۳ - ب^۳) ۳]$$

$$= [(ب^۱ - ج^۱) ۱ + (ج^۲ - ک^۲) ۲ + (ک^۳ - ب^۳) ۳]$$

مثال ۳۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث میں

$$(۱ + ب + ج) (مس + \frac{۱}{۲} مس) = ۲ ج مم$$

دائیں طرف کا رکن

$$= ۲ ن [(ن - ج) (ج - ن) + (ن - ب) (ب - ن) + (ن - ک) (ک - ن)]$$

دفعہ ۱۷۳

$$= ۲ ن [(ن - ج) + (ن - ب) + (ن - ک)]$$

$$\text{ج} + \text{ب} + \text{ا} = \text{ج} + \text{مس} \frac{1}{4} + \text{مس} \frac{1}{4} = 2 \text{مس} \frac{1}{4}$$

$$\text{یعنی (ا + ب + ج) (مس} \frac{1}{4} + \text{مس} \frac{1}{4}) = 2 \text{ج} \text{مس} \frac{1}{4}$$

مثال ۴۔ اگر کسی مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کر دو کہ نصف زاویوں کے مابین تمام بھی سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے۔

معلوم ہے $\text{ا} + \text{ج} = 2 \text{ب}$ (۱)
اور ثابت کرنا مطلوب ہے

$$\text{مس} \frac{1}{4} + \text{مس} \frac{1}{4} = 2 \text{مس} \frac{1}{4} \text{ (۲)}$$

رابطہ (۲) درست ہوگا اگر

$$\begin{array}{c} \text{ن (ن-ا)} \\ \text{ن (ن-ب)} \end{array} \sqrt{+} \dots \sqrt{+} \begin{array}{c} \text{ن (ن-ا)} \\ \text{ن (ن-ب)} \end{array}$$

$$= \frac{\text{ن (ن-ا)} \text{ن (ن-ب)}}{\text{ن (ن-ا)} \text{ن (ن-ب)}}$$

یا طرفین کو $\text{ن (ن-ا)} \text{ن (ن-ب)}$ میں ضرب دینے سے رابطہ (۲) درست ہوگا اگر

$$2 \text{ (ن-ا)} = \text{ن (ن-ا)} + \text{ن (ن-ب)}$$

$$2 \text{ (ن-ا)} = \text{ن (ن-ا)} + \text{ن (ن-ب)} \quad \text{یعنی اگر}$$

$$\text{ا} + \text{ج} = 2 \text{ب} \quad \text{جو رابطہ (۱) ہے}$$

پس معلوم ہوا کہ اگر ربط (۱) صحیح ہو تو ربط (۲) بھی صحیح ہوتا ہے۔

امثلہ نمبری ۲۷

ثابت کرو کہ کسی مثلث Δ ب ج میں

$$۱- \text{ جب } \frac{1}{2} \text{ ب} - \frac{1}{2} \text{ ج} = \frac{1}{2} \text{ ج} - \frac{1}{2} \text{ ب} \text{ جم } \frac{1}{2}$$

$$۲- \frac{1}{2} \text{ ب} + \frac{1}{2} \text{ ج} = \frac{1}{2} \text{ ج} + \frac{1}{2} \text{ ب} \text{ جب } \frac{1}{2}$$

$$۳- \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج}) = \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{ب})$$

$$۴- \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{ج}) = \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{ب}) \text{ جم } \frac{1}{2}$$

$$۵- \frac{1}{2} (\text{جم} + \text{ج}) = \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{جم}) \text{ جب } \frac{1}{2}$$

$$۶- \frac{1}{2} (\text{جم} - \text{ج}) = \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{جم})$$

$$۷- \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج}) = \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{ب})$$

$$۸- \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{ج}) = \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{ب}) \text{ مم } \frac{1}{2}$$

$$۹- \frac{1}{2} \text{ جب } (\text{ب} + \text{ج}) = \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{ب})$$

$$۱۰- \frac{1}{2} \text{ جب } (\text{ب} - \text{ج}) + \frac{1}{2} \text{ جب } (\text{ج} - \text{ب}) + \frac{1}{2} \text{ جب } (\text{ب} - \text{ج}) = \frac{1}{2} \text{ جب } (\text{ج} - \text{ب}) + \frac{1}{2} \text{ جب } (\text{ب} - \text{ج}) + \frac{1}{2} \text{ جب } (\text{ج} - \text{ب})$$

$$۱۱- \frac{1}{2} (\text{ب} + \text{ج}) = \frac{1}{2} (\text{ج} + \text{ب}) \text{ مم } \frac{1}{2}$$

$$۱۲- \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج}) + \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{ب}) = \frac{1}{2} (\text{ج} - \text{ب}) + \frac{1}{2} (\text{ب} - \text{ج})$$

- ۱۳۔ $(\text{ا}^1 - \text{ب}^2 + \text{ج}^3) \text{سب} = (\text{ا}^1 + \text{ب}^2 - \text{ج}^3) \text{مسج}$
- ۱۴۔ $\text{ج}^3 = (\text{ا}^1 - \text{ب}^2) \text{جم}^2 + (\text{ا}^1 + \text{ب}^2) \text{جب}^2 \frac{\text{ج}}{۲}$
- ۱۵۔ $\text{ا}^1 \text{جب} (\text{ب} - \text{ج}) + \text{ب}^2 \text{جب} (\text{ج} - \text{ا}^1) + \text{ج}^3 \text{جب} (\text{ا}^1 - \text{ب}^2) =$
- ۱۶۔ $\text{ا}^1 \text{جب} (\text{ب} - \text{ج}) = \text{ب}^2 \text{جب} (\text{ج} - \text{ا}^1) = \text{ج}^3 \text{جب} (\text{ا}^1 - \text{ب}^2)$
 $\text{ب}^2 - \text{ج}^3 = \text{ا}^1 - \text{ب}^2$
- ۱۷۔ $\text{ا}^1 \text{جب} \frac{\text{ا}^1}{۲} \text{جب} \text{ب} - \text{ج} + \text{ب}^2 \text{جب} \frac{\text{ب}^2}{۲} \text{جب} \text{ج} - \text{ا}^1 =$
- ۱۸۔ $\text{ا}^1 (\text{جم}^2 \text{ب} - \text{جم}^2 \text{ج}) + \text{ب}^2 (\text{جم}^2 \text{ج} - \text{جم}^2 \text{ا}^1) + \text{ج}^3 (\text{جم}^2 \text{ا}^1 - \text{جم}^2 \text{ب}^2) =$
- ۱۹۔ $\text{ب}^2 - \text{ج}^3 = \text{ا}^1 \text{جب} \frac{\text{ا}^1}{۲} + \text{ب}^2 \text{جب} \frac{\text{ب}^2}{۲} + \text{ج}^3 \text{جب} \frac{\text{ج}^3}{۲} =$
- ۲۰۔ $(\text{ا}^1 + \text{ب}^2 + \text{ج}^3) = \text{م}^1 \frac{\text{ا}^1}{۲} + \text{م}^2 \frac{\text{ب}^2}{۲} + \text{م}^3 \frac{\text{ج}^3}{۲}$
 $\text{ا}^1 + \text{ب}^2 + \text{ج}^3 = \text{م}^1 + \text{م}^2 + \text{م}^3$
- ۲۱۔ $\text{ا}^1 \text{جم} (\text{ب} - \text{ج}) + \text{ب}^2 \text{جم} (\text{ج} - \text{ا}^1) + \text{ج}^3 \text{جم} (\text{ا}^1 - \text{ب}^2) =$
- ۲۲۔ اگر کسی مثلث کے اضلاع ۳، ۳، ۳ فٹ ہوں تو ثابت کرو کہ اس کا سب سے بڑا زاویہ ۱۲۰° سے بڑا ہو گا۔

۲۳۔ ایک مثلث قائم الزاویہ کے اضلاع ۲۱ اور ۲۸ فٹ ہیں، اگر

قائم الزاویہ سے وتر پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول دریافت کرو

۲۴۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں ۱:۲:۳ ہوں تو

ثابت کرو کہ ان کے مقابل کے اضلاع کی نسبتیں ۱:۳:۲ ہوں گی۔

۲۵۔ اگر کسی مثلث میں

$$\text{مس } \frac{4}{3} = \frac{5}{4} \text{ اور مس } \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$$

تو مس $\frac{3}{4}$ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ اس مثلث میں $\angle + \angle = 90^\circ$

۲۶۔ کسی مثلث قائم الزاویہ متساوی الساقین میں ایک مستقیم

خط مساوی ضلعوں میں سے ایک کے نقطہ وسط کو مقابل کے زاویے سے

وصل کرتا ہے، ثابت کرو کہ یہ زاویے کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے

ماس تمام ۲ اور ۳ ہیں

۲۷۔ کسی مثلث $\triangle ABC$ میں عمود AD قاعدے کو ایسے دو حصوں

میں تقسیم کرتا ہے کہ خطوط BD ، CD اور AD کی باہمی نسبتیں ۲:۳:۶

ہیں، ثابت کرو کہ مثلث کا زاویہ $\angle A$ 90° ہے

۲۸۔ ایک فنڈر حلقہ کا قطر ۱۰ اینچ ہے اور وہ ایک نقطہ سے جس کا راسی فاصلہ

مرکز سے ۱ فٹ ہے چھ مساوی رسیوں کے ذریعہ جو محیط کے برابر برابر فاصلوں پر بندھی

ہوئی ہیں آویزاں ہے، متصل رسیوں کے درمیانی زاویہ کی جیب تمام دریافت کرو۔

۲۹۔ اگر $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$\sin A$ ، $\sin B$ ، $\sin C$ بھی سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے

۳۰۔ اگر $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ

$\cos A$ ، $\cos B$ ، $\cos C$ بھی سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے

میں ہونگے

۳۱۔ اگر $\text{ا}^1 \text{ب}^1 \text{ج}^1$ سلسلہ موسیقیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ
جب $\text{ا}^1 \text{ب}^1 \text{ج}^1$ اور جب $\text{ا}^2 \text{ب}^2 \text{ج}^2$ جی سلسلہ موسیقیہ میں ہونگے
۳۲۔ ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے بڑا اور
سب سے چھوٹا زاویہ بالترتیب طہ اور ذہ ہے ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^2 (\text{ا} - \text{ب}) = (\text{ا} - \text{ب})^2 = \text{ج}^2 + \text{ج}^2$$

۳۳۔ ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور سب سے
بڑا زاویہ سب سے چھوٹے زاویے سے بقدر ۹۰ کے زیادہ ہے ثابت کرو
کہ اضلاع $\text{ا}^2 + \text{ا}^2$ اور $\text{ا}^2 - \text{ا}^2$ کے متناسب ہیں
۳۴۔ اگر $\text{ج} = ۹۰$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا}^2 + \text{ج}^2 = \text{ب}^2 + \text{ج}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$$

۳۵۔ اگر کسی مثلث $\text{ا} \text{ب} \text{ج}$ میں قاعدہ $\text{ب} \text{ج}$ پر ایک ایسا
نقطہ د مقرر کریں کہ $\text{د} : \text{ج} :: \text{م} : \text{ن}$ اور اگر
 $\text{ا} \text{ب} = \text{د} = \text{ع} = \text{ا} \text{ج} = \text{ب} = \text{ا} \text{د} = \text{ج} = \text{د} = \text{ط}$ اور
 $\text{ا} \text{د} = \text{لا}$ تو ثابت کرو کہ

$$(\text{م} + \text{ن}) (\text{م} - \text{ن}) = \text{م}^2 - \text{ن}^2$$

$$= \text{ن}^2 - \text{م}^2$$

$$\text{اور } (\text{م} + \text{ن})^2 - \text{لا}^2 = (\text{م} + \text{ن}) (\text{م} + \text{ن}) = (\text{م} + \text{ن})^2 - \text{م}^2 - \text{ن}^2$$

۳۶۔ اگر کسی مثلث میں ضلع ج کا منصف ضلع ب پر عمود ہو تو
ثابت کرو کہ $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 = \text{ج}^2$

۳۷۔ ثابت کرو کہ اگر کسی مثلث میں طہ کوئی زاویہ ہو تو

$$\text{ب} \text{ جھ طہ} = \text{ج} \text{ جھ (ا - طہ)} + \text{ا} \text{ جھ (ج + طہ)}$$

۳۸۔ اگر کسی مثلث کے زاویوں ا اور ب سے دو عمود ع اور

م ایک ایسے خط پر نکالے جائیں جو مثلث کے راس ج میں سے گزرے

تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا} \text{ ع} + \text{ب} \text{ ا} \text{ م} - \text{ا} \text{ ب} \text{ ع} \text{ م} = \text{ا} \text{ ب} \text{ ج} \text{ ب} \text{ ا}$$

۳۹۔ کسی مثلث ا ب ج میں خطوط و ا، و ب اور و ج

اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ

$$\text{ا} \text{ و ا} \text{ ب} = \text{ا} \text{ و ب} \text{ ج} = \text{ا} \text{ و ج} \text{ ا} = \text{سہ}$$

تو ثابت کرو کہ

$$\text{م م سہ} = \text{م م ا} + \text{م م ب} + \text{م م ج}$$

$$\text{اور} \quad \text{ق م سہ} = \text{ق م ا} + \text{ق م ب} + \text{ق م ج}$$

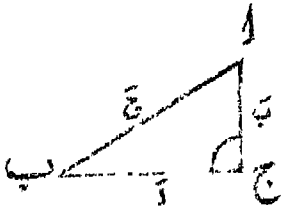
باب سیزدہم

مثلثوں کا حل

۱۸۰۔ کسی مثلث کے تین ضلعوں اور تین زاویوں کو مثلث کے اجزا کہتے ہیں اگر کوئی سے تین اجزا کسی مثلث کے معلوم ہوں بشرطیکہ وہ تین زاویے نہ ہوں تو باقی اضلاع اور زاوے معلوم ہو سکتے ہیں لیکن جب تین زاوے معلوم ہوں تو صرف اضلاع کے طولوں کی باہمی نسبتیں معلوم ہو سکتی ہیں یعنی مثلث کی شکل دریافت ہو سکتی ہے اور مقدار نہیں معلوم ہو سکتی، جب مثلث کے تین اجزا معلوم ہوں تو باقی تین اجزا معلوم کرنے کے عمل کو مثلث کا حل کہتے ہیں۔

سب سے پہلے ہم مثلث قائم الزاویہ کے حل پر بحث کریں گے۔ مثلث قائم الزاویہ وہ ہے جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو۔ ذیل کی چار دفعات ایسے مثلثات کے متعلق ہیں، زاویہ ج قائمہ ہے۔

۱۸۱۔ صورت اول۔ مثلث قائم الزاویہ کا وتر اور ایک ضلع معلوم ہے مثلث کو حل کرو۔



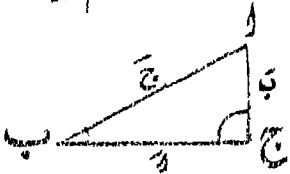
فرض کرو کہ ضلع ب اور وتر ج معلوم ہیں،
رابط جب ب = $\frac{ب}{ج}$ سے
زاویہ ب معلوم ہو سکتا ہے۔

۱۰۔ ل جب ب = ۱۰ + لوک ب - لوک ج
اب چونکہ ب اور ج معلوم ہیں اس لئے ل جب ب اور ب معلوم ہو سکتے ہیں اور اس لئے زاویہ ا (۹۰ - ب) معلوم ہو سکتا ہے۔

ضلع ا ذیل کے کسی ایک رابط سے معلوم ہو سکتا ہے

$$\text{جم ب} = \frac{ب}{ج} \text{ 'مس ب} = \frac{ب}{ج} \text{ یا } ا = \frac{ب}{ج} (ب - ج) (ب + ج)$$

۱۸۲ - صورت دوم - اضلاع ا اور ب معلوم ہیں مثلث کو حل کرو۔



۱۱۔ صورت میں زاویہ ب رابط مس ب = $\frac{ب}{ج}$ سے معلوم ہو سکتا ہے۔

یعنی ل مس ب = ۱۰ + لوک ب - لوک ج
اس لئے ل مس ب اور اس لئے ب معلوم ہو سکتا ہے
بہر زاویہ ا (۹۰ - ب) معلوم ہو سکتا ہے۔

رابط ج = $\frac{ب}{ج}$ سے وتر ج دریافت ہو سکتا ہے
لیکن یہ رابط لوکارر معنی حسابات کے لئے اتنا موزوں نہیں ہے

دترج دریافت کرنے کے لئے طریق ذیل بہتر ہوگا۔

$$\text{جب ب} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} \quad \text{یعنی ج} = \frac{\text{ب}}{\text{جب ب}}$$

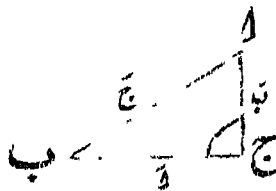
$$\text{لوک ج} = \text{لوک ب} - \text{لوک جب ب}$$

$$= ۱۰ + \text{لوک ب} - \text{ل جب ب جس سے ج معلوم}$$

ہو سکتا ہے

۱۸۳۱۔ صورت سوم۔ مثلث کا زاویہ ب اور ایک ضلع

ا معلوم ہے۔ مثلث کو حل کرو

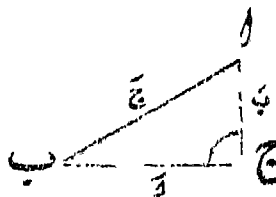


اس صورت میں $(ا = 40 - ب)$ معلوم ہے

ضلع ب کو ربط $\frac{ب}{ا} = \frac{ب}{40}$ = مس ب سے اور

ج کو ربط $\frac{ج}{ا} = \frac{ج}{40}$ = جم ب سے دریافت کرو۔

۱۸۳۲۔ صورت چہارم۔ زاویہ



ب اور دترج معلوم ہیں مثلث کو حل کرو۔

ا معلوم ہے اور اضلاع ا اور ب ارتباطات

ذیل سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

$$\frac{ا}{ج} = \text{جم ب اور } \frac{ب}{ج} = \text{جب ب}$$

۱۔ مثلث نمبر ۲۸

۱۔ مثلث تمام الزاویہ ا ب ج میں ج قائمہ ہے، اگر $ا = ۵۰$ اور

ب = ۲۵ تو اضلاع دریافت کرو (مس $۲۵ = ۲ + ۲۳$)

۲۔ مثلث کے دو ضلع ۱۰ اور ۲۰ فٹ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ

۹۰ ہے مثلث کو حل کرو۔ معلوم ہے لوک $۲۰ = ۱۰۰۳ \times ۱۵۳$

اور ۲۶ مس $۳۳ = ۹۵۶۹۸۶۸۴۷$

نیز فرق ۳۱۶۰ کے لئے =

۳۔ اگر مثلث کے ایک زاوئے سے اس کے قاعدے پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول ۳ پتچ ہوتا ہے اور اس زاویہ کو احاطہ کرنے والے اضلاع کے طول ۴ اور ۵ پتچ ہیں، مثلث کے زاوئے دریافت کرو۔

معلوم ہے لوک $۲ = ۱۰۰۳ \times ۵۴$ ، لوک $۳ = ۱۲۱۳ \times ۵۴۷$

ل جب ۳۶ $۵۲ = ۸۱۱۸۶ \times ۹۷۷$ فرق ۱ کے لئے = ۱۶۸۴ اور

ل جب ۳۸ $۳۵ = ۱۰۱۲۲ \times ۹۷۸$ فرق ۱ کے لئے = ۱۱۱۵

۴۔ ایک مثلث قائم الزاویہ میں وتر اس عمود کا چار گنا ہے جو زاویہ قائمہ سے وتر پر نکالا جائے، مثلث کے حادے زاوئے دریافت کرو۔

۱۸۵۔ اب ہم ایسے مثلثوں کے حل کے متعلق بحث

کریں گے جن کا کوئی زاویہ قائمہ نہ ہو۔

اس کی مختلف صورتیں یہ ہیں

صورت اوّل۔ تین اضلاع معلوم ہیں

صورت دوم۔ دو اضلاع اور درمیانی زاویہ معلوم ہے

صورت سوم۔ دو اضلاع اور ایک کے مقابل کا زاویہ معلوم ہے

صورت چہارم۔ ایک ضلع اور دو زاوئے معلوم ہیں

صورت پنجم۔ تینوں زاوئے معلوم ہیں۔

۱۸۶۔ صورت اول تینوں اضلاع $ا$ ، $ب$ ، $ج$ معلوم ہیں

چونکہ اضلاع معلوم ہیں اس لئے $ن$ اور اس لئے مقادیر

$$\begin{aligned} & \text{ن۔ ۱۔ ن۔ ب۔ ن۔ ج۔ معلوم ہیں۔ نصف زاوے } \frac{1}{4} \\ & \text{پ۔ ج۔ ذیل کے ضابطوں سے معلوم ہو سکتے ہیں۔} \\ & \text{مس } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left| \begin{array}{c} \text{(ن۔ ب۔ ج)} \\ \text{(ن۔ ۱۔ ج)} \end{array} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{مس } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left| \begin{array}{c} \text{(ن۔ ج۔ ۱)} \\ \text{(ن۔ ب۔ ج)} \end{array} \right| \text{ اور مس } \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left| \begin{array}{c} \text{(ن۔ ۱۔ ج)} \\ \text{(ن۔ ب۔ ج)} \end{array} \right| \\ & \text{ن (ن۔ ج)} \end{aligned}$$

صرف دو زاویوں کا دریافت کرنا کافی ہوگا کیونکہ ان دو کے مجموعہ کو ۱۸۰ سے تفریق کرنے سے تیسرا زاویہ معلوم ہو سکتا ہے۔
 اوپر کے زاویوں کی قیمتیں نصف زاویوں کی جیب یا جیب تمام کے ضابطوں کو استعمال کرنے سے بھی حاصل ہو سکتی ہیں دیکھو دفعات ۱۷۱ اور ۱۷۲

یہ سب ضابطے لوکارتمی حسابات کے لئے موزوں ہیں۔

$$\text{نیز زاویہ ۱ ضابطہ جم ۱} = \frac{\text{ب۔ ج۔ ۱} - \text{ب۔ ج۔ ۲}}{\text{ب۔ ج۔ ۲}} \text{ (دفعہ ۱۷۰) سے بھی معلوم ہو سکتا ہے۔}$$

لیکن بالعموم یہ ضابطے لوکارتمی حسابات کے لئے موزوں نہیں ہوتا مگر جب اضلاع ۱، ۲، ۳ مقدار میں قلیل ہوں تو اُس وقت اس ضابطے کو استعمال کرنے میں سہولت ہوگی۔

مثال۔ ایک مثلث کے اضلاع ۳۲، ۴۰، ۶۶ فٹ ہیں سب سے بڑے ضلع کے مقابل کا زاویہ دریافت کرو، معلوم ہے

$$\therefore \frac{ج}{۲} = ۹۶ - ۱۸ = ۴۳ = ۱۷ \times ۲$$

$$\text{اور اس لئے ج} = ۳۳ \times ۲ = ۶۶$$

امثلہ نمبری ۲۹

[طالب علم کو امثلہ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۱، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۲) کے نتائج کی تصدیق عمل ترسیمی سے کرنی چاہیئے]

۱۔ ایک مثلث کے اضلاع ۵۶، ۴۵، ۳۳ فٹ ہیں اس کا سب سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۲۔ مثلث کے اضلاع بالترتیب ۷، ۳، ۳، ۱۳، ۱۳ فٹ ہیں اس سے چھوٹے زاویہ میں درجوں کی تعداد دریافت کرو۔

۳۔ ایک مثلث کے اضلاع ۱۱ + ۱۱، ۱۱ + ۱۱، ۱۱ + ۱۱ فٹ ہیں اس سے بڑا زاویہ ۲۰° ہے۔

۴۔ مثلث کے اضلاع ۱۱، ۱۱، ۱۱ فٹ ہیں اس سے بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۵۔ اگر ۲ = ۱۱، ۱۱ = ۱۱ اور ج = ۱۱ - ۱۱ تو مثلث کو حل کرو

۶۔ اگر ۲ = ۱۱، ۱۱ = ۱۱ اور ج = ۱۱ + ۱۱ تو مثلث کو حل کرو

۷۔ اگر ۲ = ۱۱، ۱۱ = ۱۱ اور ج = ۱۱ تو ب معلوم کرو۔ معلوم ہے

$$\text{لوک } ۲ = ۱۰.۳۵$$

$$\text{لیس } ۲۹ = ۲۹ \times ۲ = ۵۸$$

$$\text{اور لیس } ۲۹ = ۲۹ \times ۲ = ۵۸$$

۸۔ ایک مثلث کے اضلاع ۱۳۰، ۱۲۳، ۷ فٹ ہیں اس سے بڑا

زاویہ دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰.۱۰۳، ل مس ۳۸ = ۳۹، ۹۵۹.۰۲۹۳۷۶ =

اور ل مس ۳۸ = ۴۰، ۹۵۹.۰۳۱۹۶۶ =

۹۔ ایک مثلث کے اضلاع ۲۲۲، ۱۸۸، ۲۷۰ فٹ ہیں، سب سے

بڑا زاویہ دریافت کرو۔ معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰.۱۰۳، لوک ۳ = ۳۷.۷۷۱۲۱۳ =

لوک ۷ = ۸۴۵.۰۹۸۰، ل مس ۳۸ = ۲۰، ۹۵۸۹۸۰.۱۰۴ =

اور ل مس ۳۸ = ۱۹، ۹۵۸۹۷۷.۷ =

۱۰۔ ایک مثلث کے اضلاع ۲، ۳، ۴ ہیں، سب سے بڑا زاویہ دریافت

کرو۔ معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰.۱۰۳، لوک ۳ = ۳۷.۷۷۱۲۱۳ =

ل مس ۲ = ۱۴، ۱۰.۵۱۱۰۸۳۹۵ =

اور ل مس ۲ = ۱۵، ۱۰.۵۱۱۱۱۰۰۴ =

جدولوں کو استعمال کرنے سے ان مثلثوں کے سب زاویے دریافت

کرو جن میں

۱۱۔ ۲۵ = ا، ۲۴ = ب، ۲۶ = ج، ۲۷ =

۱۲۔ ۱۷ = ا، ۱۶ = ب، ۲۰ = ج، ۲۷ =

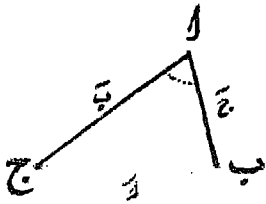
۱۳۔ ۲۰۰ = ا، ۲۰۰ = ب، ۱۰۵۰ = ج، ۱۱۵۰ =

۱۸۷۔ صورت دوم۔ دو اضلاع ب اور ج معلوم ہیں

اور ان کا درمیانی زاویہ ا بھی معلوم ہے، مثلث کو حل

کرو۔

فرض کرو کہ ضلع ب ضلع ج سے بڑا ہے تب



$$(۱) \dots \dots \dots (۱۷۷۷) \frac{۱}{۲} \text{ م م } = \text{ب} - \text{ج} = \frac{۱}{۲} \text{ م م } \dots \dots \dots$$

$$(۲) \dots \dots \dots \frac{۱}{۲} \text{ م م } = \text{ب} + \text{ج} = \frac{۱}{۲} \text{ م م } \dots \dots \dots$$

ان دو ربطوں سے $\text{ب} - \text{ج}$ اور $\frac{\text{ب} + \text{ج}}{۲}$ کی قیمتیں اور اسلئے

جمع اور تفریق کرنے سے ب اور ج کی قیمتیں حاصل ہونگی

اس کے بعد تیسرا ضلع 'ا' ربط $\frac{۱}{۲} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$ سے حاصل

ہو سکتا ہے

یعنی $\frac{۱}{۲} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$ جس سے $\frac{۱}{۲}$ حاصل ہوگا

ضلع 'ا' ضابطہ ذیل سے بھی حاصل ہو سکتا ہے

$$\frac{۱}{۲} = \text{ب} + \text{ج} - ۲ \text{ م م } \dots \dots \dots$$

یہ ضابطہ لوکارمٹی حسابات کے لئے اتنا موزوں نہیں، لیکن اُس صورت میں اکثر مفید ثابت ہوتا ہے جبکہ اصلاَح 'ا' اور ب مقدار میں نہایت ہی قلیل ہوں۔

۱۸۸- مثال ۱- اگر $\text{ب} = ۳۴$ ، $\text{ج} = ۱$ اور $\frac{۱}{۲} = ۳۰$ تو مثلث کو

حل کرو۔

$$\text{مس} \frac{\text{ب-ج}}{2} = \frac{\text{ج-ب}}{\text{ج+ب}} \text{م} \frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \text{م} \frac{1}{2}$$

اب مس ۱۵ = $\frac{1-37}{1+37}$ (دفعہ ۱۰۷)

یعنی $m = 15$ $\frac{m}{2} = 7.5$

اس لئے مس $\frac{1}{2}$ ج = ۱

(1) ب = ج = ۲۵

نیز $25 = 15 - 90 = \frac{1}{2} - 90 = -\frac{179}{2}$ ج.ب. (۲).....

جمع کرنے سے پ = ۱۲۰

تفریق کرنے سے ج = ۳۰

چونکہ $1 = ج$ ، اس لئے $ا = ج = ۱$ ۔

یا بطریق ذیل

$$1 = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \times \sqrt[3]{2} - 1 + 3 = 1 \text{ بج ۲ بج ۱}$$

یعنی $\alpha = 1 = \beta$

$$P = 1 = 2 \quad \therefore$$

اور $i_{20} = j - i_{10} = 6$

مثال ۲۔ اگر $b = 215$ ، $c = 105$ اور $a = 24$ تو باقی دو

زادے شیر تیسرا ضلع دریافت کرو۔ معلوم ہو

لوک ۲ = ۱۰۳۰۰ ۶ لوک ۱۱ = ۹۲۵۰۰ ۵

لوک ۲۱۱۵۹۳ = ۱۰۵ کک ۶ ۲۵۳۴۳۱۰۴ = ۲۱۲۵۳۴۶ کک

ل مم ۳۷ = ۱۰۶۱۱۹۴۷۲۳ = ۱۳ فرق ا کے لئے = ۲۴۲۲

ل مس ۲۳ = ۹۵۴۵۵۳۴۷۷ = ۲۰ فرق ا کے لئے = ۳۳۴۲

ل جب ۲۷ = ۹۵۹۸۳۸۰۵۲ = ۲۷

اور ل قم ۲۸ = ۱۰۶۳۲۲۵۰۲۵ = ۲۵ فرق ا کے لئے = ۲۳۳۴

اس جگہ مس ب - ج = $\frac{ب - ج}{ب + ج}$ مم $\frac{۱}{۲}$ = $\frac{۱۱}{۳۲}$ مم ۳۷ = ۳۱ ۳۰

اب ل مم ۳۷ = ۱۰۶۱۱۹۴۷۲۳ = ۱۳

فرق ۳۰ کیلئے = ۱۳۱۱

ل مم ۳۷ = ۱۰۶۱۱۹۴۷۲۳ = ۱۳

لوک ۱۱ = ۱۰۶۱۳۹۲۷

۱۱۵۱۴۰۷۳۳۹

لوک ۳۲ = ۱۵۵۰۵۱۵

ل مس $\frac{۱}{۲}$ (ب - ج) = ۹۵۴۵۵۵۸۳۹

لیکن ل مس ۲۳ = ۹۵۴۵۵۳۴۷۷ = ۲۰

فرق = ۲۳۴۲

فرق ۲۳۴۲ = $\frac{۲۳۴۲}{۳۳۴۲}$ کے لئے

فرق ۳۲۵۱ = $\frac{۳۲۵۱}{۳۳۴۲}$ کے لئے

ب - ج = $\frac{۲۰}{۲۳}$ = ۲۰ ۲۳

لیکن ب + ج = $\frac{۱}{۲}$ = ۹۰ = $\frac{۱}{۲}$ ۵۲ = ۴۰ ۳۰

۳۳۰۱۰۳
۵
۱۵۵۰۵۱۵

۲۳۴۲
۱۳۳۴۲
۱۳۳۴۲
۶۱۹۰
۹۶۲۸
۲۳۳۲۰

∴ جمع کرنے سے ب = ۴۲ ۷۷ ۷۷

اور تفریق کرنے سے ج = ۴۸ ۶۵ ۶۸

نیز جب $\frac{ق}{ج} = \frac{ج}{ق}$ = ج ق م ج

∴ ۱۰۵ = ۴۲ جب ۴۷ ق م ۶۸ ۶۵ ۴۸

لیکن ل ق م ۶۸ ۶۵ ۴۸ = ۱۰۵ ۳۲۲۵۰۲۵

فرق ۴۸ کیلئے = ۱۸۹۶

ل ق م ۶۸ ۶۵ ۴۸ = ۱۰۶ ۳۲۲۳۱۵۸

ل جب ۴۷ ۴۲ = ۹۵ ۹۸۳۸۰۵۲

لوک ۱۰۵ = ۲۵۰۲۱۱۸۹۳

۲۲۵۳۲۴۳۱۰۳

∴ لوک ۴۷ = ۲۵۳۲۴۳۱۰۳

∴ ۲۱۲۵۳۴۶ = ۴۷

$$۲۳۳۴ \times \frac{۴۸}{۴۷}$$

$$۲۳۳۴ \times \frac{۴۷}{۵} =$$

$$۱۸۹۶ =$$

۱۸۹ - صورت دوم میں مثلث کا تیسرا ضلع و زاویوں ب اور ج کو

دریافت کرنے کے بغیر بھی معلوم ہو سکتا ہے۔ دو طریقے حسب ذیل ہیں

(۱) چونکہ $ا = ب + ج - ۲$ ب ج جم ا

$$= ب + ج - ۲ - ۲(جم ا - ۱)$$

$$= (ب + ج) - ۲ - ۲(جم ا - ۱)$$

$$∴ ا = (ب + ج) - ۲ - ۲(جم ا - ۱)$$

اس لئے اگر جب $\frac{ا}{ب + ج} = \frac{ب + ج}{ا}$ جم ا

$$\text{تو } \angle = (\text{ب} + \text{ج})^2 [1 - \text{جب}^2] = (\text{ب} + \text{ج})^2 \text{جم}^2$$

$$\text{یعنی } \angle = (\text{ب} + \text{ج}) \text{جم}$$

پس اگر جب طہ کو ربط جب طہ = $\frac{1}{2} \sqrt{\text{ب}^2 + \text{ج}^2}$ جم سے معلوم کیا جائے تو حاصل ہوگا

$$\angle = (\text{ب} + \text{ج}) \text{جم}$$

$$(۲) \angle = \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - ۲ \text{ب} \text{ج} \text{جم}$$

$$= \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - ۲ \text{ب} \text{ج} (1 - \text{جب}^2) = (\text{ب} - \text{ج})^2 + ۴ \text{ب} \text{ج} \text{جب}^2$$

$$= (\text{ب} - \text{ج})^2 [1 + \frac{4 \text{ب} \text{ج} \text{جب}^2}{(\text{ب} - \text{ج})^2}]$$

$$\text{فرض کرو کہ } \frac{4 \text{ب} \text{ج} \text{جب}^2}{(\text{ب} - \text{ج})^2} = \text{مس}^2$$

$$\text{یعنی مس}^2 = \frac{4 \text{ب} \text{ج} \text{جب}^2}{(\text{ب} - \text{ج})^2}$$

اس لئے مس معلوم ہو سکتا ہے

$$\text{ نیز } \angle = (\text{ب} - \text{ج})^2 [1 + \text{مس}^2] = (\text{ب} - \text{ج})^2 \text{جم}^2$$

$$\text{یعنی } \angle = (\text{ب} - \text{ج}) \text{قطر}$$

اس سے کو آسانی معلوم ہو سکتا ہے

اس دفعہ کے حسابات میں زاوے طہ اور فہ تسہیل عمل کے لئے داخل کئے گئے ہیں ان کو اعدادی زاوے کہتے ہیں (دفعہ ۱۳۵)

امثلہ نمبری ۳۰

[طالب علم کو امثلہ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۳، ۵، ۶، ۱۱) کے نتائج کی تصدیق ترسیعی عمل سے کرنی چاہیئے]

۱۔ اگر ب = ۹۰، ج = ۷۰ اور د = ۲۸، ۳۰ تو ب اور ج دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳، ل مم ۶ = ۲۳، ۱۵ = ۱۰۶۱۳۲۳۱۱۱

ل مس ۹ = ۳۷ = ۹۵۲۲۹۰۰۷۱

اور ل مس ۹ = ۳۸ = ۹۵۲۲۹۷۷۳۵

۲۔ اگر د = ۲۱، ب = ۱۱ اور ج = ۳۲، ۳۰ تو د اور ب دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳

اور ل مس ۲۲ = ۳۸، ۴۵ = ۱۰۶۵۰۵۱۵

۳۔ اگر کسی مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہوں اور سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے اضلاع کے طول بالترتیب ۲۴ اور ۱۶ فٹ ہوں تو مثلث کے زاوئے دریافت کرو، نیز تیسرے ضلع کا طول معلوم کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ۱۲۱۳ = ۴۷۷۷

اور ل مس ۹ = ۴ = ۹۵۵۳۹۴۲۸۷، فرق آ کے لئے = ۴۰۸۴

۴۔ اگر د = ۱۳، ب = ۷ اور ج = ۶۰ تو د اور ب کی قیمتیں دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۳ = ۳۴۷۷۱۲۱۳

اور ل مس ۲۷ = ۹۵۷۱۵۵۵۰۸ فرق آ کے لئے = ۳۰۸۷

۵۔ اگر ۲ = ب اور ج = ۱۲۰ تو ا اور ب کی قیمتیں دریافت کرو، نیز ج اور ا کی باہمی نسبت معلوم کرو، معلوم ہے

لوک ۳ = ۳۴۷۷۱۲۱۳

اور ل مس ۱۰ = ۵۳۷۰۴۰۲۸۳۹ فرق آ کے لئے = ۷۸۰۸

۶۔ اگر ب = ۱۴، ج = ۱۱ اور ا = ۶۰ تو ب اور ج کی قیمتیں دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ۳۴۷۷۱۲۱۳

ل مس ۱۱ = ۴۳۷۳۲۹۹

اور ل مس ۱۱ = ۴۵۷۳۱۸۰۶۴۰

۷۔ ایک مثلث کے دو ضلعوں کے طول بالترتیب ۵۴۰ اور ۴۲۰ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ۵۲° ہے، باقی زاوے دریافت کرو، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳، ل مس ۲۶ = ۴۵۷۸۹۱۴۳۰

ل مس ۱۴ = ۴۰۷۳۱۸۹ اور ل مس ۱۴ = ۴۱۷۳۰۷۴۵۳

۸۔ اگر ب = ۲۴ فٹ، ج = ۲ فٹ اور ا = ۲۰۲۲ تو باقی زاوے

دریافت کرو اور ثابت کرو کہ تیسرا ضلع تقریباً ۱ فٹ ہے، معلوم ہے

لوک ۲ = ۳۰۱۰۳، لوک ۳ = ۳۴۷۷۱۲

ل مم ۱۰ = ۱۰۷۳۶۵۰۷۱، ل جب ۲۲ = ۴۵۷۸۹۷۷

ل مس ۲۹ = ۴۰۷۳۱۸۹، ل مس ۲۹ = ۴۱۷۳۰۷۴۵۳

اور ل جب $۹۴۹ \text{ } ۲۷ \text{ } ۳۳ = ۹۵۸۸۰۷۹$

۹- اگر $۱ = ۲$ ، $۱ = ۳$ اور $۱ = ۴$ تو مثلث کو حل کرو۔

۱۰- مثلث کے دو اضلاع $۱ + ۳$ اور $۳ - ۱$ ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ۹۰ ہے، تیسرا ضلع اور باقی زاوے دریافت کرو

۱۱- اگر $۱ = ۱$ ، $۱ = ۳$ اور $۱ = ۴$ تو ضلع ۱ کا طول دریافت کرو

۱۲- اگر $۱ = ۱$ ، $۱ = ۳$ اور $۱ = ۴$ تو ثابت کرو کہ $۱ = ۲$

۱۳- اگر $۱ = ۱$ ، $۱ = ۳$ اور $۱ = ۴$ تو ثابت کرو کہ تیسرا ضلع

$۱ = ۲$

۱۴- ایک مثلث کا ایک زاویہ ۳۰ ہے اور اس کے متصل ضلعوں کے

طول ۴۰ اور ۳۰ گز ہیں، تیسرے ضلع کا طول دریافت کرو نیز باقی

زاویوں میں انگریزی درجوں کی تعداد معلوم کرو

۱۵- ایک مثلث کے اضلاع ۹ اور ۳ ہیں اور ان کے مقابل کے

زاویوں کا فرق ۹۰ ہے، مثلث کا قاعدہ اور اس کے زاوے دریافت

کرو، معلوم ہے

لوک $۲ = ۳۰۱۰۳$ ، لوک $۳ = ۴۷۷۱۲۱۳$

لوک $۴ = ۷۵۸۹۳$ ، لوک $۵ = ۸۸۰۲۱۳۲$

ل مس $۲۶ = ۴۳$

اور ل مس $۲۶ = ۳۳$

۱۶- اگر $۱ = ۲$ ، $۱ = ۳$ اور $۱ = ۴$ تو ثابت کرو کہ

$۱ = ۲$ (ب + ج) = ج

ج

اگر $\angle = 3$ ، $\angle = 1$ اور $\angle = 53$ ، $\angle = 38$
 تو $\angle$ اور $\angle$ کو دریافت کرنے کے بغیر $\angle$ دریافت کرو ، معلوم ہے
 $\angle = 2$ ، $\angle = 30.10$ ، $\angle = 25298$ ، $\angle = 30.30.842$
 $\angle = 25299$ ، $\angle = 30.30.34$ ، $\angle = 30.30.34$ ، $\angle = 25299$
 اور $\angle = 30.30.34$ ، $\angle = 25299$ ، $\angle = 30.30.34$
 ایک مثلث کے دو اضلاع 234 اور 158 فٹ ہیں اور
 ان کا درمیانی زاویہ 96 ہے ، قاعدہ اور باقی زاوے دریافت کرو ،
 معلوم ہے

$\angle = 2$ ، $\angle = 30.10$ ، $\angle = 25298$ ، $\angle = 30.30.842$
 $\angle = 25299$ ، $\angle = 30.30.34$ ، $\angle = 30.30.34$ ، $\angle = 25299$
 $\angle = 30.30.34$ ، $\angle = 25299$ ، $\angle = 30.30.34$
 $\angle = 25299$ ، $\angle = 30.30.34$ ، $\angle = 30.30.34$
 اور $\angle = 30.30.34$ ، $\angle = 25299$ ، $\angle = 30.30.34$

[ضابطہ جم $\angle = \angle + \angle = \angle$ کو استعمال کر دیا ضابطہ مثال ۱۷]
 ذیل کی چار مثالوں میں مطلوبہ لوکار متوں کو جدیدوں سے لو

۱۸۔ اگر $\angle = 2325$ ، $\angle = 30.30.842$ اور $\angle = 30.30.842$ تو
 مثلث کو حل کرو

۱۹۔ اگر $\angle = 130$ ، $\angle = 43$ اور $\angle = 32$ ، $\angle = 15$ تو مثلث
 کو حل کرو

۲۰۔ مثلث کے دو اضلاع 2345 اور 158 فٹ ہیں اور ان کا
 درمیانی زاویہ 58 ہے ، باقی زاوے دریافت کرو

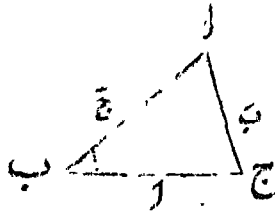
۲۱۔ مثلث کے دو اضلاع ۲۳۷۷.۹ اور ۱۳۰.۵۹۶ فٹ ہیں اور ان کا

درمیانی زاویہ ۵۹° ہے، باقی زاویے دریافت کرو

۱۹۰۔ صورت سوم۔ دو اضلاع ب اور ج معلوم ہیں

اور ان میں سے ایک کے مقابل کا زاویہ ب معلوم ہے، مثلث

کو حل کرو۔



زاویہ ج ربط $\frac{\sin ج}{\sin ب} = \frac{\sin ج}{\sin ب}$ سے

یعنی جب ج = ب ج ب (۱)

سے معلوم ہو سکتا ہے۔

طرفین کے نوکار تم لینے سے زاویہ ج معلوم ہو سکتا ہے

اور پھر ۱۸۰ - ب - ج جس سے ا حاصل ہوتا ہے

ضلع ا ربط $\frac{\sin ا}{\sin ج} = \frac{\sin ا}{\sin ج}$

یعنی ا = ب ج ب (۲)

سے دریافت ہو سکتا ہے۔

۱۹۱۔ دفعہ گزشتہ کی مساوات (۱) سے بعض صورتوں

میں ج کی کوئی قیمت حاصل نہیں ہوتی اور بعض دفعہ ایک قیمت حاصل ہوتی ہے اور بعض دفعہ دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں صورت اول۔ فرض کرو کہ زاویہ ب ح حادثہ ہے

(ا) اگر ب > ج جب اب تو مساوات (۱) میں دائیں طرف کا رکن ایک سے بڑا ہوگا اور اس مساوات کے موافق ج کی کوئی قیمت نہیں ہو سکتی۔

(ب) اگر ب = ج جب ب تو (۱) میں دائیں طرف کا رکن ایک کے برابر ہوگا اور اس صورت میں ج کی قیمت ۹۰ درجہ ہوگی۔ (ج) اگر ب < ج جب ب تو ج کی دو قیمتیں ایسی ہونگی جن میں سے ہر ایک کی جیب ج جیب ب ہوگی، ایک قیمت ۹۰ اور ۹۰

کے درمیان واقع ہوگی اور دوسری ۹۰ اور ۱۸۰ کے درمیان لیکن یہ دونوں قیمتیں ہمیشہ شرائط سوال کو پورا نہیں کریں گی۔ کیونکہ اگر ب < ج تو ب کے ج کی صورت میں ج کی منفرد قیمت جائز نہیں ہو سکتی کیونکہ ج زاویہ منفرجہ نہیں ہو سکتا جب تک کہ ب زاویہ منفرجہ نہ ہو اور ایک ہی مثلث میں دو زاویوں میں سے ہر ایک کا قائلہ سے بڑا ہونا صریحاً ناممکن ہے۔

اگر ب > ج اور زاویہ ب ح حادثہ ہو تو ج کی دونوں قیمتیں شرائط سوال کو پورا کریں گی اس صورت میں لا کی دو قیمتیں ہونگی اور اس لئے ارتباط (۲) سے لا کی بھی دو قیمتیں حاصل

ہونگی اور اس لئے دو مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کرین گے۔
 صورت دوم۔ فرض کرو کہ ب منفرد ہے
 اگر $\angle B > \angle C$ یا $\angle C > \angle B$ تو ب بالترتیب کم ہوگا یا برابر ہوگا ج کے
 اس لئے ج زاویہ منفرد ہوگا اس صورت میں مثلث کا بننا ہی
 ناممکن ہوگا

اگر $\angle B = \angle C$ تو زاویہ ج کی حادہ قیمت جو مساوات (۱) سے
 حاصل ہوگی شرائط سوال کو پورا کرے گی مگر منفرد قیمت جائز
 نہیں ہوگی اس صورت میں مثلث کا صرف ایک جائز حل ہوگا
 چونکہ $\angle B = \angle C$ اور ب کی بعض قیمتوں کے لئے مثلث کے
 حل کرنے میں شک یا اشتباہ واقع ہوتا ہے اس لئے اس
 صورت کو مثلثوں کے حل کی مشتبہ صورت کہتے ہیں

۱۹۲۔ صورت مشتبہ پر بحث بطریق ہندسی اس طرح ہو سکتی ہے
 فرض کرو کہ اجزاء $\angle B$ ، $\angle C$ اور ب معلوم ہیں اور ہم مثلث کو بنانے
 کی کوشش کرتے ہیں۔

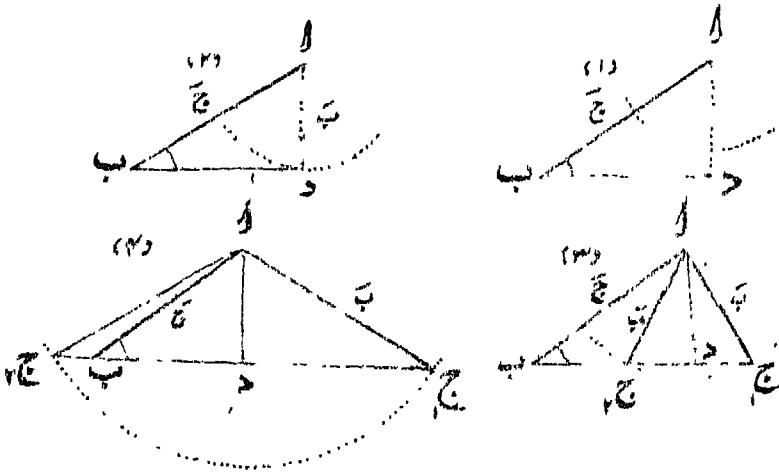
سب سے اول زاویہ $\angle A$ ب $\angle B$ برابر زاویہ ب کے بناؤ اسکے
 بعد سمت ب $\angle A$ میں طول ب $\angle C$ کے مساوی قطع کرو اس
 طرح سے زاویہ $\angle A$ کا نقطہ $\angle A$ معلوم ہو جائے گا۔

اب ہمیں ایک تیسرا نقطہ ج معلوم کرنا ہے جو ب $\angle B$ پر واقع ہو
 اور جس کا فاصلہ نقطہ $\angle A$ سے ب کے برابر ہو، اس نقطہ کا مقام
 دریافت کرنے کے لئے $\angle A$ کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو جس کا
 نصف قطرب ہو، اب اگر یہ دائرہ ب $\angle B$ کو قطع کرے تو جو

نقطہ یا نقاط تقاطع اس طرح حاصل ہونگے ان سے ج کا مقام معلوم ہو جائے گا
ب د پر عمود ا د نکالو پس

$$ا د = ا ب جب ب = ج جب ب$$

ذیل کی صورتوں میں سے ایک نہ ایک پیدا ہوگی
ممکن ہے کہ دائرہ ب د کو قطع نہ کرے (شکل اول)
یا ممکن ہے کہ دائرہ ب د کو مس کرے (شکل دوم)
یا دائرہ ب د کو دو نقطوں ج اور ج پر قطع کرے (شکل سوم و چہارم)



پہلی شکل سے ظاہر ہے کہ اس صورت میں کوئی ایسا مثلث نہیں ہو سکتا جو شرائط مطلوبہ کو پورا کرے

اس صورت میں $ا د > ا ب$ یعنی $ج > ج جب ب$
دوسری شکل سے ایک مثلث ا ب د حاصل ہوتا ہے جس میں

زاویہ د قائمہ ہے

اس صورت میں $\angle B = \angle A = \angle C$ جب ب
تیسری شکل سے دو مثلث $\triangle ABC$ اور $\triangle ABC$ حاصل ہوتے ہیں
اس صورت میں $\angle B$ بلحاظ مقدار کے $\angle A$ اور $\angle C$ کے درمیان
واقع ہے یعنی

$\angle B < \angle C$ اور $\angle B < \angle A$

چوتھی شکل میں صرف ایک مثلث $\triangle ABC$ ایسا ہے جو شرائط
سوال کو پورا کرتا ہے

[مثلث $\triangle ABC$ شرائط مطلوبہ کو پورا نہیں کرتا کیونکہ اس میں
مقام $\angle B$ پر جو زاویہ بنتا ہے وہ زاویہ $\angle B$ کے برابر نہیں لیکن
وہ زاویہ $180^\circ - \angle B$ کے برابر ہے] ظاہر ہے کہ اس صورت میں
مقدار $\angle B$ مقادیر $\angle C$ جب $\angle B$ اور $\angle C$ دونوں سے بڑی ہے۔
اگر زاویہ $\angle B$ منفرجہ ہو تو مناسب شکلیں $\triangle ABC$ سے معلوم ہوگا
کہ اگر $\angle B > \angle C$ تو کوئی مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا نہیں کر سکتا
(کیونکہ مثلثوں $\triangle ABC$ اور $\triangle ABC$ میں
مقام $\angle B$ پر جو زاویہ بنے گا وہ $180^\circ - \angle B$ کے برابر ہوگا
اور $\angle B$ کے برابر نہیں ہوگا) اگر $\angle B < \angle C$ تو معلوم ہوگا کہ
اس صورت میں صرف ایک مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کر سکتا ہے
اوپر کے نتائج کا خلاصہ یہ ہے

فرض کرو کہ مثلث کے اجزاء $\angle B$ ، $\angle C$ ، $\angle A$ معلوم ہیں

(۱) اگر $\angle B > \angle C$ جب $\angle B$ تو اس صورت میں کوئی مثلث

شرائط سوال کو پورا نہیں کرتا۔

(۲) اگر $\angle B = \angle C$ جب B تو ایک مثلث قائم الزاویہ شرائط سوال کو پورا کرتا ہے

(۳) اگر $\angle B < \angle C$ جب B اور $\angle C$ اور زاویہ B حادہ ہو تو دو مثلث شرائط معلومہ کو پورا کرتے ہیں

(۴) اگر $\angle B > \angle C$ تو اس صورت میں صرف ایک مثلث ہوگا
 صریحاً اگر $\angle B = \angle C$ تو شکل سوم میں نقاط B اور C ایک دوسرے پر منطبق ہونگے اور اس صورت میں صرف ایک مثلث ہوگا،

(۵) اگر B منفرجہ ہو تو کوئی مثلث شرائط سوال کو پورا نہیں کر سکتا سوائے اس صورت کے جبکہ $\angle B < \angle C$

۱۹۳۔ صورت مشتبه پر بحث بطریق جبر یہ اس طرح

ہو سکتی ہے۔

شکل دفعہ ۱۹۰ سے حاصل ہوگا

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$$

$$\therefore a^2 - 2ac \cos B + c^2 = b^2$$

$$= b^2 - c^2 + c^2 + a^2 - 2ac \cos B = b^2$$

$$\therefore a^2 - c^2 + c^2 + a^2 - 2ac \cos B = b^2$$

یعنی $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cos A$ جب A (۱)

مسادات (۱) سے a کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے اگر $\angle B$ ، $\angle C$

اور ب معلوم ہوں

(ا) اگر $\angle$ جب ب تو مقدار $\angle$ - $\angle$ جب ب خیالی

ہوگی اور (ا) سے $\angle$ کی کوئی حقیقی قیمت حاصل نہ ہوگی

(ب) اگر $\angle$ - $\angle$ جب ب تو $\angle$ کی صرف ایک قیمت

$\angle$ جب ب ہوگی

پس اس صورت میں صرف ایک مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا

کرے گا اور وہ مثلث قائم الزاویہ ہوگا۔

(ج) اگر $\angle$ - $\angle$ جب ب تو $\angle$ کی دو قیمتیں ہونگی لیکن

چونکہ $\angle$ کا مثبت ہونا ضروری ہے اس لئے مساوات (ا) میں

ہم علامت جذر کے ماقبل منفی علامت صرف اُس صورت میں

لے سکتے ہیں

جبکہ $\angle$ جم ب - $\angle$ - $\angle$ جب ب مثبت ہو

یعنی جبکہ $\angle$ - $\angle$ جب ب - $\angle$ جب ب $\angle$ جم ب

یعنی $\angle$ - $\angle$ جب ب - $\angle$ جم ب یعنی $\angle$ - $\angle$

اس لئے معلوم ہوا کہ دو مثلث صرف اُسی صورت میں حاصل ہونگے

جبکہ $\angle$ - $\angle$ جب ب اور ساتھ ہی $\angle$ - $\angle$

(د) اگر زاویہ ب منفی ہو تو $\angle$ جم ب منفی ہوگا اور $\angle$ کی

ایک قیمت ہمیشہ منفی ہوگی اور مثلث ناممکن ہوگا

دوسری قیمت صرف اُس صورت میں مثبت ہوگی

اگر $\angle$ جم ب + $\angle$ - $\angle$ جب ب مثبت ہو

یعنی اگر $\text{ب} \times \text{ج} = \text{ج} \times \text{ب}$ - ج حجم ب

یعنی اگر $\text{ب} \times \text{ج} = \text{ج} \times \text{ب} + \text{ج} \times \text{ج}$ ب

یعنی اگر $\text{ب} \times \text{ج}$

اس لئے معلوم ہوا کہ جب زاویہ ب منفرد ہو تو کوئی مثلث شرائط سوال کو پورا نہیں کر سکتا اگر $\text{ب} > \text{ج}$ اور صرف ایک مثلث شرائط مطلوبہ کو پورا کرے گا اگر $\text{ب} < \text{ج}$

۱۹۴- مثال - معلوم ہے $\text{ب} = ۱۶$ ، $\text{ج} = ۲۵$ اور $\text{ب} \times \text{ج} = ۴۰۰$

ثابت کرو کہ مثلث کامل مشتبہ ہے، باقی زاویے دریافت کرو معلوم ہے

لوک $۲ = ۳۰۱۰۳$ ، ل جب $۳۳ = ۱۵$ اور ۹۵۹۳۹۰۱۲۹

ل جب $۵۸ = ۵۶$ اور ۹۵۹۳۲۷۶۱۶

اور ل جب $۵۸ = ۵۷$ اور ۹۵۹۳۲۸۳۷۶

جب $\text{ج} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}}$ جب $\text{ب} = \frac{۲۵}{۱۶}$ جب $\text{ب} = \frac{۱۶}{۲۵}$ جب $\text{ب} = \frac{۱۶}{۲۵}$ جب $\text{ب} = \frac{۱۶}{۲۵}$

اس لئے ل جب $\text{ج} = ۲ + \text{ل}$ جب $۳۳ = ۱۵$ - لوک $۲ = ۳۰۱۰۳$ اور ۹۵۹۳۲۸۳۷۶

اس لئے ل جب $\text{ج} = ۲ + \text{ل}$ جب $۳۳ = ۱۵$ - لوک $۲ = ۳۰۱۰۳$ اور ۹۵۹۳۲۸۳۷۶

ل جب $۵۸ = ۵۶$ اور ۹۵۹۳۲۷۶۱۶

فرق $۷۰ =$

فرق $۷۱۳ =$

$$\begin{array}{r} ۷۱۳ \\ ۷۱۳ \times ۲۲۷۸ (۵۶) \\ \hline ۳۸۰ \\ ۲۷۸ \\ \hline ۲۷۸ \end{array}$$

$$\therefore \text{زاوی فرق} = \frac{۷۱۳}{۲۷۸} \times ۶۰$$

$$= ۵۶ \text{ تقریباً}$$

$$\therefore \text{ج} = ۵۶ \ ۵۶ \ ۵۸ \text{ یا } ۱۸۰ - ۵۶ \ ۵۶ \ ۵۸$$

اس لئے (شکل ۳ دفعہ ۱۹۲) سے حاصل ہوگا

$$\text{ج} = ۵۶ \ ۵۶ \ ۵۸ \text{ اور ج} = ۱۲۱ \ ۳ \ ۳$$

$$\therefore \text{ب اور ج} = ۱۸۰ - ۱۵ \ ۳۳ - ۵۶ \ ۵۶ \ ۵۸$$

$$= ۸۶ \ ۲۸ \ ۳$$

$$\text{اور ب اور ج} = ۱۸۰ - ۱۵ \ ۳۳ - ۱۲۱ \ ۳ \ ۳$$

$$= ۲۵ \ ۲۱ \ ۵۶$$

امثلہ نمبری ۳۱

[طالب علم کو امثلہ ذیل میں سے بعض (مثلاً ۳، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۳) کے نتائج کی ترسیبی عمل سے تصدیق کرنی چاہیے]

۱۔ اگر $۵ = \text{ب}$ اور $۷ = \text{ج}$ اور جب $۱ = \frac{۳}{۵}$ تو معلوم کرو کہ مثلث کے حل کرنے میں کتنی صورت پیدا ہوگی یا نہیں۔

۲۔ اگر $۲ = \text{ج}$ اور $۱ = \text{ب}$ اور $۱ = \frac{۳}{۵}$ تو مثلث کو حل کرو

۳۔ اگر $۱۰ = \text{ج}$ اور $۱۰ = \text{ب}$ اور $۱ = \frac{۳}{۵}$ تو مثلث کو حل کرو

۴۔ اگر $۲ = \text{ب}$ اور $۳ = \text{ج}$ اور $۱ = \frac{۳}{۵}$ تو ثابت کرو کہ تیسرے ضلع

کی دو قیمتیں ہو سکتی ہیں جن میں سے ایک دوسری کی دو چند ہے

۵۔ اگر $۳۰ = \text{ب}$ اور $۸ = \text{ج}$ اور $۶ = \text{ج}$ دریافت کرو

۶۔ معلوم ہے $\text{ب} = ۳۰$ اور $\text{ج} = ۱۵۰$ اور $\text{ب} = ۵۰$ اور $\text{ج} = ۱۲۱$

ثابت کرو کہ ان دو مثلثوں میں سے جو شرائط سوال کو پورا کرتے ہیں

ایک مثلث متساوی الساقین ہے اور دوسرا مثلث قائم الزاویہ ہے

تیسرے ضلع کی بڑی قیمت دریافت کرو

اگر $b = 30$ ، $c = 150$ اور $a = 5$ تو کیا حل مشتبہ ہوگا ؟

۷۔ صورت مشتبہ میں a ، b اور c معلوم ہیں ثابت کرو کہ c کی دو قیمتوں کا تفاوت $2\sqrt{a^2 - b^2}$ ہے

۸۔ اگر $a = 5$ ، $b = 3$ اور $c = 25$ تو مثلث کے باقی زاوے دریافت کرو، معلوم ہے

لوک $2 = 30.103$ ، ل جب $33 = 29$ ، $452.504 = 95$

اور ل جب $33 = 30$ ، $453.993 = 95$

۹۔ اگر $a = 9$ ، $b = 12$ اور $c = 30$ تو c دریافت کرو، معلوم ہے

لوک $2 = 30.103$ ، لوک $3 = 244.12$

لوک $161 = 25233.1$ ، لوک $348 = 2556435$

ل جب $a = 39$ ، $b = 110.8$ اور $c = 95$ ، ل جب $a = 39$ ، $b = 82$ اور $c = 95$

اور ل جب $a = 10.8$ ، $b = 11$ اور $c = 95$

۱۰۔ معلوم کرو کہ ذیل کے مثلثوں کے حل مشتبہ ہیں یا نہیں۔

صورت مشتبہ میں تیسرے ضلع کی چھوٹی قیمت اور دونوں صورتوں میں باقی زاوے دریافت کرو

(۱) $a = 30$ ، $c = 250$ فٹ اور $b = 125$ فٹ

(۲) $a = 30$ ، $c = 250$ فٹ اور $b = 200$ فٹ

معلوم ہے

لوک $2 = 30.103$ ، لوک $45.3893 = 45.9401$ ، $45.9401 = 45.9401$

ل جب $a = 38$ ، $b = 31$ ، $45.9401 = 45.9401$

اور ل جب $\hat{A} = 121^\circ$ 951419001

۱۱۔ معلوم ہے $\hat{C} = 250^\circ$ ، $\hat{B} = 230^\circ$ اور $\hat{A} = 22^\circ$ 12122 ۔
زاوئے $\hat{B}$ اور $\hat{C}$ دریافت کرو اور نیز یہ بھی معلوم کرو کہ کیا ان کی
ایک سے زیادہ قیمت ہو سکتی ہے؟

معلوم ہے، لوک $255 = 3949300$ ، لوک $232 = 3802112$ ۔
ل جب $\hat{A} = 121^\circ$ 959483402 ، ل جب $\hat{A} = 121^\circ$ 959483111 ۔
اور ل جب $\hat{A} = 121^\circ$ 9594904439

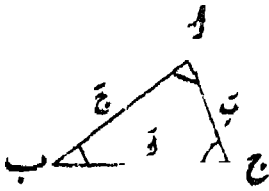
۱۲۔ دوسید ہی سڑکیں ایک دوسرے کو زاویہ 30° پر قطع کرتی ہیں
اور ان کے مقام تقاطع سے دو مسافر A اور B ایک ہی وقت پر
روانہ ہوتے ہیں، A ایک سڑک پر ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جاتا
ہے اور B یکساں رفتار سے دوسری سڑک پر چلتا ہے، تین گھنٹہ
کے بعد ان کا باہمی فاصلہ ۹ میل ہے ثابت کرو کہ اس شرط کو پورا
کرنے کے لئے $\hat{B}$ کی رفتار کی دو قیمتیں ہو سکتی ہیں، انکو معلوم کرو۔
۱۳۔ ایک مثلث کا ایک ضلع ۳۲ فٹ ہے اور اس کے مقابل کا زاویہ 30° ہے
مثلث کا دوسرا ضلع ۱۰۱۵ فٹ ہے اسکے مقابل کا زاویہ دریافت کرو اور ثابت
کرو کہ اس زاویہ کی ایک سے زیادہ قیمتیں ہو سکتی ہیں۔

۱۴۔ ایک مثلث کے دو اضلاع ۵۳۷۴۵ اور ۱۵۸۶۵۶
فٹ ہیں اور ضلع ۱۵۸۶۵۶ کے مقابل کا زاویہ 15° ہے، مثلث
یا مثلثوں کے باقی زاوئے دریافت کرو۔

۱۵۔ معلوم ہے $\hat{A} = 90^\circ$ ، $\hat{C} = 230^\circ$ اور $\hat{B} = 230^\circ$ ۔
ج کی چھوٹی قیمت دریافت کرو۔

۱۹۵- صورت چہارم- ایک ضلع اور دو زاوے یعنی $\angle A$

اور $\angle B$ اور $\angle C$ معلوم ہیں
چونکہ ایک مثلث کے تین زاوے دو قائموں کے برابر ہوتے
ہیں اس لئے تیسرا زاویہ معلوم
ہو سکتا ہے،



اضلاع $\angle B$ اور $\angle C$ ارتباطات
ذیل سے حاصل ہو سکتے ہیں

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

جس سے $\angle B = \angle C$ جب $\angle A$ اور $\angle C = \angle B$ جب $\angle A$

۱۹۶- صورت پنجم- تینوں زاوے $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$ معلوم ہیں
اس صورت میں صرف اضلاع کی نسبتیں ذیل کے منابطوں سے
معلوم ہو سکتی ہیں -

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

اضلاع کی مطلق قیمتیں اس صورت میں معلوم نہیں ہو سکتیں

امثلہ نمبری ۳۲

۱- اگر $\angle A = 60^\circ$ اور $\angle B = 45^\circ$ تو $\angle C = 75^\circ$ کی نسبتیں دریافت کرو

۲- ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں ۱ : ۲ : ۷ ہیں ثابت کرو

کہ سب سے بڑے ضلع کی نسبت سب سے چھوٹے ضلع کے ساتھ

$$۵۶: ۱ + ۵۶ - ۱ =$$

$$۳ - اگر ۱ = ۲۵، ب = ۲۵ اور ج = ۹۰ تو ثابت کرو کہ$$

$$۱ + ج = ۲۶ = ۲ ب$$

$$۴ - ایک مثلث کے دو زاویے بالترتیب ۴۱° ۳۱° ۴۲° اور$$

$$۲۱° ۱۹° ۵° ہیں اور پہلے زاویہ کے مقابل کا ضلع ۵۵ ہے، دوسرے$$

$$زاویے کے مقابل جو ضلع ہو اُس کا طول دریافت کرو، معلوم ہے$$

$$لوک ۵۵ = ۱۵۷۳۰۳۶۲۷، لوک ۴۹۰۶۳ = ۷۹۰۶۳ = ۳۶۸۹۷۷۷۵$$

$$ل جب ۴۱ ۳۱ ۴۲ = ۸۱۸۸۷۷۷۹$$

$$اور ل جب ۲۱ ۱۹ ۵ = ۹۷۹۷۶۳۹۲۷$$

$$۵ - دو جہازوں کے درمیان فاصلہ ایک میل ہے اور ہر ایک جہاز$$

$$سے اُس زاویہ کا مشاہدہ کیا گیا ہے جو دوسرے جہاز اور کنارہ پر کے$$

$$ایک مینارہ روشنی کے درمیانی فاصلے کے محاذی اول الذکر جہاز$$

$$پر بنتا ہے اور یہ زاویے بالترتیب ۵۲° ۲۵° ۱۵° اور ۲۵° ۹° ۳۰°$$

$$ہیں، معلوم ہے$$

$$ل جب ۲۵ ۹ ۳۰ = ۹۷۹۸۵۲۶۳۵$$

$$ل جب ۵۲ ۲۵ ۱۵ = ۸۹۹۰۰۵۵$$

$$لوک ۱۵۲۱۹۷ = ۵۰۸۶۲۵۳۰ اور لوک ۱۵۲۱۹۸ = ۵۰۸۶۲۸۸۶$$

$$ہر ایک جہاز سے روشنی کا فاصلہ دریافت کرو$$

$$۶ - ایک مثلث میں قاعدے کے متصل زاویے ۲۲° اور ۱۱۲°$$

$$ہیں، ثابت کرو کہ قاعدہ ارتفاع کا دو چند ہے۔$$

ذیل کی پانچ مثالوں کے لئے لوکار متی جدولوں کی ضرورت ہوگی
 ۷۔ ایک مثلث کا قاعدہ ۷ فٹ ہے اور قاعدے کے متصل
 زاوے ۱۲۹° ۲۳' اور ۳۸° ۳۶' ہیں، چھوٹے ضلع کا طول دریافت کرو
 ۸۔ اگر ایک مثلث کے زاویوں کی باہمی نسبتیں ۵:۱۰:۲۱ ہوں
 اور چھوٹے زاوے کے مقابل کا ضلع ۳ فٹ ہو تو باقی اضلاع دریافت
 کرو۔

۹۔ ایک مثلث کے زاوے ۱۵۰° ۱۸' ۲۰' اور ۱۱° ۴۴' ہیں اور
 سب سے بڑا ضلع ۱۰۰۰ فٹ ہے، سب سے چھوٹا ضلع دریافت کرو
 ۱۰۔ نقطہ ب سے نقطہ ا کا فاصلہ دریافت کرنے کے لئے خط
 ب ج اور زدوایا ا ب ج اور ب ج ا کو ناپا گیا ہے اور ان کی
 پیمائشیں بالترتیب ۲۸۷ گز اور ۵۵۵ ۳۳' ۱۰' اور ۱۸۵ ۸' ۲۰' ہیں، فاصلہ
 ا ب دریافت کرو۔

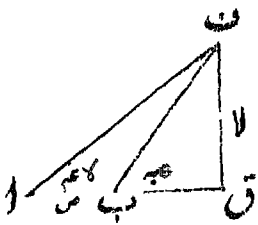
۱۱۔ فاصلہ ا ب معلوم کرنے کی غرض سے ا ب مساوی ۱۰۰۰ گز
 کسی مناسب سمت میں ناپا گیا ہے، نقاط ا اور ب پر کے زاوے
 ب ا ب اور ب ا ب بالترتیب ۱۸° ۱۸' اور ۱۴° ۳۸' مشاہدہ کئے
 گئے ہیں، فاصلہ ا ب کو قریب ترین گز تک دریافت کرو

باب چہارم

بلندیاں اور فاصلے

۱۹۷۔ اس باب میں ہم خاص قسم کے عملی مسائل پر غور کریں گے جو بالعموم ارضی پیمائشوں میں استعمال ہوتے ہیں اس قسم کے سادہ سوالات کا ذکر باب سوم میں آچکا ہے۔

۱۹۸۔ مختلف مقامات پر زاویوں کا مشاہدہ کرنے سے ایک ایسے برج کی بلندی دریافت کرو جس تک ہم نہیں پہنچ سکتے۔



فرض کرو کہ 'ف' ق برج ہے اور پائین برج 'ق' میں سے جو زمین گزرتی ہے وہ متوازی الافق ہے۔

اس زمین کے نقطہ 'ا' پر برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع عہ ناپو۔ مقام 'ا' سے پائین برج کی سیدھ میں فاصلہ 'اب' (= ص) ناپو۔

اور مقام ب پر زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کرو۔
اب برج کی بلندی لا مطلوب ہے، اس کو فاصلہ ص سے
اس طرح منسلک کرو۔

مثلث ف ب ق سے

$$\text{ب ل} = \text{جب بہ} \dots\dots\dots (۱)$$

اور مثلث ف ا ب سے

$$\frac{\text{ف ب}}{\text{ص}} = \frac{\text{جب ف ا ب}}{\text{جب ب ق ا}} = \frac{\text{جب ع}}{\text{جب (بہ - ع)}} \dots\dots\dots (۲)$$

چونکہ $\angle \text{ب ق ا} = \angle \text{ق ب ف} - \angle \text{ق ا ف} = \text{بہ} - \text{ع}$
(۱) اور (۲) کو باہم ضرب دینے سے

$$\text{ص ل} = \frac{\text{جب ع جب بہ}}{\text{جب (بہ - ع)}}$$

$$\text{یعنی ل} = \text{ص} \frac{\text{جب ع جب بہ}}{\text{جب (بہ - ع)}}$$

جس سے بلندی لا حاصل ہوتی ہے اور اس ضابطہ کی صورت
لوکارتمی حسابات کے لئے نہایت موزوں ہے۔

عدوی مثال۔ اگر ص = ۱۰۰ فٹ ماعہ = ۳۰ اور

بہ = ۶۰ تو

$$\text{لا} = ۱۰۰ \frac{\text{جب بہ جب ع}}{\text{جب بہ}} = \frac{۳۰}{۶۰} \times ۱۰۰ = ۵۰ \text{ فٹ}$$

۱۹۹۔ اگر فاصلہ ا ب کو ق کی سیدھ میں ناپنا آسان

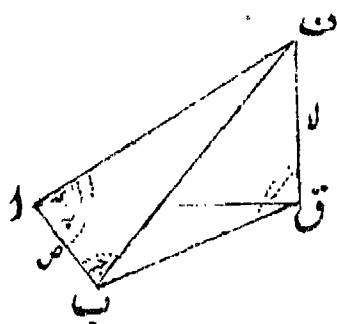
نہ ہو تو اس کو سطح افقی پر کسی اور مناسب سمت میں
تاپو اور مقام θ پر ϕ کا زاویہ ارتفاع ϕ مشاہدہ کرو،
تیز زاویہ ϕ (ب) (= θ) معلوم کرو۔

مقام ب پر زاویہ $\angle$ (= جہ) ناپو۔

شہدش و راب میں

لے روٹ پ = ۱۰۔ لے روٹ پ۔ لے روٹ پ

$$(2 + 2) - 10 =$$



اس لئے $\frac{ان}{ص} = \frac{بب ق ا}{ج ب ق ا} = \frac{ج ب}{ج ب (ب + ج)}$

مثبت فراق سے حاصل ہوگا۔

لا = (ن جب عہ ص جب عہ جب جب (جہ + جہ)

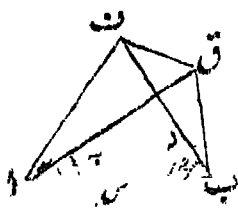
اور یہ جملہ لوگارتھی حسابات کے ٹے موزوں ہے۔

۲۰۰۔ دو مقامات کے درمیان کا فاصلہ معلوم ہے ،

اُن پر کھڑے ہو کر دو اور ایسے مقامات کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو جن تک ہم نہیں پہنچ سکتے، چاروں بمقام

ایک ہی سطح میں واقع ہیں۔

فرض کرو کہ ق ن اور ق دو مقام ہیں جن کا باہمی فاصلہ ق ن مطلوب ہے۔



فرض کرو کہ مقامات ا اور ب

کا فاصلہ (ص) دیا ہوا ہے

مقام ا پر زاوے ق ن ا ب

اور ق ا ب ناپو اور ان کو

بالترتیب عہ اور بہ سے تعبیر کرو۔

نیز مقام ب پر زاوے ق ن ا اور ق ب ا ناپو

اور انکو بالترتیب جہ اور لہ سے تعبیر کرو۔

اب چونکہ مثلث ق ن ا میں ایک ضلع ص اور

دو متصل زاوے عہ اور جہ معلوم ہیں اس لئے بموجب

دفعہ ۱۶۹، ا ن ذیل کے ربط سے حاصل ہو سکتا ہے

$$\frac{ص}{ن} = \frac{ج ب}{ن ق} = \frac{ج ب}{ج ب + عہ} \quad (۱)$$

اسی طرح سے مثلث ق ا ب میں

$$\frac{ا ق}{ص} = \frac{ج ب لہ}{ج ب + جہ} \quad (۲)$$

اب ہمیں مثلث ا ن ق کے اضلاع ا ن اور ا ق

نیز انکا درمیانی زاویہ ق ا ن (= عہ + جہ) معلوم ہو گیا۔

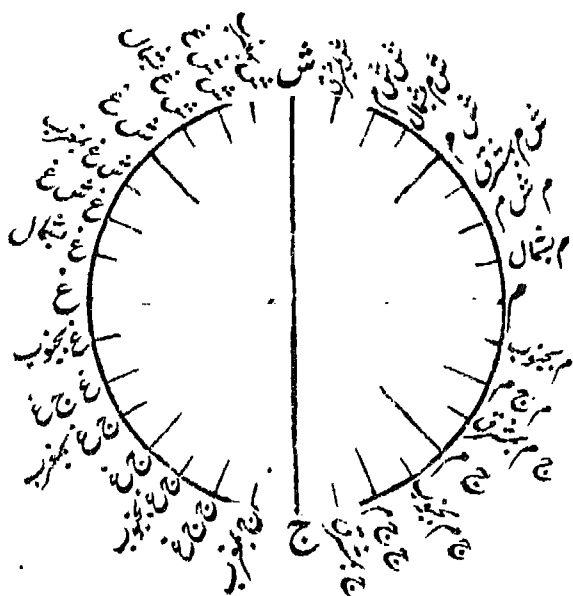
اس لئے ہم ضلع ق ن کو ترکیب دفعہ ۱۸۷ سے

معلوم کر سکتے ہیں۔

اگر چاروں مقامات د، ب، ق، ف ایک ہی سطح میں نہ ہوں تو ہمیں زاویہ ف د ا ق بھی ناپ لینا چاہیے کیونکہ اس صورت میں ف ا ق زاویہ عہ۔ بہ کے برابر نہیں ہے، باقی سب طرح سے حل مندرجہ بالا اعل کے مطابق ہوگا۔

۲۰۱۔ بحری قطب نما کے نقاط و جہات

اگر نقطہ معینہ و پر کھڑے ہو کر ایک اور نقطہ معلومہ ب کی طرف دیکھیں تو جس سمت میں نقطہ ب نقطہ و سے نظر آئے اس کو بلحاظ نقطہ و کے نقطہ ب کی جہت کہتے ہیں مثلاً اگر و ب سمت شمال اور



مشرق کے درمیانی زاویہ کی تصنیف کرے تو
ب کی جہت یا سمت کو ہم ”شمال-مشرق“ کہیں گے۔
اگر یہ کہا جائے کہ ایک خط کی جہت یا سمت شمال سے
۶۰° مغرب کو ہے تو اس کا یہ مطلب ہو گا کہ یہ سمت
شمال سے زاویہ ۶۰° بناتی ہے اور یہ زاویہ شمال کی
جانب سے مغرب کی طرف کو ناپا گیا ہے۔

اس غرض سے کہ ایک نقطہ کی جہت یا سمت قائم
ہو سکے یا بیان ہو سکے بحری قطب نما کے کارڈ کو
۳۲ مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں ملاحظہ ہو شکل بالا۔
ان حصوں میں مختلف نشان لگے ہوئے ہیں۔ فرض کرو
کہ فی الحال زیر بحث صرف وہی رجب ہے جو شمال اور
مشرق کے درمیان واقع ہے۔ ش اور م کی درمیانی
قوس کے نقطہ وسط پر نشان ش م یعنی ”شمال-مشرق“
بنا ہوا ہے۔

نیز ش م اور ش اور م کے درمیان جو قوسیں ہیں
ان کے منصفوں پر بالترتیب ”شمال-شمال-مشرق“ اور
”مشرق-شمال-مشرق“ (یعنی ش ش م اور م ش م)
لکھا ہوا ہے۔

اگر شمال کی طرف سے شمار کیا جائے تو باقی چھوٹے
چار حصوں کو شمال بمشرق، ش م شمال، ش م بمشرق
اور مشرق شمال کہتے ہیں اسی طرح سے قطب نما

باقی تین حصے بھی منقسم ہو سکتے ہیں۔
 ظاہر ہے کہ کارڈ کے دو چھوڑجوں کی درمیانی قوس کے مجازی
 مرکز و پر زاویہ ۳۶۰° یعنی $\frac{1}{2}$ بنتا ہے۔

امثلہ نمبری ۳۳

۱۔ ایک برج کے وسط میں ایک علم قائم ہے ، ایک
 شخص کو جو برج کے ایک رخ کے وسط کے مقابل زمین پر چلتا ہے
 علم کی چوٹی عین سوفٹ کے فاصلے سے دکھائی دینی شروع
 ہوتی ہے ، ۱۰۰ فٹ پیچھے ہٹنے پر وہ برج کی چوٹی اور علم کی چوٹی کے
 ارتفاعی زاویوں کو مشاہدہ کرتا ہے ، ان زاویوں کے حاس
 بالترتیب $\frac{1}{4}$ اور $\frac{5}{8}$ ہیں ، برج کی بلندی اور عرض نیز علم کی
 بلندی دریافت کرو ، زمین ستوازی الافق ہے۔

۲۔ سطح ہموار پر ایک شخص ایک برج کی سیدھ میں
 جاتا ہے اور ایک خاص مقام پر برج کا زاویہ ارتفاع ۱۰°
 مشاہدہ کرتا ہے ، برج کی سمت میں ۵۰ گز جانے کے بعد
 وہی زاویہ ارتفاع ۱۵° دکھائی دیتا ہے ، اگر معلوم ہو

$$ل جب ۱۵ = ۹۶۶۲.۴۱۲۲ ، ل جم ۵ = ۲۲۲۴.۸۳۹۹$$

لوک $۲۵۶۷۸۳ = ۱۱۳۳۳۳۳۱$ اور لوک $۲۵۶۷۸۳ = ۱۱۳۳۵۰۳۱$
 تو برج کی بلندی گزوں میں ۴ مرتبہ کے اعشاریہ تک
 دریافت کرو۔

۳۔ ایک برج دے سطح افقی پر کھڑا ہے اور اسی

سطح میں ایک خط (ب ج د واقع ہے ، بیج کی بلندی کے محاذی (۱) پر زاویہ طہ ، ب پر زاویہ ۲ طہ اور ج پر زاویہ ۳ طہ بنتا ہے اگر (ب اور ب ج بالترتیب ۵۰ اور ۲۰ فٹ ہوں تو بیج کی بلندی اور فاصلہ ج د معلوم کرو۔

۴۔ ایک ۵۰ فٹ اونچا بیج ایک ٹیلے کی چوٹی پر واقع ہے ، سطح زمین پر کے کسی نقطہ سے بیج کے پائین اور اس کے ارتفاعی زاوے بالترتیب ۴۵° اور ۵۴° ناپے گئے ہیں ، ٹیلے کی بلندی دریافت کرو۔

۵۔ ایک عمودی لاٹھ ۱۰۰ فٹ سے زیادہ اونچی ہے اور اس کے دو حصے ہیں ، نچلا حصہ کل طول کا $\frac{1}{3}$ ہے ، لاٹھ کی جڑ میں سے جو سطح افقی گذرتی ہے اس پر ایک نقطہ لاٹھ سے ۴۰ فٹ کے فاصلے پر لیا گیا ہے اور اوپر کے حصے کے محاذی اس نقطہ پر جو زاویہ بنتا ہے اسکا محاس $\frac{1}{2}$ ہے ، لاٹھ کی بلندی دریافت کرو۔

۶۔ ایک بیج کے محاذی ایک نقطہ پر جو پائین بیج میں سے گذر نیوالی سطح افقی پر واقع ہے زاویہ ۷۵° بنتا ہے اور ایک دوسرے نقطہ پر جو پہلے نقطہ سے ح فٹ اونچا ہے پائین بیج کا زاویہ انخفاض یہ مشاہدہ کیا گیا ہے ، بیج کی بلندی دریافت کرو۔

۷۔ سطح سمندر کے کنارے ہموار زمین کے کسی مقام سے ایک شخص غبارہ کے ذریعہ سمت راس میں اوپر چڑھا اور

اس نے سمندر میں ایک ساکن جہاز کا زاویہ نشیب ۳۰° مشاہدہ کیا، پھر ۶۰۰ فٹ عمودی سمت میں نیچے اترنے کے بعد اُس نے دیکھا کہ زاویہ نشیب ۱۵° ہے، نقطہ صعود سے جہاز کا افقی فاصلہ دریافت کرو۔

۸۔ سطح ہموار پر ایک برج فاق کا پائیں قی ہے، اُسی سطح افقی میں دو اور نقاط اور ب ایسے ہیں کہ $\angle ق = ۹۰^\circ$ اور $\angle ب = ۴۰^\circ$ نیز یہ معلوم ہے کہ $\angle م = ۱۲۰^\circ$ اور $\angle ق = ۱۲۰^\circ$ برج کی بلندی دریافت کرو۔

۹۔ ایک مینار کسی شخص کے م ج م کی طرف واقع ہے، اور دو پہر کے وقت اس کے سایہ کا سرا ایک شخص کے شمال-مشرق کی طرف ہوتا ہے، اگر سایہ ۸۰ فٹ لمبا ہو اور نقطہ نظرت مینار کا ارتفاع ۴۵° ہو تو مینار کی بلندی دریافت کرو۔

۱۰۔ دو مقامات اور ب سے ایک برج کا مشاہدہ کرنے پر معلوم ہوا کہ یہ ا کے شمال کی طرف اور ب کے شمال-مغرب کی طرف واقع ہے، ب مقام ا سے ۱۰۰ فٹ کے فاصلے پر مشرق کی طرف کو ہے، اگر مقام ا سے برج کا زاویہ ارتفاع دیکھا جائے تو یہ زاویہ اُس زاویہ ارتفاع کے جہتم کے برابر ہوتا ہے جو مقام ب سے مشاہدہ کیا گیا ہو، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک مینار کا ارتفاع ایک ایسے مقام سے جو اس کے جنوب کی طرف واقع ہے ۴۵' ہے اور ایک دوسرے مقام سے جو مقام اول الذکر کے مغرب کی طرف واقع ہے ۱۵' ہے اگر ان دو مقامات کے درمیان فاصلہ ۱ ہو تو ثابت کرو کہ

بلندی (۳۶-۱) ۱ ہے۔
۳۶۲

۱۲۔ ایک گرجے کے برج کا قاعدہ شکل میں مریج ہے، ایک شخص اس کے قطر محدودہ پر ۱۲ فٹ کے فاصلے پر کھڑا ہو کر برج کی چوٹی کے دو بیرونی کونوں میں سے ہر ایک کے زاویہ ارتفاع کو ۳۰' مشاہدہ کرتا ہے، نیز سب سے نزدیک کونے کا ارتفاع ۴۵' ہے، ثابت کرو کہ برج کا عرض ۱ (۲۶-۲۶) فٹ ہے۔

۱۳۔ ایک برج سطح افقی پر قائم ہے اور ایک شخص اس کے جنوب کی طرف مقام ۱ پر کھڑا ہو کر اس کا زاویہ ارتفاع ۴۰' مشاہدہ کرتا ہے، پھر وہ ۱ کے مغرب کی طرف مقام ب پر جاتا ہے اور اس جگہ زاویہ ارتفاع ۴۵' پاتا ہے، اس کے بعد وہ ب محدودہ میں ایک مقام ج پر زاویہ ارتفاع ۳۰' ہوتا ہے، ثابت کرو کہ مقام ب مقامات ۱ اور ج کے عین وسط میں واقع ہے۔

۱۴۔ ایک افقی قاعدہ کا طول ۱۲ ہے اور اس کے دو کناروں سے ایک چوٹی کا زاویہ ارتفاع ط مشاہدہ کیا گیا ہے

اور اس کے وسط سے یہی زاویہ فہ دکھائی دیتا ہے ثابت
 کرو کہ چوٹی کی بلندی $\frac{1}{2}$ جب طہ جب فہ ہے
 $\frac{1}{2}$ جب (فہ + طہ) جب (فہ - طہ)

۱۵۔ دو مقامات $\frac{1}{2}$ اور ب کے درمیان فاصلہ ... افٹ ہے
 اسی سطح افقی میں جس میں $\frac{1}{2}$ ب واقع ہے ف اور ق
 خط $\frac{1}{2}$ ب کی ایک ہی جانب میں واقع ہیں، زاوے
 ف $\frac{1}{2}$ ب، ف $\frac{1}{2}$ ب، ق $\frac{1}{2}$ ب، ق $\frac{1}{2}$ ب بالترتیب
 ۵۰، ۳۰، ۵۴ اور ۹۰ ہیں، معلوم کرو کہ ف مقام ق
 سے کتنی دور ہے اور انہیں سے ہر ایک $\frac{1}{2}$ اور ب سے
 کتنی دور ہے۔

مثلاً ذیل کے حل کرنے میں نوکارتھی جداول کی ضرورت ہوگی
 ۱۶۔ سطح افقی کے ایک نقطہ پر کسی پہاڑ کی چوٹی کا
 ارتفاع ۲۲' ۵۱ ہے اور سطح کے ایک اور نقطہ پر جو کہ
 پہاڑ اور نقطہ اول کو ملانے والے خط راست میں نقطہ
 اول سے ایک میل کے فاصلے پر واقع ہے چوٹی کا
 ارتفاع ۱۰' ۱۲ ہے، پہاڑ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۷۔ ایک پہاڑ کی چوٹی سے دو مسلسل میل کے پتھروں
 کے انخفاضی زاوے ۵' اور ۱۰' مشاہدہ کئے گئے ہیں،
 پتھر ہموار زمین پر ایک ایسی سطح عمودی میں واقع ہیں
 جو نقطہ نظر میں سے گذرتی ہے، پہاڑ کی بلندی اور نزدیک
 کے پتھر کا افقی فاصلہ دریافت کرو۔

۱۸ — سطح افقی پر ایک قلعہ اور مقبرہ ہے، قلعہ کی بلندی ۴۴ فٹ ہے اور اسکی چوٹی سے مقبرہ کی چوٹی اور پائین کے انخفاضی زاوے ۴۰° اور ۸۰° مشاہدہ کئے گئے ہیں، مقبرہ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۹ — ایک علم ع ن ہموار زمین پر قائم ہے، ایک قاعدہ اب خط ان کی عمودی سمت میں ناپا گیا ہے، نقاط ا، ب، ن ایک ہی سطح افقی میں واقع ہیں اور زاوے ع ان اور ع ب ن بالترتیب عہ اور بہ ہیں، ثابت کرو کہ علم کی بلندی اب جب عہ جب بہ ہے

[جب (عہ - بہ) جب (عہ - بہ)]

اگر اب = ۱۰۰ فٹ، عہ = ۶۰° اور بہ = ۵۰° تو بلندی دریافت کرو۔

۲۰ — ایک شخص نے ایک برج کے ٹھیک جنوب میں اس سطح افقی پر کھڑے ہو کر جو پائین برج میں سے گذرتی ہے برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع ۴۵° ۱۶' دیکھا، اگر مشرق کی طرف جانے پر اس نے ارتفاع ۵۰° ۸' پایا، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۲۱ — ایک شخص نے غبارہ میں بیٹھ کر زمین پر ایک چیز کا زاویہ انخفاض ۳۳° دیکھا، وہ چیز اس وقت اس کے ٹھیک جانب شمال میں تھی، اس کے بعد ہوا غبارہ کو ۳ میل مغرب کی طرف لی گئی اب زاویہ انخفاض ۲۱° تھا، غبارہ کی بلندی دریافت کرو۔

۲۲ — ایک بنیادی خط اب (= ۱۰۰۰ فٹ) کے دونوں

سروں سے پائیں برج ج کی جہات مشاہدہ کی گئیں اور معلوم ہوا کہ $\angle$ ج ا ب = $54^{\circ} 23'$ اور $\angle$ ج ب ا = $45^{\circ} 45'$ اور مقام ا سے برج کا ارتفاع $9^{\circ} 25'$ دیکھا گیا، برج کی بلندی دریافت کرو۔

۲۰۲۔ مثال ۱۔ سطح افقی پر ایک برج ہے اور برج کی چوٹی پر ایک جھنڈا ہے۔ جھنڈے اور برج کے محاذی سطح افقی کے ایک مقام پر زاوے α اور β بنتے ہیں، ایک شخص ان کو ناپتا ہے اس کے بعد وہ برج کے پائیں کی طرف ایک معلوم فاصلہ a چل کر دیکھتا ہے کہ جھنڈے کے محاذی نئے مقام پر وہی زاویہ بنتا ہے جو پہلے تھا، ثابت کرو کہ برج کی بلندی اور جھنڈے کا طول بالترتیب

$\frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ اور $\frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ ہیں

فرض کرو کہ ف چوٹی اور ق پائیں برج ہے۔ نیز ف ر جھنڈا ہے۔ فرض کرو کہ نقاط ا اور ب پر زاوے α ناپے گئے ہیں یعنی $\angle$ ف ا ق = α اور $\angle$ ف ب ر = β چونکہ یہ دو آخری زاوے برابر ہیں اس لئے ان چار نقاط ا، ب، ق، ر میں سے ایک دائرہ گزریگا۔

جھنڈے کی بلندی دریافت کرنے کے لئے ہمیں نامعلوم

محاذی برابر زاوئے بتتے ہیں ، جھنڈے کی بلندی دریافت کرو۔
فرض کرو کہ ن نقطہ نگاہ ہے اور زاویوں ق ن ق اور ق ن
میں سے ہر ایک طہ کے برابر ہے ۔ نیز فرض کرو کہ بلندی ق = م
تب مس طہ = $\frac{ب}{۱}$ اور مس ۲ طہ = $ب + م$

$$\begin{aligned} \text{اس لئے } \frac{ب}{۱} + م &= \text{مس ۲ طہ} = \text{ایس ۲ طہ} = \frac{ب}{۱} \\ \text{یعنی } \frac{ب}{۱} + م &= \frac{۲ ب}{۱} \end{aligned}$$

$$\text{تب م} = \frac{۲ ب}{۱} - \frac{ب}{۱} = \frac{ب}{۱}$$

اگر ۱ اور ب کی عددی قیمتیں دی ہوئی ہوں تو م آسانی حاصل ہو سکتا ہے ۔

۲۰۴۔ ایک شخص سیدھی سڑک پر جاتا تھا اس نے
سڑک کے ایک مقام پر دیکھا کہ دو اشیاء کے محاذی
بڑے سے بڑا زاویہ عہ بنتا ہے اور اس مقام سے سڑک
فاصلہ ص آگے چلکر اس نے دیکھا کہ دونوں اشیاء ایک
ایسے خط مستقیم میں واقع ہیں جو سڑک سے زاویہ بہ بنتا ہے
ثابت کرو کہ اشیاء کے درمیان فاصلہ

ص جب عہ جب بہ ق طہ عہ + بہ ق طہ عہ بہ ہے
فرض کرو کہ ق اور ق دو نقطے ہیں اور خط ق ق سڑک
کو نقطہ ب پر ملتا ہے اگر نقطہ ۱ پر بڑے سے بڑا زاویہ
بے تو لازماً نقاط ق اور ق میں سے گزرنیوالا دائرہ

$$\text{نق} = \text{جب عہ جب بہ} \\ \text{ص} = \text{جب طہ جب (طہ + عہ)}$$

$$= \text{جب عہ جب بہ} \\ \text{جم عہ + بہ جم عہ - بہ}$$

$$\text{نق} = \text{ص جب عہ جب بہ قط عہ + بہ قط عہ - بہ}$$

امثلہ نمبری ۳۴

۱۔ ایک پل ۶ ستونوں پر قائم ہے جو ایک دوسرے سے برابر برابر فاصلوں پر ہیں اور دو مسلسل ستونوں کے مرکزوں کے درمیان فاصلہ ۱۰۰ فٹ ہے، ایک کشتی ایک درمیانی ستون کی سیدھ میں لنگر ڈالے کھڑی ہے اور پل کی تمام لمبائی کے محاذی کشتی پر زاویہ قائمہ بنتا ہے ثابت کرو کہ کشتی کا فاصلہ پل سے ۱۰۰ فٹ ہے۔

۲۔ ایک سیڑھی بازار کے ایک طرف ۲۴ فٹ اونچی کھڑکی کے نیچے پتھر تک پہنچتی ہے اور زمین سے زاویہ ۴۵° کا بناتی ہے، سیڑھی کے نیچے سرے کو قائم رکھکر اس کو اسطرح پھرایا گیا ہے کہ وہ بازار کی دوسری طرف دیوار کے ساتھ جا لگتی ہے اس حالت میں سیڑھی کا زاویہ زمین کے ساتھ ۱۵° ہوتا ہے، ثابت کرو کہ بازار کی چوڑائی اور سیڑھی کی لمبائی بالترتیب ۲۴ (۳۱-۳۲) اور ۲۴ (۳۱-۳۲) فٹ ہے۔

۳۔ بازار کی ایک طرف ایک گھر سے مقابل کے گھر کی

اونچائی کے محاذی جو زاوے بنتے ہیں انکا مشاہدہ کیا گیا ہے۔ سطح زمین پر اونچائی کے محاذی جو زاویہ بنتا ہے اُس کا محاس ۳ ہے اور دو کھڑکیوں پر جو ایک دوسرے کے اوپر واقع ہیں اونچائی کے محاذی جو زاوے بنتے ہیں ان میں سے ہر ایک کا محاس ۳ ہے، اگر مقابل کے گھر کی بلندی ۶۰ فٹ ہو تو سطح زمین سے دونوں کھڑکیوں کی بلندیاں دریافت کرو۔

۴۔ ایک سلخ کا طول معلوم ہے اور اُس کا ایک سر زمین پر ثابت کر دیا گیا ہے، اگر وہ سوچ میں سے گذر نیوالی سطح عمودی میں بلا تکلف حرکت کر سکے تو بڑے سے بڑے سایہ کا طول جو سلخ زمین پر ڈال سکتی ہے دریافت کرو۔ اگر بڑے سے بڑا سایہ سلخ کے طول کا $\frac{3}{4}$ گنا ہو تو سوچ کا ارتفاع دریافت کرو۔

۵۔ جہاز و پر ایک شخص ایک اور جہاز ب کو بندرگاہ سے باہر آتا ہو دیکھتا ہے اس وقت بندرگاہ کی جہت شمال مغرب ہے۔ دس منٹ تک و ایک میل شمال مشرق کی طرف جاتا ہے اور اُس وقت اس کے مقام سے جہاز ب ٹھیک مغرب کی طرف دکھائی دیتا ہے اور بندرگاہ کی سمت اُس وقت شمال سے ۶۰ کا زاویہ مغرب کی طرف کو بناتی ہے اور دس منٹ کے بعد ب کی سمت جنوب مغرب ہوتی ہے و اور ب کا درمیانی فاصلہ اول مشاہدہ کی وقت دریافت کرو و نیز ب کی سمت اور رفتار معلوم کرو۔

۶۔ ایک جہاز شمال کی طرف جا رہا تھا اُس پر ایک شخص نے ٹھیک اپنے مغرب کی طرف ایک سیدھ میں دو روشنی گھر دیکھے جن کا درمیانی فاصلہ ۶ میل تھا۔ ایک گھنٹہ کے بعد ایک روشنی گھر کی سمت جنوب۔ مغرب تھی اور دوسرے کی جنوب۔ جنوب مغرب جہاز کی رفتار دریافت کرو۔

۷۔ تختہ جہاز پر ایک شخص نے ایک روشنی گھر کو اپنے ٹھیک شمال مغرب کی طرف دیکھا، اس کے بعد جہاز ۱۲ میل ایسی سمت میں چلا جو سمت مغرب سے جنوب کی طرف کو ۹۵ کا زاویہ بناتی تھی۔ اُس وقت روشنی گھر کی سمت شمال تھی، ہر ایک مقام پر جہاز کا فاصلہ روشنی گھر سے دریافت کرو۔

۸۔ ایک شخص سیدھی سڑک پر مغرب کی طرف جا رہا تھا اُس نے دیکھا کہ جب وہ ایک پون چکی کے ٹھیک جنوب میں ہو تو جو خط مستقیم اس کے مقام کو ایک دور کے برج کے ساتھ وصل کرتا ہے وہ سڑک سے زاویہ ۳۰° بناتا ہے، ایک میل آگے چل کر پون چکی اور برج کی اسات اس نے بالترتیب شمال مشرق اور شمال مغرب دیکھیں، برج کے فاصلے پون چکی سے اور سڑک کے قریب ترین نقطہ سے دریافت کرو۔

۹۔ اونچی زمین پر کھڑے ہو کر ایک شخص نے ایک جہاز کو ٹھیک اپنے شمال کی طرف دیکھا۔ ایک چوتھائی گھنٹہ کے بعد جہاز کی سمت ٹھیک مشرق تھی، اور آدھ گھنٹہ گزرنے کے بعد جہاز کی سمت جنوب مشرق ہو گئی۔ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ

جہاز یکسان رفتار سے ایک خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے تو جہاز کی سمت طریق اور نصف النہار کے درمیان جو زاویہ بنے اس کو دریافت کرو۔ نیز وہ وقت معلوم کرو جو جہاز کو اول مشاہدہ کے مقام سے اس مقام تک طے کرنے میں صرف ہوا جب وہ مشاہدہ کرنے والے کے نہایت ہی قریب تھا۔

۱۰۔ ایک شخص سیدھی سڑک پر جا رہا تھا جو سمت شمال سے مشرق کی طرف کو 30° کا زاویہ بناتی تھی، اس نے ایک مقام پر دیکھا کہ وہ ایک گھر کے ٹھیک جنوب کی طرف ہے ایک میل آگے جانے پر اس نے مشاہدہ کیا کہ گھر اس کے ٹھیک مغرب کی طرف ہے اور سڑک کے مقابل کی جانب میں اس وقت ایک پونچلی اس کو ٹھیک اپنے شمال مشرق کی طرف دکھائی دی۔ تین میل آگے چلکر اس نے دیکھا کہ وہ چکی کے ٹھیک شمال کی طرف ہے ثابت کرو کہ چکی اور گھر کا خط وصل سڑک کے ساتھ ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا محاس $25^\circ - 31^\circ$ ہے۔

۱۱۔ ایک سیدھی سڑک پر تین متلسل پتھروں (A, B, C) سے ایک دور کا مینارہ دکھائی دیتا ہے، مینارہ کی سمت A پر شمال مشرق اور B پر ٹھیک مشرق ہے اور ج پر سمت جنوب سے مشرق کی طرف کو 40° کا زاویہ بناتی ہے، ثابت کرو کہ سڑک سے مینارہ کا کم سے کم فاصلہ $31.5 + 4$ میل ہے۔

۱۲۔ ایک برج شمال کی طرف جھکا ہوا ہے اور پائیس برج سے A اور B فٹ کے فاصلوں پر دو مقامات برج کے عین جنوب میں

واقع ہیں اگر ان مقامات سے برج کی چوٹی کے ارتفاعی زاوے α اور β ہوں تو ثابت کرو کہ برج کا میلان افق سے $\frac{\alpha + \beta}{2}$ ہے۔
۱۳۔ سطح ہموار کے ایک نقطہ A پر ایک غبارہ کا زاویہ ارتفاع α دکھائی دیا، غبارہ اس وقت A کے ٹھیک جنوب کی طرف تھا۔ نقطہ B سے جو A کے جنوب میں فاصلہ AC پر واقع ہے غبارہ کا زاویہ ارتفاع شمال کی طرف β مشاہدہ ہوا، نقطہ A سے غبارہ کا فاصلہ، نیز غبارہ کی بلندی زمین سے دریافت کرو۔

۱۴۔ ایک ستون کی چوٹی پر ایک بت ہے اور اس کے محاذی ستون سے 9 اور 11 گز کے فاصلوں پر ایک ہی زاویہ α بنتا ہے، اگر $MS = \frac{1}{2}$ تو ستون اور بت کی بلندیاں دریافت کرو۔

۱۵۔ ایک برج کی چوٹی پر ایک علم قائم ہے، سطح مستوی پر قاعدہ برج کے مرکز میں سے ایک خط گذرتا ہے اس پر دو ایسے نقاط ہیں جنکا باہمی فاصلہ 12 ہے اور جن میں سے ہر ایک پر علم کے محاذی زاویہ α بنتا ہے، اگر ان نقطوں کو ملائیو گئے خط کے نقطہ تنصیف پر علم کے محاذی زاویہ β بنے تو ثابت کرو کہ علم کی بلندی

$$\frac{1}{2} \text{ جب } \alpha = \beta \text{ ہے}$$

۱۶۔ کسی ٹیلے پر ایک ستون ہے، ستون سے 1 فٹ کے فاصلے پر کھڑے ہو کر ایک شخص نے دیکھا کہ اس کی آنکھ پر

جو زاویہ ستون کے محاذی بتا ہے اس کا ماس $\frac{1}{2}$ ہے، ستون کی سیدھ میں فاصلہ $\frac{1}{2}$ فٹ جانے پر اس نے دیکھا کہ ستون کے محاذی اس کی آنکھ پر وہی زاویہ بتاتا ہے جو پہلے تھا۔ ٹیلے اور ستون کی بلندیاں دریافت کرو۔ اس مثال میں ہم مشاہدہ کریں گے کی آنکھ کو ٹیلے کے قاعدہ میں سے گذر نیوالی سطح مستوی پر منطبق خیال کرتے ہیں۔

۱۷۔ ایک دریا کا عرض ۱۵۰ فٹ ہے، اس کے کنارہ پر ایک گرجے کا برج ہے اور برج کی چوٹی پر ایک مینارہ ہے جسکی بلندی ۳۰ فٹ ہے، دریا کے دوسرے کنارہ پر ایک شخص نے دیکھا کہ اگر ایک ۶ فٹ اونچی لکڑی پائیں برج میں سے گذر نیوالی سطح مستوی پر برج کے قریب سیدھی کھڑی کی جائے تو اس لکڑی اور مینارہ دونوں کے محاذی اس کی آنکھ پر ایک ہی زاویہ بتاتا ہے، ثابت کرو کہ برج کی بلندی تقریباً ۲۸۵ فٹ ہے۔

۱۸۔ ایک شخص ایک برج کی بلندی دریافت کرنا چاہتا ہے، اس نے پائیں برج میں سے گذر نیوالی سطح مستوی کے ایک مقام پر کھڑے ہو کر چوٹی کا ارتقاع ۳۰° دیکھا۔ کسی خاص سمت میں ایک فاصلہ ۱ جانے پر اس نے دیکھا کہ چوٹی کا ارتقاع وہی ہے جو پہلے تھا اور سمت مذکورہ کی عمودی سمت میں فاصلہ $\frac{1}{2}$ جانے پر اس نے چوٹی کا ارتقاع ۶۰° دیکھا، ثابت کرو کہ برج کی بلندی

$$\frac{1}{2} \text{ یا } \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

۱۹۔ سطح افقی پر ایک برج ہے، برج کے قاعدہ سے

۱ اور ب فٹ کے فاصلہ پر برج کی سیدھ میں دو نقاط ہیں اور ان پر جو ارتفاعی زاوے برج کی چوٹی کے محاذی جتنے ہیں وہ ایک دوسرے کے متعم ہیں، ثنابت کرو کہ برج کا ارتفاع $\frac{1}{2}$ ب فٹ ہے۔
اگر دو نقاط کے خط وصل کے محاذی برج کی چوٹی پر زاویہ طہ بنے تو ثنابت کرو کہ

جب طہ = $\frac{1}{2}$ ب

۲۰ — ایک ۸۰ فٹ اونچے ٹیلے کی چوٹی پر ایک ۱۵۰ فٹ بلند برج ہے، معلوم کرو کہ ٹیلے کے پائش سے جو سطح گزرتی ہے اس کے کس مقام پر ایک شخص کھڑا ہو کہ برج اور ٹیلے کے محاذی اس کی آنکھ پر برابر زاوے بنیں، آنکھ کی اونچائی ۵ فٹ ہے

۲۱ — سطح ہموار پر ایک ستون ہے اور ستون کی چوٹی پر ایک بت ہے، اگر ایک شخص کی آنکھ پر بت کے محاذی بڑے سے بڑا زاویہ عم بنے جبکہ وہ ستون سے ج فٹ کے فاصلہ پر ہو تو ثنابت کرو کہ بت کی بلندی ۲ ج مس عم فٹ ہے، ستون کی بلندی بھی دریافت کرو۔

۲۲ — ایک سطح مائل اور سطح ہموار کے خط فصل پر ایک برج ہے اور سطح مائل افق سے زاویہ ۹° بناتی ہے، اگر پائش برج سے سطح مائل کے اوپر کی طرف ۱۰۰ فٹ لمبا مستقیم خط ناپا جائے اور اس خط کے سرے پر برج کے محاذی زاویہ عم ۵° بنے تو برج کی بلندی دریافت کرو۔ معلوم ہے لوک ۲ = ۱۰۳-۱۰۳

لوک ۲۳ ۱۱۴۵۴۲۶ ≈ ۲۶۰۵۸

اور ل جب $54 = 95.4906$

۲۳ — ایک ڈھلان اُفق سے 15° کا زاویہ بناتی ہے، اُس پر ایک عمودی برج قائم ہے، ایک شخص پائیں برج سے ڈھلان کے اوپر کی طرف ۸۰ فٹ چڑھ کر دیکھتا ہے کہ اس کی آنکھ پر برج کے محاذی زاویہ 30° بنتا ہے، ثابت کرو کہ برج کی بلندی

۴۰ (۶۱ - ۲۱) فٹ ہے

۲۴ — ایک چٹان کا ارتفاع 44 مہ ہے، ایک شخص ایک سطح مائل پر جو اُفق سے 30° کا زاویہ بناتی ہے ۱۰۰۰ فٹ چٹان کی طرف چڑھ کر دیکھتا ہے کہ اس کا ارتفاع 44 مہ ہے اگر جب $44 = 31.35$ مہ تو اُس مقام سے چٹان کی عمودی بلندی دریافت کرو جہاں سب سے پہلے زاویہ ارتفاع مشاہدہ کیا گیا۔

۲۵ — ایک شخص نے ایک سطح مائل پر ج فٹ اوپر جا کر دیکھا کہ اس کے پائین سے جو سطح مستوی گزرتی ہے اُس پر ایک چیز کا زاویہ انخفاض 44 مہ ہے، ج فٹ اور اوپر جا کر اُس نے دیکھا کہ اسی چیز کا زاویہ انخفاض 30 مہ ہے ثابت کرو کہ سطح مائل اُفق سے ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا محاسن تمام (۲ مہ بہ — مہ عمہ) ہے۔

۲۶ — ایک منتظم مینار مربع قاعدہ پر قائم ہے، اس کا ایک کنارہ ۱۵۰ فٹ اور اس کے قاعدہ کا ایک ضلع ۲۰۰ فٹ ہے اُس کے ایک رخ کا میلان قاعدہ سے دریافت کرو۔

۲۷ — ایک مینار کے مربع قاعدے کا ضلع ۱ ہے اور اس کا

راس ایک ایسے خط مستقیم پر واقع ہے جو قاعدے کے نقطہ وسط میں سے گذرتا ہے اور اس پر عمود ہے، مینار کی بلندی ح فٹ ہے، ثابت کرو کہ مینار کے متصل رخنوں کا درمیانی زاویہ مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \frac{2}{\text{ح}} = \frac{2}{\text{ح}} + \frac{2}{\text{ح}} \quad \frac{2}{\text{ح}} + \frac{2}{\text{ح}}$$

۲۸ — ایک متساوی الاضلاع مثلث کے مرکز پر ایک .. افٹ اونچا علم قائم ہے، مثلث متوازی الاق ہے، علم کی چوٹی پر ہر ایک ضلع کے محاذی زاویہ ۶۰° بنتا ہے، ثابت کرو کہ مثلث کے ضلع کا طول ۱۵۰ فٹ ہے۔

۲۹ — مربع قاعدہ پر ایک مینار ہے اور اس کی چوٹی پر ایک ۶ فٹ اونچا علم ہے، اگر علم کا سایہ عین قاعدہ کے ایک ضلع تک پہنچے اور اس ضلع کے سروں سے ۵۶ اور ۸ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو سورج کا زاویہ ارتفاع دریافت کرو، مینار کی بلندی ۳۴ فٹ ہے۔

۳۰ — مربع قاعدہ پر ایک مینار قائم ہے، اس کی چوٹی پر ایک ۶ فٹ اونچا علم ہے، علم کا سایہ عین قاعدہ کے ضلع تک پہنچتا ہے اور اس ضلع کے سروں سے ۱۰ اور ۸ فٹ کے فاصلہ پر ہے، ثابت کرو کہ مینار کی بلندی ۱۰ + ۸ = ۱۸ مس عہ ہے۔ جہاں عہ سورج کا زاویہ ارتفاع ہے۔

۳۱ — ایک نقطہ ایک جھیل کی سطح سے ح فٹ اونچا ہے اور اس

نقطہ سے ایک بادل کا زاویہ ارتفاع عہ مشاہدہ کیا گیا ہے اگر جھیل میں بادل کے عکس کا زاویہ انخفض دیکھا جائے تو وہ یہ ہوتا ہے ثابت کرو کہ بادل کی بلندی

ح جب (بہ + عہ) ہے

۳۲ — ایک برج کا سایہ کسی خاص وقت اس کی بلندی کا نصف تھا کچھ عرصہ بعد سایہ بلندی کے برابر تھا۔ معلوم کرو کہ اس عرصہ میں سورج کا زاویہ ارتفاع کتنا کم ہوا ہے، معلوم ہے

لوک ۲ = ۱۰۳ - ۵۳ ، ل مس ۶۳° ۲۶ = ۹۹۹۴ - ۵۳۰۰

اور فرق ۱ کیلئے = ۳۱۵۹

۳۳ — ایک تختی کی شکل مثلث متساوی الساقین ہے اور وہ سورج کے مقابل سطح عمودی میں رکھی گئی ہے، اگر تختی کا قاعدہ ۱۲ اونچائی ح اور سورج کا ارتفاع ۳۰° ہو تو ثابت کرو کہ تختی کے سایہ کے راس پر جو زاویہ بنتا ہے اس کا محاس

۱۲ ح ۳۱ ہے۔

۳ ح ۲۱

۳۴ — سطح افقی پر نشانہ لگانے کا چاند سیدھا کھڑا کیا گیا ہے، اگر اس کا رخ جنوب کی طرف ہو اور وہ شکل میں متعطل ہو تو جو اس کی سطح کا رقبہ ہے اس کا مقابلہ اس کے سایہ کے رقبہ سے اس وقت کرو جبکہ سورج کا ارتفاع عہ ہو اور سورج جنوب سے زاویہ بہ بنائے۔

۳۵ — ایک کرہ کا قطرق ہے اور جب اس کے مرکز کا ارتفاع بہ ہو تو اس کے محاذی ایک شخص کی آنکھ پر زاویہ عہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ کرہ کے مرکز کی بلندی

۱/۲ ق جب بہ ثم ہے

۳۶ — ایک شخص سطح افقی پر کھڑا ہو کر ایک مساوی اور مساوی الفصل ستونوں کی قطار کو دیکھ کر یہ نتیجہ نکالتا ہے کہ جو زاویے دسویں اور سترہویں ستون کے محاذی اُس کی آنکھ پر بنتے ہیں وہ اُس صورت میں بھی رہینگے اگر انکو پہلے ستون کی جگہ لاکر کھڑا کر دیا جائے اور انکی بلندیاں کو بالترتیب بقدر ۱/۲ اور ۲/۳ کے کم کر دیا جائے، اگر آنکھ کی بلندی کو نظر انداز کر سکیں تو ثابت کرو کہ ستونوں کی قطار اُس خط سے جو اسکی آنکھ کو پہلے ستون کے ساتھ ملانے سے پیدا ہو ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا قاطع ۲، ۶ ہے۔

امثلہ ذیل کے حل کرنے میں لوکارتمی جدولوں کی ضرورت ہوگی

۳۷ — ایک دریا کے مقابل کے کناروں پر دو نقاط ۱ اور ۲ ایک دوسرے کے سامنے واقع ہیں اور انکے درمیان ایک جہاز کا مشول م ن ہے، دریا کا عرض ۱۰۰۰ فٹ ہے اور نقطہ ۱ پر م کا زاویہ ارتفاع ۱۴° ۱۲ ہے اور نقطہ ۲ پر ارتفاع ۸° ۱۰ ہے، خط ۱ و ۲ پر م کی بلندی دریافت کرو۔

۳۸ — خط ۱ و ۲ کا طول ۱۰۰۰ گز ہے، ب نقطہ ۱ کے ٹھیک شمال کی طرف واقع ہے اور ب سے ایک دور کے نقطہ ط کی سمت، شمال سے مشرق کی جانب میں زاویہ ۵۰° کا بناتی ہے اور نقطہ ۱ پر یہ سمت شمال سے مشرق کی طرف کو زاویہ ۴۲° بناتی ہے، ۱ اور ط کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو۔

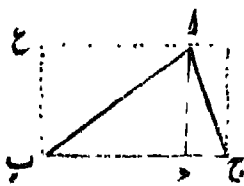
۳۹۔ ب کے ٹھیک مغرب کی طرف دس میل کے فاصلے پر ایک مقام ا ہے، نقطہ ا سے ایک چٹان کی سمت، شمال سے مشرق کی طرف کو زاویہ ۴۴° ۱۹ بناتی ہے اور نقطہ ب سے سمت، شمال سے مغرب کی جانب میں زاویہ ۲۶° ۵۱ بناتی ہے، خط اب سے چٹان کا فاصلہ شمال کی جانب میں دریافت کرو۔

۴۰۔ ایک آفتی مربع احاطہ کے ایک ضلع کا طول ا ہے اور عین اس کے نقطہ وسط کے اوپر سمت راس میں ایک مینار کی چوٹی ہے، مربع کی سطح سے چوٹی کی بلندی ب ہے اگر سوچ کا ارتفاع طہ ہو اور مینار کا سایہ مربع کے ٹھیک ایک کونے تک پہنچے تو ثابت کرو کہ ب $۲۱ = ا$ مس طہ اگر $۱ = ۱۰۰۰$ فٹ اور طہ ۲۵° ۱۵ تو ب کی قیمت دریافت کرو۔

باب پانزدہم

مثلث کے خواص

۲۰۴۔ مثلث کا رقبہ۔ فرض کرو کہ کوئی مثلث Δ ب ج ہے اور زاویہ Δ سے مقابل کے ضلع ب ج پر عمود Δ نکالا گیا ہے۔



نقطہ Δ میں سے ب ج کے متوازی خط Δ ف کھینچو اور اس پر عمود ب ج اور ج ف نکالو۔

بحسب اقلیدس م ا ش ۴۱، مثلث Δ ب ج کا رقبہ

$$= \frac{1}{2} \text{ مستطیل ب ا ف } = \frac{1}{2} \text{ ب ج } \times \text{ ج ف}$$

$$= \frac{1}{2} \Delta \times \Delta$$

لیکن $\Delta = \Delta$ ب ج ب = ج ج ب ب
اسلئے مثلث Δ ب ج کا رقبہ = $\frac{1}{2} \Delta \times \Delta$ ج ب ب

اس رقبہ کو بالعموم Δ سے تعبیر کرتے ہیں

اس لئے $\Delta = \frac{1}{p} \text{ ج } \Delta \text{ جب } \text{ب} = \frac{1}{p} \text{ و } \text{ب جب ج}$

$$\frac{1}{p} \text{ ب } \text{ج جب } \Delta \dots\dots\dots (۱)$$

بموجب دفعہ ۱۷۵، جب $\Delta = \frac{2}{p} \text{ ج } \Delta$ (ن-و) (ن-ب) (ج-ن) (ج-و)

یعنی $\Delta = \frac{1}{p} \text{ ب } \text{ج جب } \Delta$

$$\Delta = \text{ (ن-و) (ن-ب) (ج-ن) (ج-و) } \dots\dots\dots (۲)$$

اس مقدار کو اکثر Δ سے تعبیر کرتے ہیں۔

امثلہ نمبری ۳۵

ثلاث ا ب ج کا رقبہ دریافت کرو جبکہ

$$۱ - \Delta = ۱۳ = \text{ب} \quad ۱۳ = \text{ج} \quad ۱۵ = \text{ج}$$

$$۲ - \Delta = ۱۸ = \text{ب} \quad ۲۳ = \text{ج} \quad ۳۰ = \text{ج}$$

$$۳ - \Delta = ۲۵ = \text{ب} \quad ۵۲ = \text{ج} \quad ۶۳ = \text{ج}$$

$$۴ - \Delta = ۱۲۵ = \text{ب} \quad ۱۲۳ = \text{ج} \quad ۱۶۲ = \text{ج}$$

$$۵ - \Delta = ۱۵ = \text{ب} \quad ۳۶ = \text{ج} \quad ۳۹ = \text{ج}$$

$$۶ - \Delta = ۲۸۴ = \text{ب} \quad ۸۱۶ = \text{ج} \quad ۸۶۵ = \text{ج}$$

$$۷ - \Delta = ۳۵ = \text{ب} \quad ۸۳ = \text{ج} \quad ۹۱ = \text{ج}$$

$$۸ - \Delta = ۳۱۸ = \text{ب} \quad ۲۱۸ = \text{ج} \quad \frac{۲۱۸ + ۹۱}{۲} = \text{ج}$$

$$۹ - \Delta = ۴۵ = \text{ب} \quad ۹۰ = \text{ج} \quad ۹۰ = \text{ج} \quad ۲(۱ + ۳۱۸) = \text{ج} \quad \text{انچ تو ثابت کرو}$$

- کہ مثلث کا رقبہ $(۶ + ۲۸)$ مربع انچ ہے
- ۱۰۔ ایک مثلث کے اضلاع ۱۱۹، ۱۱۱، ۹۲ گز ہیں ثابت کرو کہ اس کا رقبہ ایک ایکڑ سے دس مربع گز کم ہے۔
- ۱۱۔ ایک مثلثی کھیت کے اضلاع ۲۴۲، ۱۲۱۲، اور ۱۴۵۰ گز ہیں ثابت کرو کہ کھیت کا رقبہ ۶ ایکڑ ہے
- ۱۲۔ ایک شخص کو ایک ایسا مثلثی احاطہ بنانے کی اجازت ملی جس کے اضلاع بالترتیب ۵۰، ۴۱، ۲۱ گز ہیں غلطی سے اس نے پہلے ضلع کو ایک گز بڑا بنا لیا، اگر احاطہ کا رقبہ اور مجموعہ اضلاع وہی رکھنا منظور ہو جو اوپر بتویر ہوا تو باقی دو اضلاع کے طول دریافت کرو۔
- ۱۳۔ ایک متساوی الساقین مثلث کا قاعدہ ۱۴ انچ ہے اور اس کا رقبہ ایک اور مثلث کے رقبہ کے برابر ہے جس کے اضلاع ۶، ۱۳، ۱۵، ۱۴، ۱۵، ۱۴ انچ ہیں، مثلث اول الذکر کے مساوی ضلعوں میں سے ایک کی قیمت ۵۰۰۰ پینس تک صحیح طور پر دریافت کرو،
- ۱۴۔ ثابت کرو کہ مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2} \times \text{بیس} \times \text{جیب}$ کے برابر ہے جب
- اگر مثلث کا ایک زاویہ ۹۰ ہو، رقبہ ۱۰ ماہ مربع فٹ اور مجموعہ اضلاع ۲۰ فٹ تو اضلاع کے طول دریافت کرو
- ۱۵۔ ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہیں اور اس کا رقبہ ایک ایسے مثلث متساوی الاضلاع کے رقبہ کا $\frac{3}{5}$ ہے جس کا مجموعہ اضلاع مثلث اول الذکر کے مجموعہ اضلاع کے برابر ہے، ثابت کرو کہ مثلث کے اضلاع کی باہمی نسبتیں ۳ : ۵ : ۷ ہے، نیز مثلث کا سب سے

بڑا زاویہ دریافت کرو۔

۱۶۔ ایک مثلث میں سب سے چھوٹا زاویہ 45° ہے اور زاویوں کے ماس سلسلہ حسابیہ میں ہیں، اگر اس کا رقبہ ۳ مربع گز ہو تو ثنابت کرو کہ اضلاع کے طول ۳، ۴، ۵ اور ۶ فٹ ہیں اور باقی زاویوں کے ماس بالترتیب ۲ اور ۳ ہیں

۱۷۔ کسی مثلث کے دو اضلاع کے طول بالترتیب ۱ فٹ اور ۲ فٹ ہیں اور چھوٹے زاویے کے مقابل کا زاویہ 30° درجہ ہے ثنابت کرو کہ دو مثلث شرائط سوال کو پورا کرتے ہیں، ان کے زاویے دریافت کرو اور ثنابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت $1:4$ ہے۔

۱۸۔ مفروضات ذیل سے دو مثلث حاصل ہوتے ہیں، جدولوں کی مدد سے بڑے مثلث کا رقبہ دریافت کرو

$$1 = 31^\circ 15' , 2 = 5^\circ 15' \text{ اینچ اور } 3 = 1^\circ 15' \text{ اینچ}$$

۲۰۵۔ مثلث کے متعلقہ دائرے

جو دائرہ مثلث کے نقاط راس میں سے گزرتا ہے اُس کو مثلث کے گرد بنا ہوا دائرہ یا اختصاراً مثلث کا بیرونی دائرہ کہتے ہیں۔

اس دائرہ کا مرکز اقلیدس م ۴ ش ۵ کے عمل سے حاصل ہو سکتا ہے اس کے نصف قطر کو ہم م ۴ سے تعبیر کر سکتے ہیں جو دائرہ مثلث کے اندر اس طرح سے پہنچ سکے کہ وہ مثلث کے ہر ایک ضلع کو مس کرے اُس کو اختصاراً مثلث کا

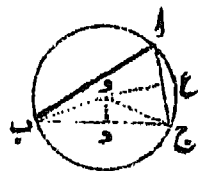
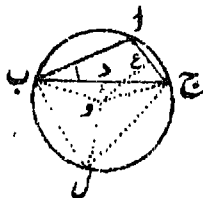
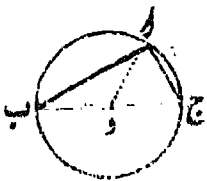
اندرونی دائرہ کہتے ہیں، اس دائرہ کا مرکز اقلیدس م م ش کے عمل سے حاصل ہو سکتا ہے۔ اس کے نصف قطر کو ہم آئینہ ر سے تعبیر کریں گے۔

جو دائرہ ضلع ب ج اور باقی دو اضلاع ا ب اور ا ج محدودہ میں سے ہر ایک کو مس کرے اس کو زاویہ ا کے مقابل مثلث کا جانبی دائرہ کہتے ہیں، اس کے نصف قطر کو ہم ر سے تعبیر کریں گے

اسی طرح سے حرف ر سے ہم اُس دائرہ کے نصف قطر کو تعبیر کریں گے جو ضلع ج ا اور باقی دو اضلاع ب ج اور ب ا محدودہ کو مس کرے۔

نیز یہ سے ہم اُس دائرہ کے نصف قطر کو تعبیر کریں گے جو ضلع ا ب اور باقی دو اضلاع ج ا اور ج ب محدودہ کو مس کرے۔
۲۰۶۔ مثلث ا ب ج کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر سا دریافت کرو۔

اضلاع ب ج اور ج ا کی تنصیف نقاط د اور ع پر مرکب اور ب ج اور ج ا پر عمود د و اور ع و قائم کرو۔
بوجب اقلیدس م م ش ہ نقطہ و مثلث کے بیرونی دائرہ کا مرکز ہے، و ب اور و ج کو ملاؤ



نقطہ و مثلث کے اندر واقع ہو سکتا ہے (شکل ۱) یا باہر (شکل ۲)
یا مثلث کے ایک ضلع پر (شکل ۳)
پہلی شکل میں مثلث ب و د اور ج و د آپس میں ہر طرح سے
برابر ہیں۔ اس لئے

$$\angle ب و د = \angle ج و د$$

$$\therefore \angle ب و د = \frac{1}{4} \angle ب و ج$$

$$= \angle ب ا ج \text{ (اقلیدس م ۳ ش ۲۰)}$$

$$1 =$$

$$\text{ نیز } \angle ب د = \angle ب و ج ب و د$$

$$\therefore \frac{1}{4} = \angle ب د$$

اگر $\angle$ منفرجہ ہو جیسا کہ شکل ۲ میں تو

$$\angle ب و د = \frac{1}{4} \angle ب و ج = \angle ب ل ج$$

$$= 180^\circ - \angle ا (اقلیدس م ۳ ش ۲۲)$$

یعنی بموجب سابق، $\angle ب د = \angle ب ل ج$ اور $\angle ب د = 2 \angle ب ل ج$

اگر $\angle$ زاویہ قائمہ ہو جیسا کہ شکل ۳ میں تو

$$\angle ب د = \angle ب ل ج = \frac{1}{4}$$

$$= 2 \angle ب ل ج \text{ چونکہ اس صورت میں } \angle ب د = 1$$

اس سے معلوم ہوا کہ مندرجہ بالا ارتباط سب مثلثوں کے لئے

درست ہے۔

اس لئے تینوں صورتوں میں

$$س = \frac{ا}{۲ جب ا} = \frac{ب}{۲ جب ب} = \frac{ج}{۲ جب ج} \quad (\text{دفعہ ۱۶۹})$$

(۱)

۲۰۷۔ دفعہ ۱۷۵ میں ہم ثابت کر چکے ہیں کہ

$$جب ا = \frac{۲}{ب} \quad \frac{۲}{ج} \quad \frac{۲}{ن} \quad (ن - ا) \quad (ن - ب) \quad (ن - ج)$$

$$= \frac{۲}{ب ج} \quad \text{اس میں ن مثلث کے رقبہ کو تعبیر کرتا ہے}$$

جب ا کی قیمت ربط (۱) دفعہ ۲۰۶ میں مندرج کرنے سے

$$س = \frac{ا ب ج}{۲ ن}$$

اور اس سے بیرونی دائرہ کا نصف قطر اضلاع کی رقوم میں حاصل ہوتا ہے۔

۲۰۸۔ مثلث ا ب ج کے دائرہ اندرونی کے نصف قطر

ر کی قیمت دریافت کرو۔

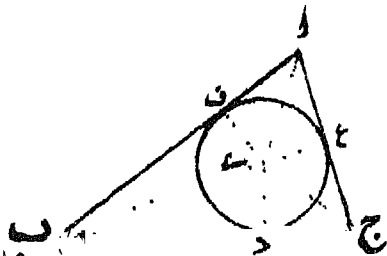
زاویہ ب اور ج کی تنصیف

بالترتیب دو خطوط ب بے

اور ج جے سے کرو اور فرض

کرو کہ یہ خط نقطہ سے پر

ملتے ہیں



بوجب اقلیدس م ۳ ش ۳ نقطہ سے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے
 سے لا کو ملاؤ اور تینوں اضلاع پر عمود سے دے، سے ع سے ف
 نکالو۔

تب دے = ع = ف = ر

اب رقبہ $\triangle$ سے ب ج = $\frac{1}{2}$ دے $\times$ ب ج = $\frac{1}{2}$ ر $\times$ دے

رقبہ $\triangle$ سے ج ل = $\frac{1}{2}$ سے ع $\times$ ج ل = $\frac{1}{2}$ ر $\times$ ج

اور رقبہ $\triangle$ سے اب = $\frac{1}{2}$ سے ف $\times$ اب = $\frac{1}{2}$ ر $\times$ ج

اس لئے جمع کرنے سے

$\frac{1}{2}$ ر $\times$ دے + $\frac{1}{2}$ ر $\times$ ج + $\frac{1}{2}$ ر $\times$ ج = مثلثات

سے ب ج سے ج ل اور سے اب کے رقبوں کا مجموعہ
 $\triangle$ اب ج کا رقبہ =

یعنی $\frac{1}{2}$ ر $\times$ (دے + ج + ج) =

یعنی $\frac{1}{2}$ ر $\times$ دے =

یعنی $\frac{1}{2}$ ر $\times$ ج =

۲۰۹۔ چونکہ زاوے سے ب د اور سے د ب بالترتیب

زاویا سے ب ف اور سے ف ب کے برابر ہیں اس لئے

مثلث سے د ب اور سے ف ب ہر طرح سے برابر ہیں۔

اس لئے ب د = ب ف یعنی ۲ ب د = ب د + د ب ف

نیز ا ع = ا ف یعنی ۲ ا ع = ا ع + ا ف

اور ج ع = ج د یعنی ج ع = ج ع + ج د
اس لئے جمع کرنے سے

$$۲ ب د + ۲ ا ع + ج ع = (ب د + ج د) + (ج ع + ا ع) + (ا ف + ف ب)$$

یعنی ۲ ب د + ۲ ا ع = ب ج + ج ا + ا ب

$$\therefore ۲ ب د + ۲ ا ع = ا ب + ب ج + ج ا = ۲ ن$$

اس لئے ب د = ن - ب = ب ف

اسی طرح ج ع = ن - ج = ج د

اور ا ف = ن - ا = ا ع

$$ا ب = \frac{ب د}{۲} = مس ب د = مس \frac{ب}{۲}$$

$$\therefore ر = د = ب د مس = \frac{ب}{۲} مس (ن - ا) = مس \frac{ب}{۲}$$

$$پس ر = ع = ج ع مس = ج ع (ن - ج) = مس \frac{ج}{۲}$$

$$اور نیز ر = ف = ا ف مس = ا ف (ن - ا) = مس \frac{ا}{۲}$$

$$اس لئے ر = (ن - ا) مس = (ن - ب) مس \frac{ب}{۲}$$

$$= (ن - ج) مس \frac{ج}{۲}$$

۲۱۰۔ ر کی ایک تیسری قیمت اس طرح سے حاصل ہو سکتی ہے۔

$$ا = ب د + ج د = دے د م ب د + دے د م ج د$$

$$رم \frac{ب}{۲} + رم \frac{ج}{۲} =$$

$$= \left[\frac{رم \frac{ب}{۲} + رم \frac{ج}{۲}}{\frac{جب \frac{ب}{۲} + جب \frac{ج}{۲}}{۲}} \right] ر =$$

$$∴ و جب \frac{ب}{۲} جب \frac{ج}{۲} = ر \left[جب \frac{ج}{۲} جب \frac{ب}{۲} + جب \frac{ب}{۲} جب \frac{ج}{۲} \right]$$

$$= ر جب \left(\frac{ب}{۲} + \frac{ج}{۲} \right) = ر جب (۹۰ - \frac{۱}{۲})$$

$$= ر جب \frac{۱}{۲} = ر و جب \frac{ب}{۲} جب \frac{ج}{۲} = ر جب \frac{۱}{۲}$$

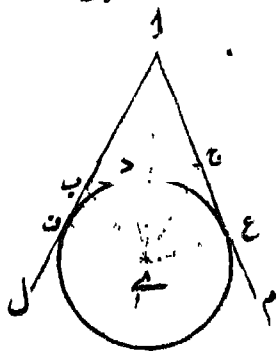
نتیجہ صریح :- چونکہ $۱ = ۲$ س جب $۱ = ۴$ س جب $\frac{۱}{۲}$ جب $\frac{۱}{۲}$

اس لئے $ر = ۴$ س جب $\frac{۱}{۲}$ جب $\frac{ب}{۲}$ جب $\frac{ج}{۲}$
۲۱۱ - مثلث ا ب ج کے زاویہ ۱ کے مقابل جو جانبی دائرہ

بن سکتا ہے اُس کا نصف قطر
لم دریافت کرو

ا ب اور ا ج کول اور م تک
خارج کرو

زایوں ج ب ل اور ب ج م کی



تصنیف خطوط ب مے اور ج مے سے کرو، اور فرض کرو کہ یہ خطوط نقطہ مے پر ملتے ہیں۔

تینوں اضلاع پر عمود مے د، مے ع اور مے ف نکالو۔
ثلث مے د ب اور مے ف ب ہر طرح سے برابر ہیں، اسلئے

$$مے ف = مے د$$

$$اسی طرح سے مے ع = مے د$$

چونکہ تینوں عمود مے د، مے ع، مے ف آپس میں برابر ہیں، اس لئے نقطہ مے دائرہ مجوزہ کا مرکز ہے

اب رقبہ ا ب مے ج مثلثات ا ب ج اور مے ب ج کے مجموعہ کے برابر ہے

نیز یہ رقبہ مثلثات مے ب ا اور مے ج ا کے مجموعہ کے بھی برابر ہے

$$اس لئے \Delta ا ب ج + مے ب ج = \Delta مے ج ا + مے ا ب$$

$$ن + \frac{1}{2} مے د \times ب ج = \frac{1}{2} مے ع \times ج ا + \frac{1}{2} مے ف \times ا ب$$

$$یعنی ن + \frac{1}{2} ر \times د = \frac{1}{2} ر \times ب + \frac{1}{2} ر \times ا$$

$$ن = ر \left[\frac{ب}{2} + \frac{ج}{2} - \frac{ا}{2} \right] = ر \left[\frac{ب + ج - ا}{2} \right] = ر (ن - ا)$$

$$ن = ر (ن - ا)$$

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{ن}{ب} = ر \quad \text{اور} \quad \frac{ن}{ج} = ر$$

۲۱۲۔ چونکہ $ل = ا + ب$ اور $ا = ب$ میں سے ہر ایک دائرہ کا محاسن

اس لئے بموجب دفعہ ۲۰۹، $ل = ا + ب$

اسی طرح سے $ب = ا + ب$ اور $ج = ا + ب$

$$\therefore ل = ا + ب = ا + ب + ب + ا + ج + ج + ج$$

$$= ا + ب + ب + ا + ج + ج + ج$$

$$= ا + ب + ب + ج + ج + ج = ۲۲$$

$$\therefore ل = ن = ا + ب$$

$$\text{نیز} \quad ب = ا + ب = ا + ب = ن - ج$$

$$\text{اور} \quad ج = ا + ب = ا + ب = ن - ب$$

$$\therefore ج = ا + ب = ا + ب = ن - ب$$

$$\text{یعنی} \quad ر = \frac{ن}{ب}$$

۲۱۳۔ $ر$ کی ایک تیسری قیمت $ا$ اور $ب$ اور $ج$

کی رقوم میں اس طرح حاصل ہو سکتی ہے

چونکہ $ج$ زاویہ $ب$ کی تنصیف کرتا ہے، اس لئے

$$\angle ج = \frac{1}{2} (ا - ب) = ۹۰^\circ - \frac{ا}{2}$$

$$\text{اس لئے} \quad \angle ب = ۹۰^\circ - \frac{ا}{2}$$

$$\therefore ا = ب + ج$$

$$= ب + ب + ج = ۲ب + ج$$

تو سا، ر، ل، پ اور لم کی قیمتیں دریافت کرو۔
 ۴۔ مثلثوں کے حل کی مشتبہ صورت میں ثابت کرو کہ دونوں مثلثوں
 کے بیرونی دائرے برابر ہوتے ہیں
 ثابت کرو کہ

$$۵۔ \text{پ}(\text{ن} - \text{ک}) = \text{پ}(\text{ن} - \text{ب}) = \text{پ}(\text{ن} - \text{ج}) = \text{رن} = \text{ن}$$

$$۶۔ \frac{\text{رپ}}{\text{پ}} = \text{مس} \frac{\text{ک}}{\text{پ}} - \text{ل} - \text{در} \frac{\text{ر}}{\text{پ}} = \text{ن}$$

$$۸۔ \text{در} \frac{\text{ر}}{\text{پ}} = \text{ر} \frac{\text{م}}{\text{پ}} \frac{\text{ک}}{\text{پ}} - \text{م} \frac{\text{ب}}{\text{پ}} - \text{م} \frac{\text{ج}}{\text{پ}}$$

$$۹۔ \text{در} \frac{\text{م}}{\text{پ}} = \text{ن}$$

$$۱۰۔ \text{پ} + \text{پ} + \text{پ} + \text{پ} = \text{ن}$$

$$۱۱۔ \frac{1}{\text{ر}} - \frac{1}{\text{پ}} + \frac{1}{\text{ر}} + \frac{1}{\text{ر}} = ۰$$

$$۱۲۔ \text{ک}(\text{ر} + \text{پ}) = \text{ب}(\text{ر} + \text{پ}) = \text{ج}(\text{ر} + \text{پ})$$

$$۱۳۔ (\text{ر} + \text{پ}) \text{مس} \frac{\text{ک}}{\text{پ}} = (\text{ر} - \text{پ}) \text{م} \frac{\text{ج}}{\text{پ}} = \text{ج}$$

$$۱۴۔ \text{ن} = ۲ \text{ع} \text{حب} \text{ا} \text{حب} \text{ب} \text{حب} \text{ج}$$

$$۱۵۔ ۴ \text{ع} \text{حب} \text{ا} \text{حب} \text{ب} \text{حب} \text{ج} = \text{ک} \text{جم} \text{ا} + \text{ب} \text{جم} \text{ب} + \text{ج} \text{جم} \text{ج}$$

$$۱۶۔ \text{ن} = ۴ \text{ع} \text{ر} \text{جم} \frac{\text{ک}}{\text{پ}} - \text{م} \frac{\text{ب}}{\text{پ}} - \text{م} \frac{\text{ج}}{\text{پ}}$$

$$۱۷- \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$$

$$۱۸- ۲ + ۲ + ۲ - ۳ = ۴$$

$$۱۹- (۲-۱)(۲-۲)(۲-۳) = ۴$$

$$۲۰- \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$$

$$۲۱- \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$$

$$۲۲- ۲ + ۲ + ۲ = ۶ - ۳ - ۲ - ۱ = ۰$$

۲۰۰

۲۱۴- مثلث پائین اور مرکز عمودی

فرض کرو کہ ا ب ج کوئی مثلث ہے اور زاویوں 'ا' ب 'ج' سے مقابل کے اضلاع پر عمود بالترتیب 'ک' 'ل' اور 'م' نکالے گئے ہیں۔



علم ہندسہ کی اکثر کتابوں میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ یہ تینوں عمود ایک نقطہ

مشترک پ پر ملتے ہیں، اس نقطہ کو مثلث کا مرکز عمودی کہتے ہیں۔ مثلث ک ل م جو ان عمودوں کے پایوں کو ملانے سے بنتا ہے ا ب ج کا مثلث پائین کہلاتا ہے۔

۲۱۵- مرکز عمودی سے مثلث کے رؤس الزوایا کے

فاصلے دریافت کرو۔

پک = ک ب س پ ب ک = ک ب س (ج ۹۰ - ج)

= ا ب ج ب م ج = ج ب ج ج ب ج م ج

= ۲ م ج ب ج م ج (دفعہ ۲۰۶)

نیز ا پ = ا ل × قطک ا ج

= ج ج م ا × ق م ج

= ج ج ج - ج م ا

= ۲ م ج م ا (دفعہ ۲۰۶)

پس ب پ = ۲ م ج ب اور ج پ = ۲ م ج ج
لہذا مرکز عمودی کے فاصلے زاویوں کے رأسوں سے ۲ م ج م ا
۲ م ج ب، ۲ م ج ج ہیں۔ اور اضلاع سے اس کے فاصلے
۲ م ج ب ج ج، ۲ م ج ج ج م ا اور ۲ م ج م ا ج ب ہیں۔

۲۱۶ - مثلث پائیں کے اضلاع اور زاوے دریافت کرو
چونکہ زاوے پ ک ج اور پ ل ج دونوں قائمے ہیں،
اس لئے نقاط پ، ل، ج اور ک سب ایک دائرہ کے
محیط پر واقع ہیں۔

پ ک ل = پ ج ل (اقلیدس م ۳ ش ۲۱)
۹۰ - ا =

اسی طرح سے پ، ب، ک اور م ایک دائرہ کے محیط واقع

ہیں، اس لئے

$$\angle پ ک م = \angle پ ب م$$

$$۹۰ - ۱ = ۸۹$$

$$\angle م ک ل = ۱۸۰ - ۱۲ = ۱۶۸$$

$$= \text{تکملہ زاویہ } ۱۲$$

$$\angle ک ل م = ۱۸۰ - ۲ = ۱۷۸$$

$$\angle ل م ج = ۱۸۰ - ۲ = ۱۷۸$$

نیز مثلث ل م سے

$$\frac{ل م}{\sin ۱۲} = \frac{ل ب}{\sin ۱۶۸} = \frac{ل ج}{\sin ۱۷۸}$$

$$\frac{ل ب}{\sin ۱۲} = \frac{ل ج}{\sin ۱۷۸}$$

$$ل م = ل ج \sin ۱۲$$

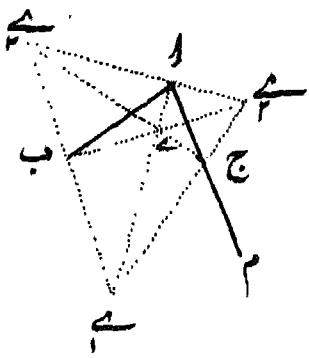
$$= ل ج \sin ۱۲ \quad (\text{وضہ } ۱۶۹)$$

$$\sin ۱۲ = \sin ۱۶۸ \quad \text{پس } ل م = ل ج \sin ۱۲$$

اس لئے معلوم ہوا کہ مثلث پابین کے اضلاع ل ج، ل ب، ل م کے
 ج ج، ج ب، ج م کے زاویے ۱۲، ۲، ۱۷۸ ہیں۔ اور اس کے زاویے ۱۲، ۲، ۱۷۸
 کے تکملے ہیں۔

$$۲۱۷ = \text{فرض کرو کہ سے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے اور}$$

ہے، ہے، ہے اُن جانبی دائروں کے مرکز ہیں جو بالترتیب



ا، ب، ج کے محاذی ہیں۔

جیسا دفعات ۲۰۸ اور ۲۱۱ میں

ہم نے دیکھا ہے ج زاویہ

ا، ج، ب کی تنصیف کرتا ہے

اور ہے ج زاویہ ب، ج، م کی

تنصیف کرتا ہے۔

$$\angle ج، ج، م = \angle ج، ج، ب + \angle ج، ج، ب$$

$$\frac{1}{2} = \angle ا، ج، ب + \frac{1}{2} \angle م، ج، ب$$

$$\frac{1}{2} = [\angle ا، ج، ب + \angle م، ج، ب]$$

$$= \frac{1}{2} \times 180 = \text{ایک زاویہ قائمہ}$$

اسی طرح سے $\angle ج، ج، م$ بھی قائمہ ہے

لہذا ہے ج، م، ا ایک خط مستقیم ہے اور ہے ج، ا، ب اس پر عمود ہے

اسی طرح سے ہے ا، ب، م ایک خط مستقیم ہے اور اس پر ہے ا، ج

عمود ہے اور ہے ب، م، ا ایک خط مستقیم ہے اور ہے ب، ج، ا اس پر

عمود ہے۔

نیز چونکہ ہے ا، اور ہے ا، دونوں زاویہ ب، ا، ج کی

تنصیف کرتے ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ تینوں نقطے ا، ب، ج

ایک خط مستقیم پر واقع ہیں، اسی طرح سے ب، ج، م ہے

اور ج، م، ا بھی مستقیم خط ہیں۔

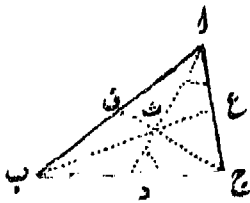
لہذا ثابت ہوا کہ ہے ہے ہے ایک مثلث ہے جس میں

اُب ج اُن عمودوں کے پائین ہیں جو نقاط راس سے
مقابل کے اضلاع پر نکالے جائیں اور بے اُن عمودوں
کا نقطہ تقاطع ہے، یا دوسرے الفاظ میں ہم اس کو یوں بیان
کر سکتے ہیں کہ مثلث ہے ہے ہے کا مثلث پائین اُب ج
سے اور اس کا مرکز عمودی نقطہ ہے ہے

مثلث ہے ہے ہے کو اکثر جانبی مرکزوں کا مثلث کہتے ہیں

۲۱۸۔ مثلث کا مرکز ہندی اور وسطانیات

اگر اُب ج کوئی مثلث ہو اور د، ع، ف اضلاع ب ج،
ج ا، ا ب کے نقاط تنصیف ہوں تو خطوط ا د، ا ب، ع،
ج ف میں سے ہر ایک کو مثلث کا وسطانیہ کہتے ہیں



علم ہندسہ کی اکثر کتابوں میں
یہ ثابت کیا گیا ہے کہ مثلث
کے وسطانیات ایک مشترک
نقطہ ت پر ملتے ہیں اور

$$ا د = \frac{2}{3} ا ب، ب ت = \frac{2}{3} ب ج، ج ف = \frac{2}{3} ج ا$$

اور ج ت = $\frac{1}{3}$ ج ف

نقطہ ت کو مثلث کا مرکز ہندی کہتے ہیں

۲۱۹۔ وسطانیات کے طول

بوجب دفعہ ۱۷۰

$$۱ = ۱ج + ۲ج - ۲ج \times ج = ۲ج$$

$$= ۲ج + ۲ج - ۲ج = ۲ج$$

$$اور ۲ج = ۲ج + ۲ج - ۲ج = ۲ج$$

$$اس لئے ۲ج - ۲ج = ۲ج - ۲ج$$

$$پس ۱ = ۲ج + ۲ج - ۲ج$$

$$نیز ۱ = ۲ج + ۲ج - ۲ج = ۲ج \dots \dots (دفعہ ۱۰)$$

$$نیز ب = ۲ج + ۲ج - ۲ج$$

$$اور ج = ۲ج + ۲ج - ۲ج$$

۲۲۰۔ جو زاوے کوئی وسطانیہ اضلاع کے ساتھ بناتا ہے
اُن کو دریافت کرو

$$اگر ۲ج = ۲ج اور ۲ج = ۲ج$$

$$تو ۲ج = ۲ج = ۲ج$$

$$: ۲ج = ۲ج = ۲ج$$

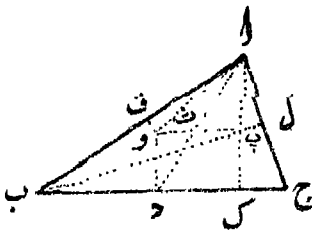
$$اسی طرح سے ۲ج = ۲ج$$

$$نیز اگر ۲ج = ۲ج تو$$

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{جب ج}} = \frac{\text{اج}}{\text{لا}} = \frac{\text{ب}}{\text{لا}}$$

$$\text{جب ط} = \frac{\text{ب جب ج}}{\text{لا}} = \frac{\text{م ب}^۲ + \text{ج}^۲ - \text{لا}^۲}{۲ \text{ج}}$$

پس جو زاوے لا د اضلاع سے بناتا ہے وہ معلوم ہوئے
۲۲۱ - ثابت کرو کہ مثلث کا مرکز ہندسی ہمیشہ اس خط پر



واقع ہوتا ہے جو بیرونی مرکز اور
مرکز عمودی کو ملانے سے پیدا ہو
فرض کرو کہ نقطہ و بیرونی دائرہ کا
مرکز ہے اور پ مرکز عمودی ہے

ضلع ب ج پر عمود و د اور

پک نکالو اور فرض کرو کہ لا د اور و پ نقطہ نشا پر
ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں -

مثلث و ث د اور پ ث ا کے زاوے باہم برابر ہیں

نیز بموجب دفعہ ۲۰۶

$$\text{و د} = \text{س ج م}$$

اور بموجب دفعہ ۲۱۵

$$\text{ا پ} = \frac{\text{س ج م}}{۲}$$

اس لئے بحکم اقلیدس م ۶ ش ۴

$$\frac{\text{ا ث}}{\text{ث د}} = \frac{\text{ا پ}}{\text{و د}} = \frac{۲}{۲}$$

لہذا نقطہ ث مثلث کا مرکز ہندسی ہے ،
نیز مسئلہ مذکورہ بالا کی مدد سے

$$\text{و ث} = \text{و پ} = \frac{1}{2}$$

اس لئے معلوم ہوا کہ مثلث کا مرکز ہندسی اُس خط پر واقع ہے جو بیرونی دائرہ کے مرکز کو مرکز عمودی کے ساتھ ملاتا ہے اور اس خط کو ۲:۱ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے ۔

نیز عمل ہندسی سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مثلث کے نو نقطہ دائرہ کا مرکز (یعنی ایسے دائرہ کا مرکز جو عمودوں کے پایوں اور ضلعوں کے نقاط تنصیف اور اُن خطوط کے وسطی نقاط میں سے ہو کر گزرے جو مثلث کے نقاط راس کو مرکز عمودی سے ملاتے ہیں) ہمیشہ خط و پ پر واقع ہوگا اور اس کی تنصیف کریگا ۔

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ بیرونی دائرہ کا مرکز ، مرکز ہندسی ، نو نقطہ دائرہ کا مرکز اور مرکز عمودی چاروں نقطے ایک خط مستقیم پر واقع ہیں ۔

۲۲۲۔ بیرونی دائرہ کے مرکز اور مرکز عمودی کا درمیانی جملہ دریافت کرو ۔

اگر و پ پر عمود و ف نکالا جائے تو

$$\text{و ف} = ۹۰ - \text{و پ} \quad \text{و ف} = ۹۰ - \text{ج}$$

$$\text{نیز} \quad \text{پ و ل} = ۹۰ - \text{ج}$$

∴ واپ = ا - د - واٹ - پ ایل

$$ا - د = (۹۰ - ج) = ۲ + ج - ۱۸ :$$

$$۲ + ج - ۱ = (ج + ب + ا) - ج = ب$$

نیز وا = سر اور بموجب دفعہ ۲۱۵، پ ا = ۲ سر جم ا

$$∴ وپا = د + پ ا - ۲ د + پ ا \times ۲ = جم واپ$$

$$= ۲ + ۲ سر جم ا - ۲ سر جم ا (ج - ب)$$

$$= ۲ + ۲ سر جم ا [جم ا - (ج - ب)]$$

$$= ۲ - ۲ سر جم ا [جم (ب + ج) + جم (ج - ب)] دفعہ ۱$$

$$= ۲ - ۲ سر جم ا جم ب جم ج$$

$$∴ وپ = سر ا - ۸ جم ا جم ب جم ج$$

۲۲۳ - مثلث کے بیرونی اور اندرونی دائروں کے مرکزوں کا باہمی فاصلہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ بیرونی دائرہ کا

مرکز ہے اور وف ضلع

اب پر عمود ہے

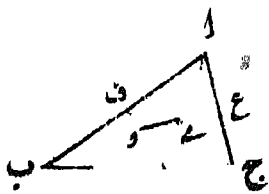
نیز فرض کرو کہ

اندرونی دائرہ کا مرکز ہے اور ضلع ا ج پر سے عمود ہے

تب بموجب دفعہ سابق

$$د واٹ = ۹۰ - ج$$

$$∴ واے = دے اٹ - د واٹ$$



نیز $\angle اے = \angle غ = ر$
 $\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د}$ جب $\frac{ا}{ب}$
 (۲) میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے

رأ - دئے = ۳ سرار

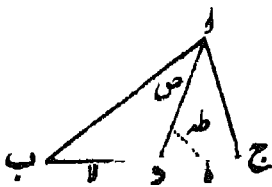
یعنی دئے = رأ - ۲ سرار

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $\angle ہ = \angle ج$

اس لئے $\angle د - رأ = \angle ہ - ۲ سرار$

یعنی $\angle د = رأ + ۲ سرار$

۲۲۴۔ زاویوں کے منصف



اگر $\angle د$ زاویہ $ا$ کی تنصیف کرے اور قاعدہ کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرے جنکے طول لا اور ما کہوں تو

بموجب اقلیدس ص ۶ ش ۳

$$\frac{لا}{ا} = \frac{اب}{اج} = \frac{ج}{ب}$$

$$\therefore \frac{لا}{ج} = \frac{ما}{ب} = \frac{لا + ما}{ب + ج} = \frac{ا}{ب + ج} \quad (۱)$$

جس سے لا اور ما کی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

نیز اگر $\angle د$ ضلع باج سے زاویہ طہ بنائے اور اس کا

طول ص ہو تو

$$\Delta \text{ ا ب د} + \Delta \text{ ا ج د} = \Delta \text{ ا ب ج}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \text{ ج ص} + \frac{1}{4} \text{ ب ص} = \frac{1}{4} \text{ ج ب ص}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ ب ج ص}$$

$$\text{یعنی ص} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب + ج}} \times \frac{\text{ج ب}}{\text{ج ب}}$$

$$= \frac{2 \text{ ب ج}}{\text{ب + ج}} \text{ جم } \frac{1}{4} \text{ ----- (۲)}$$

نیز ط = $\Delta \text{ د ا ب} + \text{ب} = \frac{1}{4} \text{ ب} + \text{ب} \text{ ----- (۳)}$
اس طرح سے ہمیں منصف کا طول اور ب ج سے اس کا میلان حاصل ہوتا ہے۔

امثلہ نمبری ۳۷

اگر ایک مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز سے ہو اور تین جانبی دائروں کے مرکز سے، بیٹے بیٹے ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۱- \text{اے} = \text{رقم } \frac{1}{4}$$

$$۲- \text{اے} = \text{ب} \times \text{ج} = \Delta \text{ ب ج مس } \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} \text{ مس } \frac{1}{4} \text{ ج}$$

$$۳- \text{اے} = \text{رقم } \frac{1}{4} \quad ۴- \text{اے} = \text{قط } \frac{1}{4}$$

$$۵- \text{اے} = \text{رقم } \frac{1}{4}$$

$$۶- \text{اے} = \text{اے} \times \text{اے} \times \text{اے} = ۱۶ \text{ سار}$$

$$۷- \text{اے} = \text{اے} = ۴ \text{ مس (اے + اے)}$$

$$۸ - \Delta \text{ ہے ہے ہے } = \frac{ب+ج}{۲}$$

$$۹ - \text{ے ہے + ہے ہے = ے ہے + ہے ہے = ے ہے + ہے ہے}$$

$$۱۰ - \text{مثلاً ہے ہے ہے کا رقبہ} = ۸ \text{ سا جم } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲} = \frac{ب+ج}{۲} \text{ کو ب ج}$$

$$۱۱ - \text{ے ہے } \times \text{ ہے ہے } = \text{ے ہے } \times \text{ ہے ہے } = \text{ے ہے } \times \text{ ہے ہے}$$

اگر مثلث ا ب ج کے اندرونی دائرہ کا مرکز ہے ہو اور بیرونی دائرہ کا مرکز د، نیز عمودی مرکز پ ہو اور ہندسی مرکز ث ث تو ثابت کرو کہ

$$۱۲ - \text{ے د} = \text{سا } (۲-۳) \text{ جم } ۱ - ۲ \text{ جم } ۲ - ۲ \text{ جم } ۲ (جم ج)$$

$$۱۳ - \text{ے پ} = ۲ - ۲ - ۲ \text{ سا جم } ۱ \text{ جم } ۱ \text{ جم } ۱$$

$$۱۴ - \text{و ث} = \text{سا} - \frac{۱}{۹} (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج})$$

$$۱۵ - \Delta \text{ ے د پ کا رقبہ} = ۲ \text{ سا جب } \frac{ب+ج}{۲} \text{ جب } \frac{ب+ج}{۲} \text{ جب } \frac{ب+ج}{۲}$$

$$۱۶ - \Delta \text{ ے پ ث کا رقبہ} = \frac{۱}{۲} \text{ سا جب } \frac{ب+ج}{۲} \text{ جب } \frac{ب+ج}{۲} \text{ جب } \frac{ب+ج}{۲}$$

$$۱۷ - \text{ثابت کرو کہ نو لقطی دائرہ کے مرکز کا فاصلہ زاویہ ا سے}$$

$$\frac{۱}{۲} (۱۸ + ۸ \text{ جم } ۱ \text{ جب } ۱ \text{ جب } ۱ \text{ ج ہے})$$

$$۱۸ - \text{مثلاً ا ب ج کا مثلث پائیں د ع ف ہے ثابت کرو کہ}$$

$$(۱) \text{ اس کا رقبہ } ۲ \text{ ف جم } ۱ \text{ جم } ۱ \text{ جم } ۱ \text{ ج ہے}$$

$$(۲) \text{ اس کے بیرونی دائرہ کا نصف قطر } \frac{۱}{۲} \text{ ہے}$$

$$\text{اور (۳) اس کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر } ۲ \text{ سا جم } ۱ \text{ جم } ۱ \text{ جم } ۱ \text{ ج ہے}$$

$$۱۹ - \text{اگر مثلث ا ب ج کے جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے}$$

سے مثلث د د و بنے تو ثابت کرو کہ

(۱) اس کے اضلاع ۴ رجم $\frac{1}{4}$ ، ۴ رجم $\frac{1}{4}$ ، ۴ رجم $\frac{1}{4}$ ہیں

(۲) اس کے زاوئے $\frac{11}{4}$ ، $\frac{11}{4}$ ، $\frac{11}{4}$ اور $\frac{11}{4}$ - $\frac{11}{4}$ - $\frac{11}{4}$ ہیں

اور (۳) اس کا رقبہ ۲ سمان ہے

۲۰۔ جن نقطوں پر مثلث ا ب ج کا دائرہ اندرونی اضلاع کو مس کرتا ہے اُن کو ملائے سے ایک اور مثلث د ع ف بنتا ہے ثابت کرو کہ

(۱) اس مثلث کے اضلاع ۲ رجم $\frac{1}{4}$ ، ۲ رجم $\frac{1}{4}$ ، ۲ رجم $\frac{1}{4}$ ہیں

(۲) اس کے زاوئے $\frac{11}{4}$ ، $\frac{11}{4}$ ، $\frac{11}{4}$ اور $\frac{11}{4}$ - $\frac{11}{4}$ - $\frac{11}{4}$ ہیں

ور (۳) اس کا رقبہ $\frac{1}{2}$ یعنی $\frac{1}{2}$ سمان ہے

۲۱۔ مثلث ا ب ج کے اضلاع کے نقاط تنصیف د، ع، ف ہیں ثابت کرو کہ

مثلث د ع ف اور مثلث ا ب ج کے ہندسی مرکز ایک دوسرے پر منطبق ہوتے

ہیں نیز ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کا مرکز عمودی ا ب ج کے بیرونی دائرہ کا مرکز ہے

کسی مثلث ا ب ج میں ثابت کرو کہ -

۲۲۔ اگر زاویہ ا سے مقابل کے ضلع ب ج پر عمود نکالا جائے تو وہ اس

ضلع کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے جو اسکے متصل زاویوں کے ماسات اتمام

کے متناسب ہوتے ہیں اور زاویہ ا کو دو ایسے حصوں میں تقسیم کرتا ہے

جن کی جیوب اتمام اضلاع متصلہ کے بالعکس متناسب ہوتی ہیں -

۲۳۔ زاویہ ا میں سے گزرنے والا وسطانیہ اس کو دو ایسے زاویوں میں تقسیم

کرتا ہے جن کے ماس اتمام ۲ مم ا + مم ج اور ۲ مم ا + مم ب ہیں اور مثلث کے

قاعدہ سے ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کا ماس اتمام $\frac{1}{2}$ (مم ج + مم ب) ہے -

۲۳۔ اگر زاویہ A سے مقابل کے ضلع B ج پر عمود نکالا جائے تو پائین

عمود اور B ج کے نقطہ تقصیف کا باہمی فاصلہ $\frac{1}{2} BC$ ہے۔

۲۵۔ مثلث A B ج کا مرکز عمودی ہے، ثابت کرو کہ مثلثات

B وج، ج و A، اور A B ج کے بیرونی دائرے سب برابر ہیں۔

۲۶۔ مثلث A B ج کے رؤس الزوایا سے مقابل کے اضلاع پر عمود

A د، B ع اور ج ف کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ مثلثات A ع ف، B د ف،

ج د ع کے بیرونی دائروں کے قطر بالترتیب A مم، B مم اور ج مم ہیں

ہیں اور مثلث د ع ف اور A B ج کے اضلاع کے مجموعوں کی باہمی نسبت برابر ہے

۲۷۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز سے رؤس الزوایا

کے فاصلوں کا حاصل ضرب $\frac{1}{2} BC$ ہوتا ہے۔

۲۸۔ مثلث A B ج کے تین جانبی دائروں کے گرد ایک، مثلث

د ع ف بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{A}{\sin A} = \frac{B}{\sin B} = \frac{C}{\sin C}$$

۲۹۔ اگر ایک ایسا دائرہ کھینچا جائے جو ایک مثلث کے اندرونی اور

بیرونی دائروں کو مس کرے، نیز ضلع B ج کو خارجاً مس کرے تو ثابت

$$\text{کرو کہ اس کا نصف قطر} = \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}$$

۳۰۔ اگر تین ایسے دائروں کے نصف قطر جو ایک دوسرے کو خارجاً

مس کریں، A، B، ج ہوں اور اگر ان تینوں کو مس کرتے ہوئے دو اور

دائرے کھینچے جائیں جن کے نصف قطر A اور B ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = \frac{1}{r}$$

نقطہ تماس سے $\left(\frac{1}{2} (ا + ب + ج) \right)$ ہے

۳۷۔ اضلاع ب ج ، ج ا ، ا ب میں تین نقطے ا ، ب ، ج ایسے مقرر کئے گئے ہیں کہ

ب ا : ا ج = ج ب : ب ا = ا ج : ج ب = م : ن ، ثابت کرو کہ خطوط ا ب ، ب ج ، ج ا کے باہمی تقاطع سے ایک ایسا مثلث پیدا ہوگا جس کے رقبہ کی نسبت مثلث ا ب ج کے ساتھ (م - ن) : م + ن = ن : ن ہوگی۔

۳۸۔ مثلث ا ب ج کا اندرونی دائرہ اضلاع ب ج ، ج ا ، ا ب کو نقاط ا ، ب ، ج پر بالترتیب مس کرتا ہے ، اسی طرح سے مثلث ا ب ج کا دائرہ اندرونی اضلاع کو نقاط ا ، ب ، ج پر مس کرتا ہے اور علیٰ ہذا القیاس ، اگر ن داں مثلث ا ب ج اس طرح سے پیدا ہو تو ثابت کرو کہ اس کے زاوے

$$\frac{\pi}{2} + (-2) \left(\frac{\pi}{2} - ا \right) + \frac{\pi}{2} = (-2) \left(\frac{\pi}{2} - ب \right) + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{اور } \frac{\pi}{2} + (-2) \left(\frac{\pi}{2} - ج \right) + \frac{\pi}{2}$$

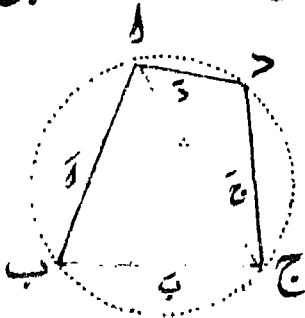
اس لئے ثابت کرو کہ آخر لامر اس طرح سے جو مثلث بنے گا وہ متساوی الاضلاع ہوگا۔

۳۹۔ مثلث ا ب ج کا مثلث پائین ا ب ج ہے اور ا ب ج کا مثلث پائین ا ب ج ہے اور علیٰ ہذا القیاس ، ن دیں مثلث پائین کے زاوے ا ب ج در یافت کرو۔

باب شانزدهم

اشکال ذواربعۃ الاضلاع اور منتظم کثیر الاضلاع

۲۲۵ - ایک ذواربعۃ الاضلاع دائرہ کے اندر بن سکتی ہے، اُس کا رقبہ دریافت کرو۔



فرض کرو کہ ذواربعۃ الاضلاع
ا ب ج د ہے اور اُس کے
اضلاع کے طول ا ب، ب ج، ج د،
د ا میں دکھلانے کئے ہیں۔

ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ = رقبہ $\triangle$ ا ب ج + رقبہ $\triangle$ ا د ج

$$= \frac{1}{2} \text{ ا ب جب ب } + \frac{1}{2} \text{ ج د جب د } \quad (\text{دفعہ ۲۰۴})$$

$$= \frac{1}{2} (\text{ا ب} + \text{ج د}) \text{ جب ب}$$

اور چونکہ اقلیدس م ۳ ش ۲۲ کی رو سے $\text{ا ب} = \text{ج د}$ ۔

اس لئے $\text{جب ب} = \text{جب د}$

اب ہمیں جب ب کو اضلاع کی رقوم میں بیان کرنا ہے

$$\text{ا ب} + \text{ب ج} = ۲ \text{ ا ب جب ب} = \text{ا ج}$$

$$= \text{ج} + \text{ک} - ۲ \text{ج} - \text{د جم}$$

لیکن جم د = جم (۱۸۰ - ب) = - جم ب

اس لئے $\text{ا} + \text{ب} - ۲ \text{ا} + \text{ب جم ب} = \text{ج} + \text{ک} + ۲ \text{ج} - \text{د جم ب}$

$$\text{یعنی جم ب} = \text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک} - ۲ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د})$$

اس لئے جب $\text{ا} = ۱ - \text{جم ب} = ۱ - (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک} - ۲ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}))$

$$\begin{aligned} & ۲ \{ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) \} - ۲ \{ (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک} - ۲ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د})) \} \\ & = ۳ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) + (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک} - ۲ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د})) \} - \{ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) - (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک} - ۲ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د})) \} \\ & = ۳ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) - (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک} - ۲ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د})) \} - \{ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) + (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک} - ۲ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د})) \} \\ & = ۳ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{ (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک} - ۲ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د})) - (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) \} - \{ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) - (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک} - ۲ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د})) \} \\ & = ۳ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \{ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) - (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک} - ۲ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د})) \} - \{ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) + (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک} - ۲ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د})) \} \\ & = ۳ (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د}) \end{aligned}$$

فرض کرو کہ $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۲ ن$

$$\text{یعنی } \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} - \text{د} = ۲ - (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د}) = ۲ - ۲ ن = ۲ (۱ - ن)$$

$$\text{ا} + \text{ب} - \text{ج} - \text{ک} = ۲ (۱ - ن) - \text{ج}$$

$$\text{ا} - \text{ب} + \text{ج} + \text{د} = ۲ (۱ - ن) - \text{ب}$$

اور - $ا + ب + ج + د = ۲(ن - ا)$

اسلئے جب $ا = ۲(ن - د) \times ۲(ن - ج) \times ۲(ن - ب) \times ۲(ن - ا)$
 $۲(ا + ب + ج + د)^۲$

یعنی $(ا + ب + ج + د) = ۲(ن - ا) \times ۲(ن - ب) \times ۲(ن - ج) \times ۲(ن - د)$
 لہذا ذواریبعتہ الاضلاع کا رقبہ

$\frac{۱}{۲۴} (ا + ب + ج + د) = ۲(ن - ا) \times ۲(ن - ب) \times ۲(ن - ج) \times ۲(ن - د)$

۲۲۶ - چونکہ حجم $ا + ب + ج + د = ۲(ا + ب + ج + د)$

اس لئے $ا + ب + ج + د = ۲(ا + ب + ج + د)$

$ا + ب + ج + د = ۲(ا + ب + ج + د)$

$(ا + ب + ج + د) = ۲(ا + ب + ج + د)$

$(ا + ب + ج + د) = ۲(ا + ب + ج + د)$

$ا + ب + ج + د$

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$ا + ب + ج + د = ۲(ا + ب + ج + د)$

$ا + ب + ج + د$

اس سے ہمیں ذواریبعتہ الاضلاع کے قطروں کے طول معلوم ہوتے ہیں -

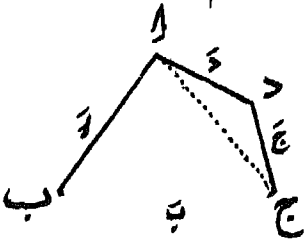
ضرب دینے سے $اج \times ب د = (اج + ب د)^2$
 یعنی $اج \times ب د = اب \times ج د + ب ج \times اد$
 اور یہ اقلیدس م ۶ مسئلہ دے ہے
 نیز ذواربعتہ الاضلاع کے بیرونی دائرے کا مرکز

$$\frac{1}{2} = \frac{اج}{ب د}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{(اج + ب د)(د د + ب ج)(ن - ب)(ن - ج)(ن - د)}{(اب \times ج د + ب ج \times اد)^2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{(اب + ج د)(اج + ب د)(ن - ب)(ن - ج)(ن - د)}{(ن - د)(ن - ب)(ن - ج)(ن - د)}$$

۲۲۷۔ اگر کوئی ذواربعتہ الاضلاع دی ہوئی ہو اور یہ ضروری نہیں کہ وہ ایک دائرہ کے اندر بن سکے تو ہم اس کے رقبہ کو اضلاع اور دو مقابل کے زاویوں کے مجموعہ کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔



فرض کرو کہ دو زاویوں ب اور د کا مجموعہ ۲۷۰ ہے، اگر ذواربعتہ الاضلاع کے رقبہ کو قہ سے تعبیر کریں تو

$$قہ = رقبہ مثلث اب ج + رقبہ مثلث اج د$$

$$= \frac{1}{2} اب \times ج د + \frac{1}{2} اج \times ب د$$

-67

نتیجہ صریح ۲۔ اگر ذواربعۃ الاضلاع کے چاروں اضلاع معلوم ہوں تو $\angle A$ کی قیمتیں اور $\angle N$ کی قیمت معلوم ہو جائے گی رقبہ Q کی بڑی سے بڑی قیمت اُس وقت ہوگی جبکہ $\angle B$ $\angle C$ $\angle D$ $\angle E$ کی قیمت چھوٹی سے چھوٹی ہو یعنی جبکہ $\angle C$ صفر کے برابر ہو اور اُس وقت $\angle E = 90^\circ$ اس صورت میں شکل کے دو مقابل کے زاویوں کا مجموعہ 180° ہوگا اور شکل ایک دائرہ کے اندر بن سکے گی۔ (اقلیدس ص ۳ ش ۲۲) اس سے معلوم ہوا کہ جس ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع دئے ہوئے ہوں اس کے رقبہ کی بڑی سے بڑی قیمت اس وقت ہوگی جب وہ ایک دائرہ کے اندر بن سکے۔

۲۲۸- مثال۔ ایک ایسی ذوالبعیت الاضلاع کا رقبہ دریافت کرو جس کے اندر ایک دائرہ بن سکے۔

فرض کرو کہ ایک ذوالربیعہ الاصطلاح 'ا ب ج د' کے اندر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے اور وہ اصطلاح 'ا ب'، 'ب ج'، 'ج د' اور 'د ا' کو 'ق'، 'ر'، 'س' پر مشتمل کرتا ہے۔ تب

اٹ = اس، ب ف = بق، چ ق = جر اور در = د س

∴ الف + بت + جر + در = اس + بق + جق + دس

یعنی $اب + ج + د = ب + ج + د$ اور

یعنی ا + ج = ب + د

اسے ن = آ + ج = ب + س = آ + ج = ب + س

ن - ا = ج ' ن - ب = د ' ن - ج = ا اور ن - د = ب

اس لئے مضابطہ دفعہ آخر سے اس صورت میں ہوگا

قد = ا ب ج د - ا ب ج د جم عہ = ا ب ج د جب عہ

یعنی رقبہ مطلوبہ = مرا ا ب ج د جب عہ

اگر علاوہ اس کے ذواربعۃ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بن سکے تو

۲ عہ = ۹۰ یعنی جب عہ = جب ۹۰ = ۱

اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ ایک ایسی ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ جس کے

اندر ایک دائرہ اور باہر ایک دائرہ بن سکے = مرا ا ب ج د

امثلہ نمبری ۳۸

۱ - ایک ذواربعۃ الاضلاع کے اندر ایک ایسا دائرہ بن سکتا ہے جو

اضلاع کو مس کرے، اگر اس کے اضلاع مفصلہ ذیل ہوں تو ہر ایک

صورت میں اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۱) ۳، ۵، ۷، اور ۹ فٹ

(۲) ۷، ۱۰، ۵، اور ۲ فٹ

۲ - ایک ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب ۳، ۴، ۵، ۶

فٹ ہیں اور اس کے دو مقابل کے زاویوں کا مجموعہ ۱۲۰° ہے ثابت

کرو کہ ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ ۳ ماہم مربع فٹ ہے

۳ - ایک ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع ۳، ۴، ۴، اور ۴ اور

۴ فٹ ہیں اور اس کے گرد ایک دائرہ بن سکتا ہے، اس کے اندر

اور بیرونی دائروں کے نصف قطر دریافت کرو۔

- ۴- ثابت کرو کہ کسی ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ اس کے دو قطروں اور اُن کے درمیانی زاویہ کی جیب کے نصف حاصل ضرب کے برابر ہے
- ۵- ایک ذواربعۃ الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بن سکتی ہے نیزہ ایک اور دائرہ کے گرد بھی بن سکتی ہے، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ $\frac{1}{2}ab \sin C$ ہے اور آخر الذکر دائرہ کا قطر $\frac{1}{2}(a+b+c)$ ہے۔
- ۶- ایک ذواربعۃ الاضلاع $ab \sin C$ ایک دائرہ کے گرد بنائی گئی ہے ثابت کرو کہ

$$ab \sin C = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \sin C$$

- ۷- ایک ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب a, b, c, d ہیں اور قطروں کا درمیانی زاویہ جو ضلع b یا d کے مقابل ہے وہ E ہے ثابت کرو کہ ذواربعۃ الاضلاع کا رقبہ $\frac{1}{2}(ab \sin E + cd \sin E)$ مس ہے۔
- ۸- ایک ذواربعۃ الاضلاع کے قطر a اور b ہیں اور اس کے اضلاع a, b, c, d اور E ہیں، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ

$$\frac{1}{2}ab \sin E + \frac{1}{2}cd \sin E$$

- ۹- اگر کسی ذواربعۃ الاضلاع کے گرد ایک دائرہ بن سکے تو ثابت کرو کہ اس کے قطروں کا درمیانی زاویہ

$$ab \sin A + cd \sin C$$

اگر اس ذواربعۃ الاضلاع کے اندر ایک ایسا دائرہ کھین سکے جو اس کے اضلاع

کو مس کرے تو ثابت کر دو کہ زاویہ مذکورہ جم $1 = \text{اُج} - \text{ب} \text{ د}$ ہوگا
 $\text{اُج} + \text{ب} \text{ د}$

۱۰۔ اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع کو بالترتیب نسبت م : ن میں تقسیم کیا جائے اور نقاط فضل کو وصل کرنے سے ایک نئی ذواربعۃ الاضلاع بنائی جائے تو ثابت کر دو کہ اس کے رقبہ کی نسبت اصلی ذواربعۃ الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ $م^2 + ن^2 : (م + ن)^2$ ہوگی

۱۱۔ اگر ذواربعۃ الاضلاع ا ب ج د کے گرد ایک دائرہ بن سکے تو ثابت کر دو کہ $\text{مس} \frac{\text{ب}}{۲} = \frac{1}{۲} \left[(ن - \text{ا})(ن - \text{د}) - (ن - \text{ب})(ن - \text{ج}) \right]$

اور جن دو حصوں میں ایک قطر دوسرے قطر کو تقسیم کرتا ہے اُنکا حاصل ضرب $\text{ا ب ج د} (\text{ا ج} + \text{ب د})$ ہے
 $(\text{ا د} + \text{ب ج}) (\text{ا ج} + \text{ب د})$

۱۲۔ اگر ایک ذواربعۃ الاضلاع کے اضلاع بالترتیب $\text{ا}، \text{ب}، \text{ج}، \text{د}$ ہوں تو ثابت کر دو کہ

$\text{د}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 - ۲ \text{ا ب ج ع}$ - ۲ب ج ح - ۲ج د ح - ۲د ا ح جہاں ع، ہ، جہ اضلاع $\text{ا}، \text{ب}، \text{ج}$ اور $\text{ب}، \text{ج}، \text{د}$ کے درمیانی زاویوں کو تعبیر کرتے ہیں

۲۲۹۔ منتظم کثیر الاضلاع - منتظم کثیر الاضلاع ایک ایسی کثیر الاضلاع ہے جس کے سب اضلاع برابر ہوں اور سب زاوے برابر ہوں -

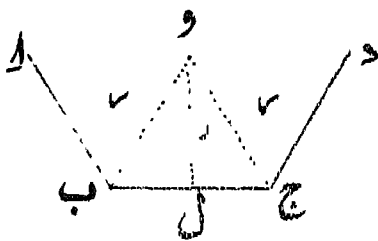
اگر ایک کثیر الاضلاع کے ن زاوے ہوں تو

بموجب اقلیدس م ۱۳۲، نتیجہ صریح
اس کے ایک زاوے کا n گنا $+ ۲$ قائے
= ان قائموں کی تعداد کے جو شکل کی تعداد اضلاع کے دو چہند
ہوں $= ۲n$ قائے

اس لئے ہر ایک زاویہ $= \frac{۲n - ۲}{n}$ قائے

$$= \frac{۲n - ۲}{n} \times \frac{\pi}{۲} = \text{نیم قطری زاوے}$$

نوٹ۔ شکل مستقیم الاضلاع کو کسی دائرہ کے اندر بنی ہوئی کہتے ہیں جب اسکے
سب زاوے دائرہ کے محیط پر واقع ہوں۔ کسی دائرہ کو کسی شکل مستقیم الاضلاع
کے گرد بنا ہوا اس وقت کہتے ہیں جب اس دائرہ کا محیط اس شکل کے
سب زادیوں کے نقاط میں سے ہو کر گزرے، اس دائرہ کو شکل کا بیرونی
دائرہ بھی کہتے ہیں۔ کسی دائرہ کو کسی شکل مستقیم الاضلاع کے اندر بنا ہوا
کہتے ہیں جب شکل کا ہر ایک ضلع دائرہ کے محیط کو مس کرے، اس کو
ہم شکل کا اندرونی دائرہ بھی کہیں گے، کسی شکل مستقیم الاضلاع کو دائرہ
کے گرد بنی ہوئی اس وقت کہتے ہیں جب شکل کا ہر ایک ضلع دائرہ کا ہوا ہو۔
۲۳۰۔ ایک نظم کثیر الاضلاع کے اندرونی اور بیرونی دائروں
کے نصف قطر دریافت کرو۔



فرض کرو کہ ا ب، ب ج،
ج د ایک کثیر الاضلاع کے
تین متصل اضلاع ہیں، اور

تعداد اضلاع n ہے، زاویوں ا ب ج اور ب ج د کی تصنیف

خطوط ب و ادر ج و سے کرو اور فرض کرو کہ یہ خطوط نقطہ و پر ملتے ہیں، ضلع ب ج پر عمود ول نکالو، ظاہر ہے کہ نقطہ و کثیر الاضلاع کے اندرونی اور بیرونی دائروں کا مرکز ہے اور ب ل = ج

اس لئے و ب = و ج = س یعنی بیرونی دائرہ کا نصف قطر اور ول = ر یعنی اندرونی دائرہ کا نصف قطر

زاویہ ب و ج اُن تمام زاویوں کے مجموعہ کا $\frac{1}{n}$ واں حصہ ہے جو اضلاع کے محاذی نقطہ و پر بنتے ہیں۔

یعنی $\angle ب و ج = \frac{2\pi}{n}$ قائلے $\frac{2\pi}{n}$ نیم قطری زاوے

اس لئے $\angle ب و ل = \frac{\pi}{n}$ $\angle ب و ج = \frac{2\pi}{n}$

اگر کثیر الاضلاع کے ضلع کو l سے تعبیر کریں تو

$l = ب ج = ۲ ب ل = ۲$ مر جب ب و ل = ۲ مر جب $\frac{2\pi}{n}$

• $س = l = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$ قلم $\frac{2\pi}{n}$ (۱)

نیز $l = ۲ ب ل = ۲$ ول س ب و ل = ۲ رس $\frac{2\pi}{n}$

• $ر = l = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$ مم $\frac{2\pi}{n}$ (۲)

۳۳۱- منتظم کثیر الاضلاع کا رقبہ

کثیر الاضلاع کا رقبہ مثلث ب و ج کے رقبہ کا n گنا ہے

اس لئے کثیر الاضلاع کا رقبہ

$$= \frac{1}{2} \times \text{دل} \times \text{ب ج} = \text{ن} \times \text{ول} \times \text{بل}$$

$$= \text{ن} \times \text{بل} \times \text{م ل} \times \text{وب} \times \text{بل}$$

$$= \text{ن} \times \frac{1}{2} \times \text{م ل} \times \text{ن} \dots \dots \dots (۱)$$

جس سے اضلاع کی رقوم میں کثیر الاضلاع کا رقبہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{نیز رقبہ} = \text{ن} \times \text{ول} \times \text{بل} = \text{ن} \times \text{ول} \times \text{ول} \times \text{س ب} \times \text{ول}$$

$$= \text{ن} \times \text{س ب} \times \text{ن} \dots \dots \dots (۲)$$

نیز رقبہ

$$= \text{ن} \times \text{ول} \times \text{بل} = \text{ن} \times \text{وب} \times \text{ج ل} \times \text{وب} \times \text{ب ل} \times \text{وب}$$

$$= \text{ن} \times \text{س ب} \times \text{ن} \times \text{ج ب} = \frac{1}{2} \times \text{ن} \times \text{س ب} \times \text{ن} \dots \dots \dots (۳)$$

ضوابط (۲) اور (۳) سے کثیر الاضلاع کا رقبہ اندرونی اور بیرونی

دائروں کے نصف قطروں کی رقوم میں معلوم ہوتا ہے

۲۳۲ - مثال - ایک منظم معشر کے ضلع کا طول ۲۰ فٹ ہے

دریافت کرو (۱) اُس کے اندرونی دائرہ کا نصف قطر (۲) اس کے بیرونی

دائرہ کا نصف قطر (۳) اس کا رقبہ

کثیر الاضلاع کے مرکز پر ایک ضلع کے محاذی زاویہ $= \frac{360}{13} = 27.69^\circ$

اس لئے ۱۰ = ر = ۱۵ = س جب ۱۵

$$= 10 = 10 \times 15 = 150 \dots \dots \dots (دفعہ ۱۰۷)$$

$$= 10 = (15 + 15) = 30 \dots \dots \dots 32 \text{ فٹ}$$

$$\text{نیز} \quad \frac{10}{95} = \frac{10}{95} \times 10 = \frac{100}{95} = \frac{20}{19} \quad (\text{دفعہ ۱۱۲})$$

$$10 = (1 + 37) \times 10 = (37 + 1) \times 10 = 380$$

$$10 = (154122 + 254495 + \dots) = 384432 \text{ فٹ}$$

$$\text{نیز} \quad \text{رقبہ} = 10 \times 12 = 120 \text{ مربع فٹ}$$

$$1200 = (37 + 2) \times 100 = 3900 \text{ مربع فٹ}$$

۳۹ مثلہ نمبری

۱۔ ایک معشر منتظم ایک ایسے دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے جس کا نصف قطر ۱۸ فٹ ہے، اس کے مجموعہ اضلاع کو ۱۰۱ اینچ تک صحیح طور پر دریافت کرو۔

$$[532292 = 18 \text{ مس}]$$

۲۔ ایک ۱۲ اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے جس کا نصف قطر ۱۸ فٹ ہے اس کے ایک ضلع کا طول ۳ مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو۔

۳۔ اشکال ذیل کا رقبہ دریافت کرو (۱) مخمس (۲) مسدس (۳) مثنی

(۴) معشر (۵) اثنا عشری، ان میں سے ہر ایک شکل منتظم ہے اور ہر ایک کا ضلع ۱ فٹ ہے۔

$$[15346438 = 18 \text{ مس}، 3506648 = 18 \text{ مس}]$$

۴۔ ایک مثنی منتظم اور مسدس منتظم کے رقبوں کا تفاوت معلوم کرو ہر ایک شکل کا مجموعہ اضلاع ۲۴ فٹ ہے۔

۵۔ ایک مربع کا ضلع ۲ فٹ ہے، اس کے کونوں کو کاٹ کر ایک

منتظم مثنیٰ بنائی گئی ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۶- ایک دئے ہوئے دائرہ کے اندر اور باہر دو مثنیٰ شکلیں بنائی گئی ہیں، ان کے اضلاع کے مجموعوں اور ان کے رقبوں کا مقابلہ کرو اور ثابت کرو کہ دائرہ کے اندر بنی ہوئی سدس اور مثنیٰ شکلوں کے رقبوں کی باہمی نسبت $۲۷:۳۲$ ہے۔

۷- ثابت کرو کہ ایک ایسے دائرہ کا نصف قطر جو ایک منتظم محسن کے گرد بن سکتا ہے محسن کے ایک ضلع کا $\frac{۱}{۲}$ ہے۔

۸- اگر ایک مثلث متساوی الاضلاع اور منتظم سدس کے اضلاع کے مجموعے برابر ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت $۲:۳$ ہے۔

۹- اگر ایک منتظم محسن اور ایک منتظم سدس کے اضلاع کے مجموعے مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے رقبوں کی باہمی نسبت $۲:۵$ ہے۔

۱۰- ثابت کرو کہ ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کے اندرونی اور بیرونی دائروں کے نصف قطروں کا مجموعہ $\frac{۱}{۲}$ کم $\frac{۱}{۲}$ ہے جہاں کثیر الاضلاع کے ایک ضلع کو تعبیر کرتا ہے،

۱۱- ن اضلاع کی دو منتظم اشکال کثیر الاضلاع ہیں، ان میں سے ایک تو ایک دئے ہوئے دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے اور دوسری دائرہ کے اندر ثابت کرو کہ بیرونی کثیر الاضلاع کے مجموعہ اضلاع اور دائرہ کے محیط اور اندرونی کثیر الاضلاع کے مجموعہ اضلاع کی باہمی نسبتیں

قط $\frac{۱}{۲} : \frac{۱}{۲}$ کم $\frac{۱}{۲} : \frac{۱}{۲}$: اسی اور اشکال کے رقبوں کی باہمی نسبت

کم $\frac{۱}{۲} : ۱$ ہے۔

۱۲- ایک ن اضلاع کی کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے، اگر اس کے رقبے کی نسبت ایک ۲ ن اضلاع کی کثیر الاضلاع کے رقبہ کے ساتھ جو اسی دائرہ کے گرد بنائی جائے ۳: ۲ ہو تو ن کی قیمت دریافت کرو۔

۱۳- ثابت کرو کہ ۲ ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کا رقبہ جو ایک دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہو اُن ن اضلاع کی منتظم اشکال کثیر الاضلاع کے رقبوں کا وسط تناسب ہے جو بالترتیب دائرہ کے اندر اور گرد بنی ہوئی ہوں۔

۱۴- ن اضلاع کی دو منتظم اشکال کثیر الاضلاع میں سے ایک دائرہ کے اندر اور دوسری دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے اُن کے رقبوں کی باہمی نسبت ۳: ۴ ہے، ن کی قیمت دریافت کرو

۱۵- ایک کثیر الاضلاع کے اندر دنی زاوے سلسلہ حساب میں ہیں، سب سے چھوٹا زاویہ ۱۲۰ ہے اور فرق مشترک ۵ ہے، اضلاع کی تعداد دریافت کرو۔

۱۶- دو منتظم اشکال کثیر الاضلاع میں سے ایک کی تعداد اضلاع دوسری کی تعداد اضلاع کی دو چند ہے، اور ایک کے زاوے کو دوسری کے زاوے کے ساتھ نسبت ۹: ۸ ہے، ہر ایک کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع دریافت کرو۔

۱۷- ثابت کرو کہ منتظم اشکال کثیر الاضلاع کے کل ۱۱ زوج ایسے ہو سکتے ہیں کہ ہر ایک زوج میں ایک کثیر الاضلاع کے زاوے کے درجوں کی تعداد کو دوسری کثیر الاضلاع کے زاویہ کی درجوں کی تعداد

کے ساتھ نسبت ۱۰ اور ۹ کی ہو، ہر ایک کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع دریافت کرو۔

۱۸۔ ایک مربع مینار کے قاعدہ کا ضلع ۱ فٹ ہے اور اس کے راس کی عمودی بلندی قاعدہ کے مرکز سے ۲ فٹ ہے، اگر مینار کے کسی رخ کا میلان قاعدہ کے ساتھ طہ ہو اور دو رخنوں کا میلان آپس میں فہ ہو تو ثابت کر دو کہ

$$\text{مس طہ} = \frac{۲}{۱} \text{ اور مس فہ} = \frac{۱}{۲} + ۱$$

۱۹۔ ایک مینار کا قاعدہ منظم سدس کی شکل کا ہے، اگر مینار کے راس سے قاعدہ پر عمود لگایا جائے تو وہ سدس کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کا طول قاعدہ کے ایک ضلع کے برابر ہے، قاعدہ اور مینار کے کسی رخ کے درمیان جو زاویہ بنے اس کا مماس دریافت کرو۔ نیز دو بیرونی رخنوں کے درمیانی زاویہ کے نصف کا مماس معلوم کرو۔

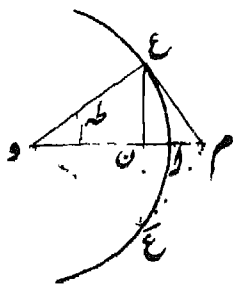
۲۰۔ ایک منظم مضلع مخروط کا قاعدہ ایک ن اضلاع کی کثیر الاضلاع ہے جس کا ہر ایک ضلع ۱ ہے، نیز مخروط کے ہر ایک ترچھے ضلع کا طول ۱ ہے، ثابت کر دو کہ مخروط کے دو متصل بیرونی رخنوں کا درمیانی زاویہ

$$\frac{۲}{۳} \pi - \frac{۲}{۳} \pi + \frac{۲}{۳} \pi$$

باب ہفتم

صغیر زاویوں کی مثلثی نسبتیں۔ دائرہ کا رقبہ۔ اُفق کا میلان

۲۳۳۔ ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے، اُس میں نیم قطر کی زاویوں کی تعداد طہ ہے، ثابِت کرو کہ جب طہ، طہ، ماس طہ بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب میں ہیں۔



فرض کرو کہ م و ع کوئی زاویہ ہے جو زاویہ قائمہ سے کم ہے، مرکز و اور کسی نصف قطر و ع پر دائرہ

کی قوس ع و ع کھینچو جو و م کو نقطہ ا پر ملے۔
و ا پر عمود ع ن کھینچو اور اس کو اسقدر خارج کرو کہ وہ قوس دائرہ کو ع پر ملے، نقطہ ع پر ماس ع م کھینچو

اور فرض کرو کہ وہ وا کو نقطہ م پر ملتا ہے، م ع کو ملاؤ۔
 مثلث ع و ن اور ع و ن آپس میں ہر طرح سے برابر ہیں
 اس لئے $ع ن = ن ع$ اور قوس $ع ۱ = ۱ ع$ قوس ۱ ع
 نیز مثلث م و ع اور م و ع ہر طرح سے برابر ہیں
 اس لئے $م ع = ع م$
 خط مستقیم ع ع طول میں قوس ع ۱ ع سے کم ہے
 یعنی $ن ع > قوس ع ۱$
 نیز ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ قوس ع ۱ ع
 طول میں ع م اور م ع کے مجموعہ سے کم ہے یعنی
 قوس $ع ۱ > ع م$
 پس معلوم ہوا کہ $ن ع$ ، قوس $۱ ع$ اور $م ع$ میں
 بلحاظ مقدار کے صعودی ترتیب ہے۔

اسلئے $ن ع$ ، قوس $۱ ع$ اور $ع م$ میں بلحاظ مقدار
 کے صعودی ترتیب ہے

لیکن $ن ع = جب ۱ و ع = جب ط$
 قوس $۱ ع = ۱ و ع$ میں نیمقطری زاویوں کی
 تعداد کے

$= ط (وقفہ ۲۳)$

اور $\frac{ع م}{و ع} = م ع و م = م س ۱ و ع = م س ط$

لہذا ثابت ہوا کہ جب ط > ط اور مس ط میں بلحاظ مقدار کے ترتیب صعودی ہے بشرطیکہ ط > $\frac{II}{p}$
 ۲۳۴۔ چونکہ جب ط > ط > مس ط اس لئے
 اگر ان میں سے ہر ایک کو مثبت مقدار جب ط پر تقسیم
 کر دیا جائے تو

۱ > جب ط > ۱ > جم ط
 اسلئے جب ط ہمیشہ ۱ اور $\frac{1}{جم ط}$ کے درمیان واقع
 ہوتی ہے اور یہ نتیجہ درست ہے خواہ زاویہ ط کتنا ہی
 چھوٹا کیوں نہ ہو۔

لیکن جب زاویہ ط بہت چھوٹا ہو تو جم ط تقریباً ایک
 کے برابر ہوتی ہے اور جتنا چھوٹا ط ہوتا جائے گا اتنا ہی
 ایک کے زیادہ قریب جم ط آتی جائے گی یعنی اتنا ہی
 ایک کے زیادہ قریب $\frac{1}{جم ط}$ کی قیمت ہوگی۔

اسلئے جب زاویہ نہایت ہی قلیل ہوگا تو
 مقدار جب ط عدد ایک اور ایک ایسی مقدار کے درمیان
 واقع ہوگی جس کا تفاوت عدد ایک سے ایک لانتہا قلیل
 مقدار کے برابر ہوگا

دوسرے الفاظ میں جب زاویہ ط لانتہا چھوٹا
 ہوگا تو مقدار جب ط اور اسلئے جب ط آخر الامر ایک
 کے برابر ہوگی یعنی جتنا چھوٹا ایک زاویہ ہوتا جائے گا
 اتنا ہی اس کی جیب ان نیم قطری زاویوں کی تعداد کے

۲۳۷ — اگر کوئی زاویہ قائمہ سے کم ہو اور اس میں نیم قطری زاویوں کی تعداد طہ ہو تو ثابت کرو کہ جب طہ < طہ — $\frac{طہ}{۲}$ اور جم طہ < ۱ — $\frac{طہ}{۲}$

یہودیہ و نفعہ ۲۲۲۲

مس $\frac{ط}{۲}$ < $\frac{ط}{۲}$ جب $\frac{ط}{۲}$ < $\frac{ط}{۲}$ جم $\frac{ط}{۲}$
 اور چونکہ جب $\frac{ط}{۲} = ۲$ جب $\frac{ط}{۲}$ جم $\frac{ط}{۲}$
 اسلئے جب $\frac{ط}{۲}$ < $\frac{ط}{۲}$ جم $\frac{ط}{۲}$ یعنی $\frac{ط}{۲}$ < $\frac{ط}{۲}$ (۱- جب $\frac{ط}{۲}$)
 لیکن چونکہ بموجب وقعہ ۳۳۳ جب $\frac{ط}{۲}$ > $\frac{ط}{۲}$
 اسلئے ۱- جب $\frac{ط}{۲}$ < $\frac{ط}{۲}$ (۱- $\frac{ط}{۲}$) یعنی $\frac{ط}{۲}$ < $\frac{ط}{۲}$ ۱- $\frac{ط}{۲}$
 ∴ جب $\frac{ط}{۲}$ < $\frac{ط}{۲}$ (۱- $\frac{ط}{۲}$) یعنی $\frac{ط}{۲}$ < $\frac{ط}{۲}$ - $\frac{ط}{۲}$
 نیز جم $\frac{ط}{۲} = ۱- ۲$ جب $\frac{ط}{۲}$

اور چونکہ جب $\frac{1}{y} > (\frac{1}{x})^2$

اسے ۱-۲ جب $\frac{p}{2} < 1-2 \left(\frac{p}{2}\right)^2$ یعنی $1 - \frac{p}{4}$ علم مثلث کے حصہ دوم میں یہ ثابت کیا جائے گا کہ

جب $\frac{r_b}{r} < 1$ اور $\frac{r_b}{r} + 1 > 1$

۲۳۸۔ مثال ۱۔ جب ۱۰ اور ۱۰ کی قیمتیں دریافت کرو

برابر ہوتی جائے گی جو زاویہ مجوزہ میں شامل ہیں اختصاراً
اس کو یوں بیان کرتے ہیں۔

جب $\theta = \theta$ اگر زاویہ θ بہت چھوٹا ہو
اسی طرح سے $\sin \theta = \theta$ اگر زاویہ θ بہت چھوٹا ہو
نتیجہ صریح فرض کرو کہ $\theta = \frac{\pi}{180}$ تو اس سے
یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب زاویہ θ لا انتہا چھوٹا ہو تو
ن لا انتہا بڑا ہوتا ہے۔

اس لئے جب $\frac{\pi}{180}$ ایک کے برابر ہے اگر ن
لا انتہا بڑا ہو

پس ن جب $\frac{\pi}{180} = \theta$ اگر ن لا انتہا بڑا ہو
اسی طرح سے $\sin \theta = \frac{\pi}{180}$ اگر ن لا انتہا بڑا ہو
۲۳۵۔ دفعہ گذشتہ میں یہ خاص طور پر یاد رکھنا چاہئے
کہ زاویہ مجوزہ میں θ نیم قطری زاویوں کی تعداد کو
تعبیر کرتا ہے۔

جب θ کی قیمت اگر θ نہایت ہی چھوٹا ہو اس طرح
معلوم ہو سکتی ہے

$$\frac{\pi}{180} = \theta$$

$$\theta = \left(\frac{\pi}{180} \right) \text{ نق}$$

∴ جب $\theta = \left(\frac{\pi}{180} \right) \text{ نق}$ ہو جب نتیجہ
دفعہ آخر۔

۴۔ جم ۱۵ ۵۔ قم ۸ ۶۔ قط ۵

معدلات ذیل کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو

۷۔ جب طہ = ۵۰۱ ۸۔ جب طہ = ۵۴۸

۹۔ جم (طہ + $\frac{1}{10}$) = ۵۴۹ ۱۰۔ جب طہ = ۵۹۹

۱۱۔ ایک پیسے کا قطر ایک انچ ہے، یہ معلوم کرو کہ آنکھ سے کتنے فاصلہ پر چاند کے سامنے اس کو رکھا جائے کہ چاند دکھائی دے، چاند کے قطر کے محاذی جو زاویہ دیکھنے والے کی آنکھ پر

بنتا ہے وہ ۳۰ ہے۔

۱۲۔ ایک شخص خط مستقیم پر ایک دور کی شے کی سیدھ میں جاتا ہے اور دیکھتا ہے کہ تین نقاط (کب، کج، کد) پر اسکی چوٹی کے زوایاء الارتفاع بالترتیب ۴۰، ۳۰، ۲۰ ہیں، ثابت کرو کہ اب = ۳ بج تقریباً

۱۳۔ اگر کوئی زاویہ قائمہ سے کم ہو اور اس میں نیم قطری زاویوں کی تعداد طہ ہو تو ثابت کرو کہ جم طہ > ۱ - $\frac{طہ}{۲} + \frac{طہ}{۱۶}$

۱۴۔ اولر کا مسئلہ ثابت کرو یعنی ثابت کرو کہ

جب طہ = طہ × جم $\frac{طہ}{۲}$ × جم $\frac{طہ}{۲}$ × جم $\frac{طہ}{۲}$ تک

[جب طہ = ۲ جب طہ = ۲ جم طہ = ۲ جب طہ = ۲ جم طہ = ۲ جم طہ = ۲]

= ۲ جب طہ = ۲ جم طہ = ۲ جم طہ = ۲ جم طہ = ۲ =

= ۲ جب طہ = ۲ جم طہ = ۲ جم طہ = ۲ جم طہ = ۲ جم طہ = ۲

ن کو لاتھا بڑا فرض کرنے سے بموجب دفعہ ۲۳۴ نتیجہ صحیح

۲ جب طہ = ۲

۱۵۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{4} \text{ جم } \frac{1}{4} \text{ جم } \frac{1}{4} \text{ جم } \frac{1}{4} \text{ جم } \dots \dots \infty \text{ تک}$

(۱۔ سن $\frac{1}{4}$) (۱۔ سن $\frac{1}{4}$) (۱۔ سن $\frac{1}{4}$) $\dots \dots \infty \text{ تک}$
 $= \text{ طہ } \times \text{ مم طہ}$

۲۳۹۔ ایک دائرہ کا رقبہ

بموجب دفعہ ۲۳۱ ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کا رقبہ جو ایک ایسے دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہو جس کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ سن جب $\frac{1}{2}$ سن

اب فرض کرو کہ کثیر الاضلاع ہمیشہ منتظم رہتی ہے اور اسکی تعداد اضلاع لا انتہا بڑھتی ہے، ظاہر ہے کہ کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع دائرہ کے محیط کے قریب قریب آتا جائیگا۔ اس لئے جب کثیر الاضلاع کا مجموعہ اضلاع لا انتہا بڑھیکا تو دائرہ کا رقبہ کثیر الاضلاع کے رقبہ کے برابر ہوگا

اب $\frac{1}{2}$ سن جب $\frac{1}{2}$ سن $= \frac{1}{2}$ سن $\times \frac{1}{2}$ سن $\times \frac{1}{2}$ سن $\times \frac{1}{2}$ سن $\dots \dots \infty$ جب $\frac{1}{2}$ سن

$= \frac{1}{2}$ سن $\times \frac{1}{2}$ سن $\times \frac{1}{2}$ سن $\times \frac{1}{2}$ سن $\dots \dots \infty$ جب $\frac{1}{2}$ سن $= \frac{1}{2}$ سن

جب ن لا انتہا بڑا ہوگا تو طہ کی قیمت لا انتہا چھوٹی ہوگی اور اُس وقت بموجب دفعہ ۲۳۴ نسبت جب طہ ایک کے برابر ہوگی

اس لئے دائرہ کا رقبہ $= \pi r^2 =$ اس کے نصف قطر کے مربع کا π گنا

۲۴۰۔ قطاع دائرہ کا رقبہ

فرض کرو کہ ایک دائرہ کا مرکز O ہے اور قطاع دائرہ کی احاطہ کرنیوالی قوس AB ہے، فرض کرو کہ $\angle AOB =$ عہ نیم قطری زاویوں کے

بحکم اقلیدس m ، n ، p ، دائروں کے قطاع آپس میں وہی نسبت رکھتے ہیں جو ان کی قوسوں کو آپس میں ہے چنانچہ وہ قائم ہیں

اس لئے قطاع AOB کا رقبہ $=$ قوس AB کل دائرہ کا رقبہ $=$ محیط دائرہ

$$\frac{m}{360} = \frac{n}{360} = \frac{p}{360}$$

$$\therefore \text{قطاع } AOB \text{ کا رقبہ} = \frac{m}{360} \times \text{دائرہ کا رقبہ}$$

$$= \frac{m}{360} \times \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi r^2$$

امثلہ نمبری ۱۴

[فرض کرو کہ $\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749415957214961264307518166016314227198$ اور

لوگ $\pi = 0.497149872693134746141575197510875775528201171188824364000843996882755927406212654$

۱۔ ایک دائرہ کا محیط 4π فٹ ہے، اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۲۔ ایک دائرہ کا قطر 10 فٹ ہے، اس کے ایسے قطاع کا رقبہ

دریافت کرو جس کا زاویہ $\frac{1}{2} 22^\circ$ ہو۔

۳۔ ایک دائرہ کے قطع کا رقبہ ۱۰ مربع فٹ ہے، اگر دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو تو قطع کا زاویہ دریافت کرو

۴۔ ایک قطع دائرہ کے احاطہ کرنے والے خطوط کا کل طول ۱۰ فٹ ہے، اگر دائرہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو تو قطع کا رقبہ دریافت کرو

۵۔ ایک کاغذ کا تختہ ۲ میل لمبا اور ۰.۳۳ انچ موٹا ایک ٹھوس اسطوانہ کی شکل میں پٹا ہوا ہے، اس کے گول کناروں کے نصف قطر کی تقریبی قیمت دریافت کرو

۶۔ ایک کاغذ کا تختہ ایک میل لمبا ایک ٹھوس اسطوانہ کی شکل میں پٹا ہوا ہے، اس کے گول کناروں کا قطر ۶ انچ ہے، کاغذ کی موٹائی دریافت کرو

۷۔ دو ہم مرکز دائروں کے نصف قطر ۲ اور ۴ ہیں، اندرونی دائرہ کے دو متوازی تماس بیرونی دائرہ سے ایک قوس قطع کرتے ہیں، قوس کا طول دریافت کرو

۸۔ ایک نصف دائرہ کا محیط دو ایسی قوسوں میں تقسیم کیا گیا ہے کہ ایک کا وتر دوسرے کے وتر کا دو چندان ہے، ثابت کرو کہ جو قطعات دائرہ ان وتروں کے کھینچنے سے پیدا ہوتے ہیں ان کے رقبوں کو آپس میں نسبت ۲۷ اور ۵۵ کی ہے $\left[\frac{27}{55} = \pi \right]$

۹۔ تین مساوی دائرے ہیں، اگر ان میں سے ہر ایک باقی دو کو مس کرے اور ہر ایک کا نصف قطر ۱ ہو تو ثابت کرو کہ

ہوں گے اس دائرہ کو **افق مرئی** کہتے ہیں اور جو زاویہ ہر ایک طاس (مثلاً ω) سطح **افق** و **ق** سے بناتا ہے اس کو **افق** کا میلان کہتے ہیں فرض کرو کہ زمین کا نصف قطر r ہے اور جو زمین کا قطر نقطہ 1 میں سے گذرتا ہے اس کا دوسرا سرا 2 ہے تب بموجب اقلیدس $\angle 1 = \angle 2$

$$\omega = \angle 1 = \angle 2 = \angle (1 + 2)$$

یعنی $\omega = \angle (1 + 2)$

اس سے ω کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے مگر تمام علی صورتوں میں $\angle$ ب مقابلہ r کے بہت چھوٹا ہوتا ہے

[$r = \dots$ میل تقریباً اور $\angle$ پانچ میل سے کبھی زیادہ نہیں ہوتا اور بالعموم اس سے بہت کم ہوتا ہے] اس لئے $\angle$ ب مقابلہ r کے بہت چھوٹا ہے ω کی قیمت کا ایک اچھا تقریب یہ ہے

$$\omega = \angle 1 = \angle 2$$

$$\text{میلان} = \angle \omega = 90^\circ - \angle \omega = \angle \omega$$

$$\text{نیمس وج م} = \frac{\omega}{\text{ج م}} = \frac{\angle 1}{\angle 2} = \frac{\angle 1}{\angle 2}$$

یعنی زاویہ میلان کا ایک اچھا تقریب یہ ہوا $\angle \omega = \frac{\angle 1}{\angle 2}$ نیم قطری زاویے

$$= \left(\frac{180}{\pi} \times \frac{1}{2} \right) \left[\frac{60 \times 60 \times 180}{\pi} \right]$$

۲۴۲ — مثال — ایک روشنی گھر کی بلندی سطح سمندر سے ۲۶۴ فٹ ہے، اگر زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو تو روشنی گھر کی چوٹی سے آفتاب کا میلان اور آفتاب مرئی کا فاصلہ دریافت کرو یہاں $r = 4000$ میل اور $b = 264$ فٹ $= \frac{1}{16}$ میل

اسلئے معلوم ہوا کہ b بمقابلہ r کے بہت چھوٹا ہے

یعنی $0.016 = \frac{1}{62.5} = 4000 \times \frac{1}{62.5} = 20$ میل

تیز زاویہ میلان $= \frac{1}{62.5}$ نیم قطری زاوے $= \frac{1}{62.5}$ نیم قطری زاوے

$$\left(\frac{60 \times 180}{\pi} \times \frac{1}{62.5} \right) = \left(\frac{52}{\pi} \right) = 16.4 \text{ تقریباً}$$

امثلہ نمبری ۴۲

[اگر اسکے خلاف ذکر نہ ہو تو زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل فرض کیا جائے]

۱ — ایک پہاڑ کی بلندی ۴۲۰۰ فٹ ہے، اس کی چوٹی سے آفتاب کا میلان انگریزی درجوں، دقیقوں اور ثانیوں میں دریافت کرو زمین کا نصف قطر ۲۱ x ۶۰ فٹ ہے۔

۲ — ایک روشنی گھر کا چراغ سطح سمندر سے ۱۹۶ فٹ بلند ہے، بتاؤ کہ یہ زیادہ سے زیادہ کتنے فاصلہ سے دکھائی دے سکتا ہے۔

۳ — اگر زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہو تو ایک غبارہ کی بلندی دریافت کرو جبکہ آفتاب کا میلان ۱° ہو۔ نیز اگر غبارہ کی

بلندی ۲ میل ہو تو اقی کا میلان دریافت کرو۔

۴۔ ایک روشنی گھر کی بلندی سطح سمندر سے ۱۳۲ فٹ ہے، اس کی روشنی ایک جہاز کے مستول کی چوٹی سے جو سطح سمندر سے ۶۶ فٹ بلند ہے عین اسوقت دکھائی دینے لگی جبکہ جہاز روشنی گھر سے ایک خاص فاصلہ پر تھا ثابت کرو کہ یہ فاصلہ تقریباً ۲۴ میل ہے۔

۵۔ ایک جہاز کے مستول کی بلندی سطح سمندر سے ۶۶ فٹ ہے، اس کی چوٹی سے ایک اور جہاز کے مستول کی چوٹی عین ۲ میل کے فاصلہ سے دکھائی دینے لگی ثابت کرو کہ مستولوں کی بلندیاں برابر ہیں۔

۶۔ ایک جہاز کا مستول سطح سمندر سے ۴۴ فٹ اونچا ہے، ایک روشنی گھر کی روشنی عین اسکی چوٹی سے دکھائی دیتی ہے، اس کے بعد جہاز ۱۵ منٹ کے لئے کسی خاص سمت میں جاتا ہے اور یہی روشنی تختہ جہاز کی بلندی سے جو سطح سمندر سے ۱۱ فٹ ہے دکھائی دینے لگتی ہے ثابت کرو کہ جہاز کی رفتار تقریباً ۳۳ ۱۶۵ میل فی گھنٹہ ہے۔

۷۔ اگر کسی مشاہدہ کرنے کے مقام کی بلندی ۵ فٹ ہو تو ثابت کرو کہ وہاں کھڑے ہو کر ایک شخص کی نگاہ دور سے دور تقریباً ۳۳ میل دیکھ سکتی ہے۔

۸۔ زمین کے ایک رجب محیط میں ۱۰۰ لاکھ میٹر شامل ہیں اگر ایفل برج کی چوٹی ۳۰۰ میٹر اونچی ہو تو معلوم کرو کہ

زیادہ سے زیادہ کتے فاصلہ سے وہ نظر آسکتی ہے۔

۹۔ ایک سیدھی نہر کے کنارے ایک ایک میل کے فاصلہ پر تین عمودی کھمبے ہیں اور پانی کی سطح سے تینوں کی بلندیاں برابر ہیں، طرفین کے کھمبوں کی چوٹیوں کا خط نظری درمیانی کھمبے کو اسکی چوٹی کے ۸ انچ نیچے قطع کرتا ہے، زمین کا نصف قطر قریب ترین میل تک دریا تک دریا۔



باب ہشتم

مقلوب و مستدیر جملے

۳۴۲ — اگر جب طہ = ۱ جہاں ۱ مقدار معلومہ ہے تو ہم دفعہ ۸۸ سے جانتے ہیں کہ طہ کی ایک معین قیمت نہیں ہو سکتی، اس مساوات سے صرف یہی معلوم ہوتا ہے کہ طہ کی قیمت زاویوں کے ایک غیر متناہی سلسلہ میں سے کسی ایک زاویہ سے تعبیر ہوتی ہے۔

علامت ”جب-۱“ سے وہ چھوٹے سے چھوٹا مثبت یا منفی زاویہ تعبیر ہوتا ہے جسکی جیب ۱ ہو۔ علامت ”جب-۱“ کو اس طرح پڑھتے ہیں کہ ”جیب منفی ایک ۱“ اور اس کو بڑی احتیاط سے $\frac{1}{\text{جب } 1}$ سے تینر کرنا چاہیے، اگر ضرورت ہو تو جب ۱ کو (جب ۱) لکھنا چاہیے۔

اس لئے بخوبی یاد رہے کہ ”جب-۱“ ایک زاویہ ہے اور یہ علامت تعداداً ایک ایسے چھوٹے سے چھوٹے

زاوے کو تعبیر کرتی ہے جس کی جیب $\angle$ ہے اور $\angle$ سے بھی تعداداً وہ چھوٹے سے چھوٹا زاویہ تعبیر ہو گا جس کی جیب تمام $\angle$ ہے اور اسی طرح سے ”مس- $\angle$ “ و ”قم- $\angle$ “ و ”قم- $\angle$ “ و ”قط- $\angle$ “ و ”سم- $\angle$ “ کی تعریف ہو سکتی ہے۔

لہذا زاوے جب $\angle$ اور مس- $\angle$ (اور اسلئے قم- $\angle$ اور قم- $\angle$) ہمیشہ 90° اور 90° کے درمیان واقع ہوں گے لیکن جم- $\angle$ (اور اسلئے قط- $\angle$) ہمیشہ 0° اور 180° کے درمیان واقع ہوں گے

۴۴۲ — مقادیر جب $\angle$ ، جم- $\angle$ ، مس- $\angle$ ، کو مقلوب و مستدیر جملے کہتے ہیں علامت جب $\angle$ کو اکثر مصنفین نے ”قوس جب $\angle$ “ لکھا ہے اسی طرح سے ”جم- $\angle$ “ کو ”قوس جم $\angle$ “ لکھ سکتے ہیں اور اسی طرح باقی مقلوب نسبتیں بھی لکھی جا سکتی ہیں۔

۴۴۵ — اگر $\angle$ مثبت ہو تو زاویہ جب $\angle$ صریحاً صفر اور 90° کے درمیان واقع ہو گا۔ اور اگر $\angle$ منفی ہو تو یہ 90° اور 0° کے درمیان واقع ہو گا۔

مثال — جب $\angle = 30^\circ$ ، جب $\angle = 45^\circ$ ، جب $\angle = 90^\circ$ اگر $\angle$ مثبت ہو تو دو زاوے ایسے ہوں گے (ان میں سے ایک 0° اور 90° کے درمیان واقع ہو گا اور دوسرا 90° اور

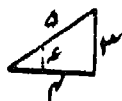
کے درمیان) جن میں سے ہر ایک کی جیب اتمام ہوگی
[مثلاً ۳۰° اور ۳۰° دو نوٹکی جیب اتمام $\frac{1}{2}$ ہیں]

اس صورت میں ہم چھوٹے سے چھوٹا زاویہ
لینگے، پس اگر مثبت ہو تو زاویہ جم اور بھی ۰° اور ۹۰°
کے درمیان واقع ہوگا

اسی طرح سے اگر منفی ہو تو جم اور زاویہ ۹۰° اور ۱۸۰° کے
درمیان واقع ہوگا۔

مثال جم $\frac{1}{2}$ = ۳۰°، جم $(-\frac{1}{2})$ = ۱۲۰°
اگر مثبت ہو تو مس اور ہمیشہ ۰° اور ۹۰° کے درمیان واقع
ہوگا اور اگر منفی ہو تو یہ ۹۰° اور ۰° کے درمیان واقع
ہوگا

مثال مس $\frac{1}{2}$ = ۳۰°، مس (-1) = ۲۵°
۲۴۶ — مثال — ثابت کرو کہ جب $\frac{1}{2}$ = جم $\frac{1}{2}$ = جب $\frac{1}{2}$ = جب $\frac{1}{2}$
فرض کرو کہ جب $\frac{1}{2}$ = عہ یعنی جب عہ = $\frac{1}{2}$



اور اس لئے جم عہ = $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

فرض کرو کہ جم $\frac{1}{2}$ = بہ یعنی جم بہ = $\frac{1}{2}$



اور اس لئے جب بہ = $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

فرض کرو کہ جب $\frac{1}{2}$ = جب یعنی جب جب = $\frac{1}{2}$

ہیں ثابت کرنا ہے کہ عہ - بہ = جب

یعنی ثابت کرنا ہے کہ جب (عہ - بہ) = جب جب

اب جب (عہ - بہ) = جب عہ جم بہ - جم عہ جب بہ

$$\text{جب } \frac{14}{40} = \frac{20-34}{40} = \frac{5}{13} \times \frac{5}{8} - \frac{12}{13} \times \frac{5}{8} =$$

اس کے ربط ثابت ہوا

مثال ۲ — ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$

فرض کرو کہ $\frac{1}{m} = e$ یعنی $m = \frac{1}{e}$

اور فرض کرو کہ مس $\frac{1}{4} =$ بہ یعنی مس بہ $= \frac{1}{4}$

ہیں ثابت کرنا ہے کہ $\frac{P}{P} = 2 + \frac{1}{P}$

اب مس ۲ مع = ۱ - مس مع = ۱ - ۴ = ۳
نیز مس (۲ مع + چ) = ۱ - مس ۲ مع مس به

$$\frac{\pi}{r} \cup = 1 = \frac{r_0}{r_0} = \frac{r+r_1}{r-r_1} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{r_1}{r}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \times \frac{r}{r} - 1} =$$

$$\frac{\pi}{r} = r + r_1 \div$$

مثال ۳ — ثابت کرو کہ $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20} + \frac{1}{252} - \frac{1}{2520} + \dots$

فرض کر کہ مس^ا $\frac{1}{5}$ = ع^ی یعنی مس^ع $\frac{1}{5}$

$$\frac{5}{12} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{25} - 1} = \frac{2 \text{ بس } 5}{1 - 5} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{120}{119} = \frac{\frac{10}{11}}{\frac{20}{119}} = 1.1$$

یعنی مس م تقریباً ایک کے برابر ہے اور اس لئے م م

تقریباً $\frac{\pi}{4}$ ہے

فرض کرو کہ $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$ مستالا

$$\therefore \frac{12}{11} = \text{مس} \left(\frac{1}{\text{مس}} + \frac{1}{\frac{1}{\text{مس}} - 1} \right) = \text{مس} \left(\frac{1}{\text{مس}} + 1 \right) \quad (\text{دفعه } 104)$$

$$\frac{1}{239} = \text{لا}$$

$$\frac{11}{17} = \frac{1}{239} \text{ مس}^+ - \frac{1}{5} \text{ مس}^+ - \frac{1}{5} \text{ مس}^+ = \frac{1}{239}$$

مثال ۴ - ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^+ + \text{مس}^+ \text{ اب} = \text{مس}^+ + \text{اب}$$

فرض کرو کہ $\text{مس}^+ + \text{ع} = \text{ع}$ یعنی $\text{مس}^+ = \text{ع}$

فرض کرو کہ $\text{مس}^+ \text{ اب} = \text{ب}$ یعنی $\text{مس}^+ = \text{ب}$

نیز فرض کرو کہ $\text{مس}^+ (\text{اب} + \text{ب}) = \text{ع}$ یعنی $\text{مس}^+ = \text{ع}$

بہیں ثابت کرنا ہے کہ $\text{ع} + \text{ب} = \text{ع}$

$$\text{اب} (\text{مس}^+ + \text{ع}) = \text{مس}^+ + \text{ع} + \text{مس}^+ = \text{مس}^+ + \text{ع} = \text{مس}^+ + \text{ب}$$

یعنی ربط ثابت ہوا

تعلق مندرجہ بالا میں صرف ضابطہ $\text{مس}^+ (\text{لا} + \text{ما}) = \text{مس}^+ + \text{ما}$ کو

مطلوب طریق کتابت کے موافق بیان کیا گیا ہے۔

کیونکہ فرض کرو کہ $\text{مس}^+ = \text{لا}$ یعنی $\text{لا} = \text{مس}^+$

اور $\text{مس}^+ = \text{ب}$ یعنی $\text{ما} = \text{مس}^+ \text{ اب}$

$$\text{تب} \text{ مس}^+ (\text{لا} + \text{ما}) = \text{مس}^+ + \text{ما}$$

$$\text{یعنی} \text{ مس}^+ + \text{مس}^+ \text{ اب} = \text{مس}^+ + \text{اب}$$

مندرجہ بالا میں ہم نے فرض کر لیا ہے کہ $\text{اب} > \text{اب}$ یعنی $\frac{\text{اب} + \text{ب}}{\text{اب}}$ مثبت ہے

اور اسلئے $\text{مس}^+ + \text{اب} > \text{اب}$ زدایا ۰ اور ۰ کے درمیان واقع ہے

لیکن اگر $\text{اب} < \text{اب}$ اتو $\frac{\text{اب} + \text{ب}}{\text{اب}}$ اور اسلئے بموجب ہماری

تعریف کے مس^۱ + ۱ = اب^۱ ایک منفی زاویہ ہے اسلئے یہاں
 جہ منفی زاویہ ہے اور چونکہ مس (جہ + ۱) = مس جہ اسلئے
 ضابطہ مطلوبہ یہ ہونا چاہیئے

$$\text{مس}^۱ + ۱ = \text{مس}^۱ + ۱ = \text{اب}^۱$$

مثال ۵ — ثابت کرو کہ جم^۱ = $\frac{۶۳}{۴۵}$ + مس^۱ = $\frac{۱}{۵}$ جب^۱ = $\frac{۳}{۵}$

$$\text{چونکہ } ۲۶۵ - ۲۶۳ = ۲$$

$$\begin{array}{r} ۲۵ \\ ۶۳ \end{array} \overline{) ۱۲}$$

$$\text{اسلئے جم}^۱ = \frac{۶۳}{۴۵} = \text{مس}^۱ + \frac{۱۶}{۴۵}$$

نیز بموجب مثال ۱ کہ جب^۱ = $\frac{۳}{۵}$ = مس^۱ + $\frac{۲}{۵}$
 اسلئے ہمیں ثابت کرنا ہے کہ

$$\text{مس}^۱ + \frac{۱۶}{۴۵} = \text{مس}^۱ + \frac{۱}{۵} = \text{مس}^۱ + \frac{۳}{۱۵}$$

$$\text{اب } \frac{[\text{مس}^۱ + \frac{۱}{۵}]}{[\text{مس}^۱ + \frac{۳}{۱۵}]} = \frac{[\text{مس}^۱ + \frac{۱۶}{۴۵}]}{[\text{مس}^۱ + \frac{۳}{۱۵}]}$$

$$\frac{۵}{۱۲} = \frac{\frac{۲}{۵}}{\frac{۱}{۲۵} - ۱} =$$

$$\text{یعنی } \text{مس}^۱ + \frac{۱}{۵} = \text{مس}^۱ + \frac{۳}{۱۵}$$

$$\text{پس مس } [\text{مس}^۱ + \frac{۱۶}{۴۵}] = [\text{مس}^۱ + \frac{۱}{۵}] + [\text{مس}^۱ + \frac{۱۶}{۴۵} - \text{مس}^۱]$$

$$\frac{۳}{۱۲} = \frac{۵۰۶}{۶۴۹} = \frac{۳۱۵ + ۱۹۲}{۸۰ - ۶۵۶} = \frac{۵}{۱۲} + \frac{۱۶}{۴۵} =$$

$$\text{یعنی } \text{مس}^۱ + \frac{۱۶}{۴۵} = \text{مس}^۱ + \frac{۱}{۵} = \text{مس}^۱ + \frac{۳}{۱۵}$$

مثال ۶ — مساوات ذیل کو حل کرو

$$مس \frac{1+\lambda}{1-\lambda} + مس \frac{1-\lambda}{1-\lambda} = مس (-) \quad (۷-)$$

طرفین مساوات کے ماس لینے سے

$$\frac{مس [مس \frac{1+\lambda}{1-\lambda}] + مس [مس \frac{1-\lambda}{1-\lambda}]}{مس [مس \frac{1+\lambda}{1-\lambda}] + مس [مس \frac{1-\lambda}{1-\lambda}]}$$

$$= مس \{ مس (-) \} = -$$

$$- = \frac{\frac{1-\lambda}{1-\lambda} + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}}{\frac{1-\lambda}{1-\lambda} \times \frac{1+\lambda}{1-\lambda} - 1} \quad \text{یعنی}$$

$$\text{یعنی } 2 = \frac{1-\lambda}{1-\lambda} + \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \quad \text{یعنی } 2 = 2$$

اگر اس قیمت کو مساوات میں منبج کریں تو اسکے دائیں طرف کا کرن مثبت ہوتا ہے، اس سے معلوم ہوا کہ درحقیقت لاکہ کوئی ایسی قیمت نہیں جو شرائط مساوات کو پورا کرے قیمت $2 = \lambda$ مساوات ذیل کو پورا کرتی ہے

$$مس \frac{1+\lambda}{1-\lambda} + مس \frac{1-\lambda}{1-\lambda} = مس (-) \quad (۷-)$$

امثلہ نمبری ۴۳

[طالب علم کو امثلہ ذیل (مثلاً ۱-۴، ۵، ۸، ۱۲، ۱۳) کے نتیجے کی تصدیق عمل ترسیبی سے کرنی چاہئے]
مثبت کر دو کہ

$$1 - جب \frac{1}{8} + جب \frac{1}{12} = جب \frac{1}{24}$$

$$۲ - جب ۱ = \frac{۵}{۱۳} + جب ۱ = \frac{۶}{۲۵} = \left(\frac{۲۵۳}{۲۲۵} \right)$$

$$۳ - جب ۱ = \frac{۵}{۱۳} + مس ۱ = \frac{۳}{۵} = مس ۱ = \frac{۲۴}{۱۱}$$

$$۴ - جب ۱ = \frac{۵}{۱۳} + جب ۱ = \frac{۱۲}{۱۳} = جب ۱ = \frac{۳۳}{۴۵}$$

$$۵ - جب ۱ = \frac{۵}{۱۳} = جب ۱ = \frac{۵}{۱۳} = جب ۱ = \frac{۵}{۱۳}$$

$$۶ - جب ۱ = \frac{۵}{۱۳} + مس ۱ = \frac{۳}{۵} + جب ۱ = \frac{۶}{۲۵} = \pi$$

$$۷ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = جب ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = ۲۵$$

$$۸ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = مس ۱ = \frac{۱}{۴}$$

$$۹ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} = مس ۱ = \frac{۱}{۴}$$

$$۱۰ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = جب ۱ = \frac{۳}{۵}$$

$$۱۱ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = \frac{\pi}{۴}$$

$$۱۲ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = مس ۱ = \frac{۱}{۴} = \frac{\pi}{۴}$$

$$۱۳ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = \frac{\pi}{۴}$$

$$۱۴ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = مس ۱ = \frac{۱}{۴} = \frac{۱۹۸۵}{۱۹۸۵}$$

$$۱۵ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = مس ۱ = \frac{۱}{۴} = \frac{\pi}{۴}$$

$$۱۶ - مس ۱ = \frac{۱۲۰}{۱۱۹} = جب ۱ = \frac{۵}{۱۳}$$

$$۱۷ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} - مس ۱ = \frac{۱}{۴} = \frac{\pi}{۴}$$

$$۱۸ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = مس ۱ = \frac{۱}{۴} = \frac{۳-۳}{۳-۳}$$

$$۱۹ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = مس ۱ = \frac{۱}{۴} = \frac{۳-۳}{۳-۳}$$

$$۲۰ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = مس ۱ = \frac{۱}{۴} = \frac{۳-۳}{۳-۳}$$

$$۲۱ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = مس ۱ = \frac{۱}{۴} = \frac{۳-۳}{۳-۳}$$

$$۲۲ - مس ۱ = \frac{۱}{۴} + مس ۱ = \frac{۱}{۴} = مس ۱ = \frac{۱}{۴} = \frac{۳-۳}{۳-۳}$$

$$+ \text{مس}^1 \left[\text{ج} (1 + \text{ب} + \text{ج}) \right] = \frac{\pi}{\text{ب}}$$

$$20 - \text{مس}^1 \text{ب} + \text{مس}^1 \text{ب} + \text{مس}^1 \text{ج} + \text{مس}^1 \text{ج} = \frac{1}{1 - \text{ج}}$$

$$21 - \text{مس}^1 \text{ن} + \text{مس}^1 \text{ن} = \text{مس}^1 (\text{ن} + 1) = \text{مس}^1 (\text{ن} + 1 + \text{ن})$$

$$22 - \text{جم} (\text{مس}^1 \frac{1}{\text{ج}}) = \text{جب} (\text{مس}^1 \frac{1}{\text{ج}})$$

$$23 - \text{مس}^1 \text{ا} [\text{مس} (\text{ع} - \text{مس}^1 \frac{1}{\text{ج}})] = \text{جم}^1 [\text{جب}^1 \text{ع} + \text{جم}^1 \text{ب}]$$

$$24 - \text{مس}^1 \text{ا} = \text{مس}^1 \text{ا} [\text{قم}^1 \text{مس}^1 \text{ا} - \text{مس}^1 \text{مس}^1 \text{ا}]$$

$$25 - \text{مس}^1 \text{ا} [\text{مس}^1 \frac{1}{\text{ج}} (\text{مس}^1 \frac{1}{\text{ج}} - \frac{\pi}{\text{ج}})] = \text{مس}^1 \text{ا} \text{جب}^1 \text{ع} + \text{جم}^1 \text{ب}$$

$$26 - \text{ثابت کرو کہ}$$

$$\text{جم}^1 \text{ا} = \text{جب}^1 \text{ا} \left[\frac{\text{لا} - \text{ب}}{\text{ب}} \right] = \text{مس}^1 \text{ا} \left[\frac{\text{لا} - \text{ب}}{\text{ب}} \right] = \frac{1}{\text{ب}} \text{جب}^1 \text{ا} (\text{لا} - \text{ب})$$

$$27 - \text{اگر جم}^1 \text{ا} = \frac{\text{لا}}{\text{ب}} + \text{جم}^1 \text{ا} = \frac{\text{لا}}{\text{ب}} = \text{ع} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{\text{لا}}{\text{ب}} - \frac{\text{لا}}{\text{ب}} = \text{جم}^1 \text{ا} = \frac{\text{لا}}{\text{ب}} + \text{جم}^1 \text{ا} = \text{جب}^1 \text{ا} = \text{ع}$$

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$28 - \text{مس}^1 \text{ا} = \frac{\text{لا} + \text{ا} - \text{لا} - \text{ا}}{\text{لا} + \text{ا} - \text{لا} - \text{ا}} = \frac{0}{0}$$

$$29 - \text{مس}^1 \text{ا} + \text{مس}^1 \text{ا} = \text{مس}^1 \text{ا}$$

$$30 - \text{مس}^1 \text{ا} = \frac{1 + \text{لا}}{\text{ب} + \text{لا}} + \text{مس}^1 \text{ا} = \frac{1 + \text{لا}}{\text{ب} + \text{لا}}$$

$$۳۱ - مس - (۱ + لا) + مم - (۱ - لا) = جب - ا - جم + ج - ا$$

$$۳۲ - مس - (۱ + لا) + مس - (۱ - لا) = مس - ا - مس - ا$$

$$۳۳ - مس - (جم لا) = مس - (۲ قم لا)$$

$$۳۴ - مس - لا + ۲ مم - لا = ۲ - ۲$$

$$۳۵ - مس - جم - لا = جب - مم - ا$$

$$۳۶ - مم - لا - مم - (۲ + لا) = ۱۵$$

$$۳۷ - جم - لا - ا + مس - لا = ۲ - ۲$$

$$۳۸ - مم - لا + مم - (ن - لا + ۱) = مم - (ن - ۱)$$

$$۳۹ - جب - لا + جب - لا = ۲ - ۲$$

$$۴۰ - جب - ا - جب - ا = ۲ - ۲$$

$$۴۱ - مس - ا - مس - ا - مس - ا - مس - ا = ۲ - ۲$$

$$۴۲ - قط - لا - قط - لا = قط - اب - قط - ا$$

$$۴۳ - قم - لا = قم - ا + قم - اب$$

$$۴۴ - مس - لا = جم - ا - جم - ا - جم - ا - جم - ا$$

مفصلہ ذیل کی ترسیلات کھینچو

۴۵ - جب - لا [انتباہ اگر ما = جب - لا تو لا = جب ما اور

اس ترسیم کا و ما سے وہی تعلق ہے جو ترسیم دفعہ ۶۸ کا ولا

سے ہے]

- ۴۶- جم-۱ لا
 ۴۸- مم-۱ لا
 ۵۰- قط-۱ لا
 ۴۷- مس-۱ لا
 ۴۹- تم-۱ لا
 ۵۱- مس-۱ لا اور ۲ لا کی
- ترسیات کھینچنے اور ان کے نقاط تقاطع دریافت کرنے سے ثابت کرو کہ مساوات مس-۱ لا = لا کے حل کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمت تقریباً ۶۷ کے قوسی ناپ کے برابر ہے۔

باب نوزدهم

چند آسان مثلثی سلسلوں کا بیان

۲۴۷۔ اگر زاد یوں کی کوئی تعداد سلسلہ حسابیہ میں ہو تو ان کی جیوں کا حاصل جمع دریافت کرو

فرض کرو کہ زاوئے عہ، عہ + بہ، عہ + ۲ یہ { عہ + (ن - ۱) یہ } ہیں
تیز فرض کرو کہ

ص = جب ع + جب (ع + ب) + جب (ع + ۲ + ی) + ... + جب {ع + ن - ا - ی}

موجب دفعہ ۱۰۳

$$۲ \text{ جب } ع \text{ جب } \frac{7}{7} = \text{جم} (\frac{7}{7} - ع) - \text{جم} (\frac{7}{7} + ع)$$

$$2 \text{ جب } (ع + ب) \text{ جب } \frac{2}{3} = \text{جم } (\frac{2}{3} + ع) - \text{جم } (\frac{2}{3} + ع)$$

$$٢ \text{ جب } (ع + ٢٠) \text{ جب } \frac{٧}{٢} = \text{جم } (ع + \frac{٣}{٢}) - \text{جم } (ع + \frac{٥}{٢})$$

۲ جب {ع + (ن - ۲) ب} جب $\frac{۷}{۴}$ جم {ع + (ن - $\frac{۵}{۴}$) ب} - جم {ع + (ن - $\frac{۳}{۴}$) ب}

جیب ۲ {عہ} + (ن - ۱) {ب} = جیب ۳ {عہ} + {عہ} + (ن - ۳) {ب} - جیب ۴ {عہ} + {عہ} + (ن - ۱) {ب}

ان ن سطرونکو اکٹھا جمع کرنے سے حاصل ہوگا

۲ جب $\frac{۲}{۴} \times ص = جم (عہ - \frac{۲}{۴}) - جم (عہ + (ن - \frac{۱}{۴}))$ بہ {
دائیں طرف کی باقی رقیں ایک دوسرے کو ساقط کر دیتی ہیں
اس لئے بموجب دفعہ ۱۰۰

۲ جب $\frac{۲}{۴} \times ص = ۲ جب (عہ + (ن - \frac{۱}{۴}))$ بہ { جب $\frac{۲}{۴} ن$

یعنی $ص = جب (عہ + (ن - \frac{۱}{۴}))$ بہ { جب $\frac{۲}{۴} ن$

جب $\frac{۲}{۴}$

مثال — فرض کر دکہ بہ = ۲ عہ تب

جب عہ + جب ۳ عہ + جب ۵ عہ + ... + جب (۲-۱) عہ

= جب (عہ + (ن - ۱)) عہ { جب ن عہ = جب ن عہ
جب عہ

۲۳۸ — اگر زاویوں کی کوئی تعداد سلسلہ حسابیہ میں

ہو تو ان کی جیوب التمام کا حاصل جمع دریافت کرو

فرض کرو کہ زاوئے عہ ۶ عہ + یہ ۶ عہ + یہ ۶ عہ + ... عہ + (ن - ۱) بہ ہیں

نیز فرض کرو کہ

ص = جم عہ + جم (عہ + بہ) + جم (عہ + ۲ بہ) + ... + جم (عہ + (ن - ۱) بہ) {

بموجب دفعہ ۱۰۳

۲ جم عہ جب $\frac{۲}{۴} = جب (عہ + \frac{۲}{۴}) - جب (عہ - \frac{۲}{۴})$

۲ جم (عہ + بہ) جب $\frac{۲}{۴} = جب (عہ + \frac{۳}{۴}) - جب (عہ + \frac{۲}{۴})$

۲ جم (عہ + ۲ بہ) جب $\frac{۲}{۴} = جب (عہ + \frac{۵}{۴}) - جب (عہ + \frac{۳}{۴})$

۲ جم {عہ + (ن - ۲) بہ} جب $\frac{۲}{۳}$ = جب {عہ + (ن - ۳) بہ} - جب {عہ + (ن - ۵) بہ} $\frac{۵}{۳}$ بہ
اور ۲ جم {عہ + (ن - ۱) بہ} جب $\frac{۲}{۳}$ = جب {عہ + (ن - ۱) بہ} - جب {عہ + (ن - ۳) بہ} $\frac{۳}{۳}$ بہ
ان ن سطروں کو اکٹھا جمع کرنے سے حاصل ہوگا

۲ ص x جب $\frac{۲}{۳}$ = جب {عہ + (ن - ۱) بہ} - جب {عہ + (ن - ۳) بہ} $\frac{۳}{۳}$ بہ
بائیں طرف کی باقی رقیں ایک دوسرے کو ساقط کر دیتی ہیں
اسلئے بموجب دفعہ ۱۰۰

۲ ص x جب $\frac{۲}{۳}$ = ۲ جم {عہ + $\frac{۱}{۳}$ بہ} جب $\frac{۱}{۳}$ بہ

یعنی ص = جم {عہ + $\frac{۱}{۳}$ بہ} جب $\frac{۱}{۳}$ بہ
جب $\frac{۲}{۳}$

۲۴۹ — دفات ۲۴۷ اور ۲۴۸ میں ص کی قیمت دریافت کرنے کے دونوں جملے معدوم ہوتے ہیں اگر جب $\frac{۱}{۳}$ صفر ہو، یعنی اگر زاویہ $\frac{۱}{۳}$ ، π کے کسی ضعف کے برابر ہو۔

یعنی جب زاویہ $\frac{۱}{۳} = \pi$ جہاں ع کوئی صحیح عدد ہے

یعنی جب زاویہ $\pi = \frac{۲}{۳}$ ع

اس لئے ثابت ہوا کہ اگر ن زاوئے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو انکی جیوب (یا جیوب التمام) کا مجموعہ معدوم ہوتا ہے اگر زاویوں کا فرق مشترک $\frac{۲}{۳}$ کا کوئی ضعف ہو

اسی طرح سے ۴ جم ۲ عہ = ۳ جم ۲ عہ + ۱ جم ۲ عہ
۴ جم ۲ عہ = ۳ جم ۲ عہ + ۱ جم ۲ عہ

اس نے اگر سلسلہ کا حاصل جمع ص ہو تو

۴ ص = (۳ جم ۲ عہ + ۱ جم ۲ عہ) + (۳ جم ۲ عہ + ۱ جم ۲ عہ) + (۳ جم ۲ عہ + ۱ جم ۲ عہ) + ...
= ۳ (جم ۲ عہ + ۱ جم ۲ عہ + ۱ جم ۲ عہ + ...)
= ۳ جم ۲ عہ + ۳ جم ۲ عہ + ۳ جم ۲ عہ + ...
جب ۳ عہ

= ۳ جم ۲ عہ + ۳ جم ۲ عہ + ۳ جم ۲ عہ + ...
جب ۳ عہ

اسی طرح سے اگر زادے سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو انکی جیبوں کے
مکعبوں کا مجموعہ معلوم ہو سکتا ہے

نتیجہ صریح — چونکہ

۲ جب ۲ عہ = ۱ جم ۲ عہ اور ۲ جم ۲ عہ = ۱ + ۱ جم ۲ عہ
اس نے جیب تمام کے مربعوں کا حاصل جمع دریافت ہو سکتا ہے
نیز چونکہ ۸ جب ۲ عہ = ۲ [۱ جم ۲ عہ]

= ۲ - ۲ جم ۲ عہ + ۲ جم ۲ عہ = ۳ - ۲ جم ۲ عہ + ۲ جم ۲ عہ
پس جیبوں کی چوتھی قوتوں کا مجموعہ حاصل ہو سکتا ہے اسی طرح سے
جیب تمام کی قوتوں کا مجموعہ بھی حاصل ہو سکتا ہے —

مثال ۳ — سلسلہ جم ۲ عہ جب ۲ عہ + ۲ جم ۲ عہ + ۲ جم ۲ عہ + ...
کون رتوں تک جمع کرو۔

فرض کرو کہ سلسلہ کا حاصل جمع ص ہے تب

$$\begin{aligned} ٢ ص &= \{ \text{جب (عہ + بہ) - جب (عہ - بہ)} \} + \{ \text{جب (عہ + عہ ٢) - جب (عہ ٣ - بہ ٢)} \} \\ &+ \{ \text{جب (عہ ٥ + بہ ٣) - جب (عہ ٥ - بہ ٣)} \} + \dots \\ &= \{ \text{جب (عہ + بہ)} + \text{جب (عہ ٣ + بہ ٢)} + \text{جب (عہ ٥ + بہ ٣)} + \dots \} \\ &- \{ \text{جب (عہ - بہ)} + \text{جب (عہ ٣ - بہ ٢)} + \text{جب (عہ ٥ - بہ ٣)} + \dots \} \\ &= \text{جب (عہ + بہ)} + \frac{\text{جب (عہ ٢ + بہ ٢)}}{٢} - \frac{\text{جب (عہ ٢ + بہ ٢)}}{٢} \\ &\quad \text{جب ٢ عہ + بہ} \end{aligned}$$

جب { (ع-ب) + $\frac{1}{2}(2-ع-ب)$ } جب $\frac{2}{2}(ع-ب)$ بموجب دفعه ۲م

$$= \frac{\text{جب } \{ \text{ن ع} + \frac{\text{ن} + \text{ا ب}}{2} \}}{\text{جب } \frac{\text{ع ۲} + \text{ب}}{2}} \text{ جب } \text{ن} (\text{ع ۲} + \text{ب})$$

جب {ن ع} - ن + ا به {جب ن (۲ ع - به)}
جب ۲ ع - ۲

مثال ۴۔ ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع n ...
ایک دائرہ کے اندر مبنی ہوئی ہے، دائرہ کا مرکز O ہے، اگر قوس AB پر
کوئی ایسا نقطہ C لیا جائے کہ $\angle AOC = \angle BOC$ طہ تو جو خطوط نقطہ C
کو کثیر الاضلاع کے رؤس الزوایا کے ساتھ وصل کرتے ہیں ان کے
طولوں کا مجموعہ دریافت کرو

چونکہ زاویوں $\angle O_1$ ، $\angle O_2$ ، $\angle O_3$ $\angle O_n$ میں سے ہر ایک $\frac{\pi}{2}$ کے برابر ہے، اسلئے زاوئے $\angle O_1$ ، $\angle O_2$ ، $\angle O_3$ بالترتیب $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi}{2}$ ہیں

اس لئے اگر دائرہ کا نصف قطر ہو تو

$$ع ۱ = ۲ ر جب ع ۱ = ۲ ر جب ط ۱$$

$$ع ۱ = ۲ ر جب ع ۱ = ۲ ر جب ط ۱ = ۲ ر جب (ط ۱ + ط ۲)$$

$$ع ۱ = ۲ ر جب ع ۱ = ۲ ر جب ط ۱ = ۲ ر جب (ط ۱ + ط ۲)$$

اس لئے مجموعہ مطلوبہ = ۲ ر جب ط ۱ + جب (ط ۱ + ط ۲) + جب (ط ۱ + ط ۲) + ... + ن
رقموں تک

$$= ۲ ر جب [ط ۱ - ط ۲ + ط ۳] جب ط ۱ \times ط ۲ (دفعہ ۲۴)$$

$$= ۲ ر قم ط ۱ \times جب [ط ۱ - ط ۲ + ط ۳]$$

$$= ۲ ر قم ط ۱ جم (ط ۱ - ط ۲)$$

امثلہ نمبری ۴۴

ذیل کے سلسلوں کو جمع کرو

$$۱۔ جم ط ۱ + جم ط ۲ + جم ط ۳ + ... + ن ر قموں تک$$

$$۲۔ جم ط ۱ + جم ط ۲ + جم ط ۳ + ... + ن ر قموں تک$$

ثابت کرو کہ

$$۳۔ جب ع ۱ + جب ع ۲ + جب ع ۳ + ... + جب ن ع = مس ۱ + ن ع$$

$$۴۔ جب ع ۱ + جب ع ۲ + جب ع ۳ + ... + جب (۱ - ن) ع = مس ن ع$$

۵۔ جب ۴۔ جب (۴ + ۲) + جب (۴ + ۲) + ... ن رقبوں تک
 جم ۴۔ جم (۴ + ۲) + جم (۴ + ۲) + ... ن رقبوں تک
 = سس { ۴ + ۲ } (۲ + ۲) {

فیل کے سلسلوں کو جمع کرو۔

۶۔ جم $\frac{11}{1+12}$ + جم $\frac{11}{1+12}$ + جم $\frac{11}{1+12}$ + ... ن رقبوں تک

۷۔ جم ۴۔ جم (۴ + ۲) + جم (۴ + ۲) + ... ۲۱ رقبوں تک

۸۔ جب ۴۔ جب $\frac{11}{1+12}$ + جب $\frac{11}{1+12}$ + ... ن رقبوں تک

۹۔ جم ۴۔ جب ۳ لا + جم ۵ لا + جب ۴ لا + ... جب (۴ - ۱) لا

۱۰۔ جب ۴۔ جب ۲۔ جب ۲۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ ن رقبوں تک

۱۱۔ جم ۴۔ جب ۲۔ جب ۲۔ جب ۲۔ جم ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔

+ جب ۴۔ جم ۵۔ ۲۱ رقبوں تک

۱۲۔ جب ۴۔ جب ۳۔ جب ۲۔ جب ۲۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ ن رقبوں تک

۱۳۔ جم ۴۔ جم ۳۔ جم ۳۔ جم ۳۔ جم ۳۔ جم ۳۔ جم ۳۔ ن رقبوں تک

۱۴۔ جب ۴۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ ن رقبوں تک

۱۵۔ جب ۴۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ ن رقبوں تک

۱۶۔ جب ۴۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ ن رقبوں تک

۱۷۔ جب ۴۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ ن رقبوں تک

۱۸۔ جم ۴۔ جم ۳۔ جم ۳۔ جم ۳۔ جم ۳۔ جم ۳۔ جم ۳۔ ن رقبوں تک

۱۹۔ جم ۴۔ جم ۳۔ جم ۳۔ جم ۳۔ جم ۳۔ جم ۳۔ جم ۳۔ ن رقبوں تک

۲۰۔ جب ۴۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ ۲۱ رقبوں تک

۲۱۔ سلسلہ جب ۴۔ جب ۳۔ جب ۳۔ جب ۳۔ ن رقبوں تک

نسبت ۲: جب $\frac{11}{10}$ ہوگی۔

۲۶۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہے، اس کے زاویوں کے راس $\angle 1, \angle 2, \dots, \angle n$ ہیں، اگر محیط دائرہ پر کوئی نقطہ و نقاط $\angle 1$ اور $\angle n$ کے درمیان ہو تو ثابت کرو کہ

$\angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle n = 180^\circ + \angle 1 + \angle 2 + \dots + \angle n$
 ۲۷۔ ایک n اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع ایک دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے، دائرہ کا نصف قطر r ہے اگر محیط دائرہ کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ

$\frac{1}{n} \left(\frac{e}{r} \right) = 3$ اور $\frac{1}{n} \left(\frac{e}{r} \right) = 5$
 جہاں e کوئی عمود ہے اور علامت $\frac{1}{n} \left(\frac{e}{r} \right) =$ حاصل جمع ان تمام رقموں کا جن کا عام نمونہ وہ رقم ہے جس کے پہلے یہ علامت لکھی ہوئی ہے۔

باب ہستم

استقاط

۲۵۱۔ اگر ایک مقدار بھول کی دو مساواتیں معلوم ہوں تو ضرور ہے کہ ان مساواتوں کی مستقل مقداروں میں کوئی ربط ہو تاکہ مقدار بھول کی ایک ہی قیمت دو نوں کی شرائط کو پورا کرے، مثلاً فرض کرو کہ ایک مقدار بھول لا ذیل کی دو مساواتوں کی شرائط کو پورا کرتی ہے۔

$$۱ + لا = ب \quad \text{اور} \quad ج + لا + د + لا = ع$$

پہلی مساوات سے $لا = -\frac{ب}{۱}$ اور لائی اس قیمت سے دوسری مساوات کی شرائط بھی پوری ہونگی اگر

$$ج - \left(-\frac{ب}{۱}\right) + د - \left(-\frac{ب}{۱}\right) + ع = ۰$$

یعنی اگر $ب + ج + د + لا = ع$

یہ مساوات دو مندرجہ بالا معادلات میں سے مقدار
جھول لا کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے اس لئے
اس کو حاصل اسقاط کہتے ہیں۔

۲۵۲ — نیز فرض کرو کہ ایک زاویہ طہ شرائط
معادلات جب $طہ = ب$ اور حجم $طہ = ج$ کو پورا کرتا ہے
جب $طہ = ب$ اور حجم $طہ = ج$

اب طہ کی تمام قیمتوں کے لئے

جب $طہ + ج = ا$ یعنی اس صورت میں
 $ب + ج = ا$

اور یہ مطلوبہ حاصل اسقاط ہے۔

۲۵۳ — جب ایک مقدار جھول کی دو مساواتیں
معلوم ہوں تو اصولاً ہم ان معادلات سے اس
مقدار کو ہمیشہ ساقط کر سکتے ہیں مگر علی طور پر بظاہر
سادہ سوالات کے حل کرنے میں بھی ذہانت اور
اور حکمت عملی کی ضرورت ہوتی ہے۔

اسی طرح سے اگر دو مقادیر جھول کی تین
مساواتیں دی ہوئی ہوں تو کم از کم نظری بحث
میں ہم ان مقادیر جھولہ کو ان معادلات سے
ہمیشہ ساقط کر سکتے ہیں۔

۲۵۴ — اس جگہ ہم اسقاط کی چند مثالیں دیں گے۔
مثال ۱ — معادلات $طہ + ب = ج$

اور دجم طہ + ع جب طہ = ف

سے طہ کو ساقط کرو۔

غرب چلیپائی یا کسی اور طرح سے معادلات کو جم طہ اور جب طہ کے لئے حل کرو

$$\text{ب}^{\text{ا}} - \text{ج}^{\text{ع}} = \text{ج}^{\text{د}} - \text{ف}^{\text{ا}} = \text{ب}^{\text{د}} - \text{ع}^{\text{ا}}$$

$$\text{د}^{\text{ا}} = \text{ج}^{\text{م}}^{\text{طہ}} + \text{ج}^{\text{ب}}^{\text{طہ}} = (\text{ب}^{\text{ا}} - \text{ج}^{\text{ع}})^{\text{طہ}} + (\text{ج}^{\text{د}} - \text{ف}^{\text{ا}})^{\text{طہ}}$$

$$\text{یعنی } (\text{ب}^{\text{ا}} - \text{ج}^{\text{ع}})^{\text{طہ}} + (\text{ج}^{\text{د}} - \text{ف}^{\text{ا}})^{\text{طہ}} = (\text{ب}^{\text{د}} - \text{ع}^{\text{ا}})^{\text{طہ}}$$

مثال ۲۔ معادلات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

$$\text{ولا} - \text{ب}^{\text{ا}} = \text{ب}^{\text{ب}} - \text{ب}^{\text{ا}} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{اور } \text{ولا جب طہ} + \text{ب}^{\text{ا}} \text{جم طہ} = \text{ب}^{\text{ب}} \text{جم طہ} \dots \dots \dots (۲)$$

معادلات (۲) سے ولا جب طہ = ب^ب جم طہ

$$\text{ب}^{\text{ا}} - \text{ج}^{\text{ع}}^{\text{طہ}} = \text{ج}^{\text{م}}^{\text{طہ}} = \text{ب}^{\text{ا}} \text{جم طہ} + \text{ج}^{\text{ب}}^{\text{طہ}}$$

(دیکھو ٹوڈنٹر اور ہونی کا الجبرا مبتدیوں کیلئے دفعہ ۱۷۳)

$$\text{ب}^{\text{ا}} - \text{ج}^{\text{ع}}^{\text{طہ}} = \text{ب}^{\text{ا}} \text{جم طہ} + \text{ج}^{\text{ب}}^{\text{طہ}}$$

$$\text{اس لئے } \frac{1}{\text{جب ط}} = \frac{\text{ب}(\text{ب م}) + \text{و}(\text{و لا})}{\text{ب}(\text{ب م})}$$

$$\text{اور } \frac{1}{\text{جم ط}} = \frac{\text{ب}(\text{ب م}) + \text{و}(\text{و لا})}{\text{و}(\text{و لا})}$$

یعنی مساوات (۱) میں $\frac{1}{\text{جم ط}}$ اور $\frac{1}{\text{جب ط}}$ کی قیمتیں مندرجہ
کرنے سے

$$\text{و} - \text{ب} = \text{ب}(\text{ب م}) + \text{و}(\text{و لا}) \left[\text{و لا} \times \frac{1}{\text{و}(\text{و لا})} - \text{ب م} \times \frac{1}{\text{ب}(\text{ب م})} \right]$$

$$= \text{ب}(\text{ب م}) + \text{و}(\text{و لا}) \{ \text{و}(\text{و لا}) + \text{ب}(\text{ب م}) \}$$

$$\{ \text{و}(\text{و لا}) + \text{ب}(\text{ب م}) \} =$$

$$\text{یعنی } \text{و}(\text{و لا}) + \text{ب}(\text{ب م}) = \text{و} - \text{ب} \dots \dots \dots (۳)$$

جو طالب ہندسہ تحلیلہ سے واقف ہے وہ فوراً پہچان
لیگا کہ مساوات (۳) قطع ناقص کے عمادوں کے متعلق ایک
مشہور مسئلہ کا حل ہے۔

مثال ۳۔ زاویہ طہ کو معادلات ذیل سے اسقاط کرو

$$\frac{1}{1} \text{ جم ط} - \frac{1}{2} \text{ جب ط} = \text{جم ط} \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{اور } \frac{1}{4} \text{ جب ط} + \frac{1}{2} \text{ جم ط} = ۲ \text{ جب ط} \dots \dots \dots (۲)$$

مساوات (۱) کو جم طہ سے اور (۲) کو جب طہ سے ضرب
دینے اور جمع کرنے سے حاصل ہوگا

$\frac{1}{4} = \text{جم طہ ۲} + \text{جب طہ ۲} + \text{جب طہ ۲}$
 $= \text{جم طہ ۲} + \text{جب طہ ۲} = \text{جم طہ ۲} + \text{جب طہ ۲} + \text{جب طہ ۲} \dots (۳)$
 (۲) کو جم طہ سے اور (۱) کو جب طہ سے ضرب دو اور
 تفریق کرو تب

$\frac{1}{4} = \text{جب ۲} + \text{جب ۲ طہ} - \text{جم ۲ طہ} + \text{جب طہ ۲}$
 $= \text{جب ۲ طہ} + \text{جم طہ ۲} = \text{جب طہ ۲} + \text{جب طہ ۲} + \text{جم طہ ۲} \dots (۴)$
 (۳) اور (۴) کو جمع کرنے سے

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = (\text{جب طہ} + \text{جم طہ}) + (\text{جب طہ ۲} + \text{جم طہ ۲})$$

$$= (\text{جب طہ} + \text{جم طہ}) + (\text{جب طہ ۲} + \text{جم طہ ۲})$$

$$= (\text{جب طہ} + \text{جم طہ})$$

پس $\text{جب طہ} + \text{جم طہ} = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) \dots (۵)$
 (۴) کو (۳) سے تفریق کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (\text{جم طہ} - \text{جب طہ}) - (\text{جب طہ ۲} - \text{جم طہ ۲})$$

$$= (\text{جم طہ} - \text{جب طہ})$$

$$\text{یعنی جم طہ} - \text{جب طہ} = (\frac{1}{4} - \frac{1}{4}) \dots (۶)$$

سادات (۵) اور (۶) کو دوسری قوت پر اٹھانے اور
 جمع کرنے سے

$$2 = (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4})$$

امثلہ نمبری ۴۵

زاویہ طہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

$$۱۔ اجم طہ + باب جب طہ = ج اور باب جم طہ - ا جب طہ = د$$

$$۲۔ لا = اجم (طہ - عہ) اور ما = باب جم (طہ - بہ)$$

$$۳۔ اجم ۲ طہ = باب جب طہ اور ج جب ۲ طہ = د جم طہ$$

$$۴۔ ا جب عہ - باب جم عہ = باب جب طہ اور ا جب ۲ عہ - باب جم ۲ طہ = ا$$

$$۵۔ لا جب طہ - ماجم طہ = لا + ما اور ج جب طہ + ج جب طہ = لا + ما$$

$$۶۔ لا جم طہ + ا جب طہ = ا$$

$$\text{اور لا جب طہ - ماجم طہ} = \text{ا ا جب طہ} + \text{باب جم طہ}$$

$$۷۔ جب طہ - جم طہ = ن$$

$$\text{اور قم طہ - جب طہ} = ق$$

$$۸۔ لا = اجم طہ + باب جم ۲ طہ اور ما = ا جب طہ + باب جب ۲ طہ$$

$$۹۔ اگر م = قم طہ - جب طہ اور ن = قط طہ - جم طہ$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ م} + \text{ن} = \text{م (ن)}$$

$$۱۰۔ ثابت کرو کہ معادلات$$

$$\text{لاجم (طہ + عہ) + ماجب (طہ + عہ) = ا جب ۲ طہ}$$

$$\text{اور ماجم (طہ + عہ) - لاجب (طہ + عہ) = ۲ اجم ۲ طہ}$$

$$\text{کا حاصل استقاط (لاجم عہ + ماجب عہ) + (لا جب عہ - ماجم عہ) = (۲ ا) ہے}$$

طہ اور نہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو۔

۱۱۔ جب طہ + جب فہ = ا، جم طہ + جم فہ = ب، طہ - فہ = ا

۱۲۔ مس طہ + مس فہ = لا، مم طہ + مم فہ = ما، طہ + فہ = ا

۱۳۔ اجم طہ + ب جب طہ = ج، ب جم فہ + ا جب فہ = د

اور ا مس طہ = ب مس فہ

۱۴۔ جم طہ + جم فہ = ا، مم طہ + مم فہ = ب

اور قم طہ + قم فہ = ج

۱۵۔ ا جب طہ = ب جب فہ، ا جم طہ + ب جم فہ = ج

اور لا = ماس (طہ + فہ)

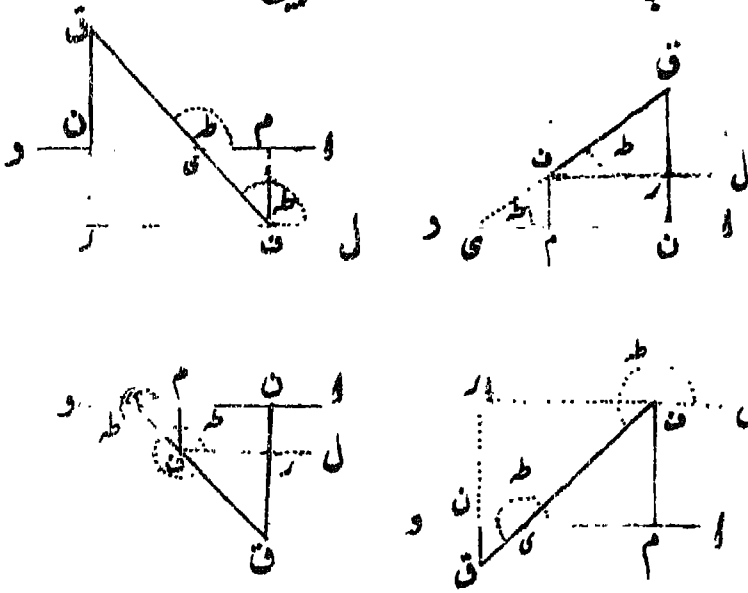
۱۶۔ ا جم طہ + ب جب طہ = ا، لا جم فہ + ب جب فہ = ا

اور ا جب طہ جب فہ = ب ا جم طہ + جم فہ = ج

باب بست ویکم

تظہیر

۲۵۵۔ فرض کرو کہ ف ق ایک مستقیم خط ہے اور اس کے سروں ف اور ق سے ایک ثابت مستقیم خط د ل پر عمود نکالے گئے ہیں۔



خط د ل پر م ن کو ف ق کا ظل یا تطیل کہتے ہیں۔

اگر م ن کی سمت وہی ہو جو و لا کی ہے تو اس کو مثبت کہتے ہیں اور اگر مخالف ہو تو منفی۔

۲۵۶۔ اگر ایک مستقیم خط و ن ق اور ثابت

مستقیم خط و لا کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو مثبت کرو

ن ق کا ظل و لا پر ن ق جم طہ کے برابر ہے۔

ن ق کی سمت خواہ کچھ ہی ہو نقطہ ن

میں سے ایک مستقیم خط ن ل ، و لا کے متوازی

کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط (جو بشرط ضرورت خارج

کیا جاسکتا ہے) ق ن یا ق ن محدودہ کو نقطہ ل

پر ملتا ہے۔

تب ہر ایک شکل میں زاویہ ل ن ق

یا زاویہ ا م ق دونوں طہ کے برابر ہیں۔

نیز م ن = ن ر = ن ق جم ل ن ق = ن ق جم طہ

بموجب تعریفات دفعہ ۵۶

اسی طرح سے ن ق کا ظل ایک ایسے خط پر جو

و لا پر عمود ہو

= ر ق = ن ق جب ل ن ق

= ن ق جب طہ

اس لئے معلوم ہوا کہ خط ن ق کا ظل

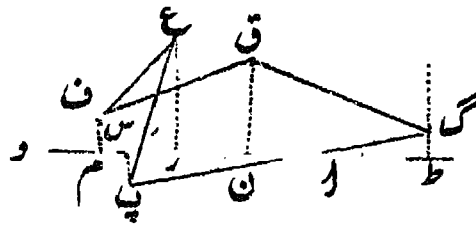
ایک ایسے خط پر جو ن ق سے زاویہ طہ بناتا ہو

ن ق جم طہ ہے اور اس کا ظل ایک ایسے خط پر

جو مذکورہ بالا خط پر عمود ہوتا ہو فاق جب طہ ہے۔

۲۵۷۔ دفعہ ۵۶ میں جیب التمام کی تعریف ہم اس طرح کر سکتے تھے۔ اگر وع کا ظل خط ابتدائی پر بنایا جائے تو جو نسبت اس ظل کو وع سے ہو اسکو زاویہ طہ کی جیب التمام کہتے ہیں جہاں طہ، وع اور ابتدائی خط کا درمیانی زاویہ ہے، اسی طرح سے اگر وع کا ظل ایک ایسے خط پر بنایا جائے جو ابتدائی خط پر عمود ہو تو جو نسبت اس ظل کو وع سے ہو اس کو زاویہ طہ کی جیب کہتے ہیں۔

جیب اور جیب التمام کی تعریفات پر اس نقطہ خیال سے دیکھنا بعض اوقات مفید ہوتا ہے۔
۲۵۸۔ اگر ایک ثابت خط واد پر فاق کا ظل بنایا جائے تو ثابت کرو کہ یہ ظل ہر ایک ایسے شکستہ (یا غیر مستقیم) خط کے ظلوں کے مجموعہ کے برابر ہوگا جو فاق سے شروع ہو اور قی پر ختم ہو فرض کرو کہ فاق پ گ ق ایک شکستہ خط ہے جو فاق اور قی کو ملاتا ہے خط واد پر عمود فاق، ق، ن، ع، ر، پ، س اور گ ط نکالو۔



ن ع کا ظل م ر ہے اور مثبت ہے
 ع پ کا ظل ر س ہے اور منفی ہے
 ن گ کا ظل س ط ہے اور مثبت ہے
 گ ق کا ظل ط ن ہے اور منفی ہے
 شکستہ خط ن ع پ گ ق کے ظلوں کا مجموعہ

$$= م ر + ر س + س ط + ط ن$$

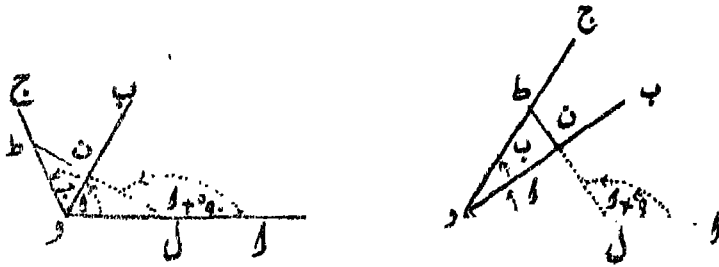
$$= م ر - س ر + س ط - ن ط$$

$$= م س + س ن = م ن$$

اسی قسم کا ثبوت تمام صورتوں پر حاوی ہوگا خواہ
 ن اور ق کہیں واقع ہوں اور شکستہ خط خواہ
 کتنے مختلف مستقیم خطوں کو ملانے سے بنا ہو۔
 نتیجہ صریح — اگر کوئی شکستہ خط نقاط ن اور ق
 کو ملائے متو اس کے ظلوں کا مجموعہ ان دو نقطوں
 کو ملانے والے کسی اور شکستہ خط کے ظلوں کے مجموعہ
 کے برابر ہوگا کیونکہ ہر ایک صورت میں مجموعہ
 مذکورہ مستقیم خط ن ق کے ظل کے برابر ہوگا۔

۲۵۹۔ زاویوں کے مسائل جمع تفریق کے ثبوت
(بطریق تطیلی)

فرض کرو کہ او ب زاویہ ا سے اور پ و ج
زاویہ ب سے تعبیر ہوتا ہے۔ زاویہ ا + ب کے
احاطہ کرنے والے خط و ج پر کوئی نقطہ ط مقرر کرو
اور و ب پر عمود ط ن نکالو اور اسکو اتنا خارج
کرو کہ و ل کو نقطہ ل پر ملے۔



تب $\angle ا ل ط = \angle ل ن و + \angle او ب = ا + ب$

(۱) ثابت کرنا مطلوب ہے جم (ا + ب) = جم اجم ب۔ جب اجم ب

و ط $\times$ جم (ا + ب) = و ط جم ا و ط

= و ط کا ظل خط و ل پر (دفعہ ۲۵۶)

= و ن کا ظل و ل پر + و ن ط کا ظل و ل پر (دفعہ ۲۵۸)

= و ن جم ا و ن + و ن ط جم ا ل ط (دفعہ ۲۵۶)

= و ط جم ب اجم ا + و ط جیب ب جم (ا + ب)

= و ط (جم اجم ب۔ جب اجم ب) (دفعہ ۶۶)

و ط پر تقسیم کرنے سے نتیجہ (۱) حاصل ہوگا

(۳) ثابت کرنا مطلوب ہے جب $(1+b) = \text{جب } 1 + \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$

$$وط \times جب (ا + ب) = وط \times جب ا + وط \times جب ب$$

= وٹ کا فحل ایک ایسے خط پر جو ۱ پر عمود ہو (صفحہ ۲۵۶)

دن اور دن کے غلوں کا مجموعہ ایک ایسے خطرہ

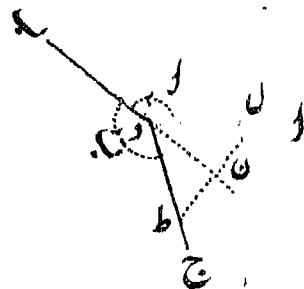
جیو والا پر عمود ہو (صفحہ ۲۵۸)

= ون جب ۱ + ن ط جب ۱ ل ط (رقعہ ۲۵۶)

$$= \text{وط جیب ب جیب } 1 + \text{وط جیب ب جیب } (1+9) \text{ (دفعہ ۲۵۶)}$$

و = [جَب + جَمِب + جَم] (رفعه ۶۶)

جس سے نتیجہ (۲) حاصل ہوتا ہے

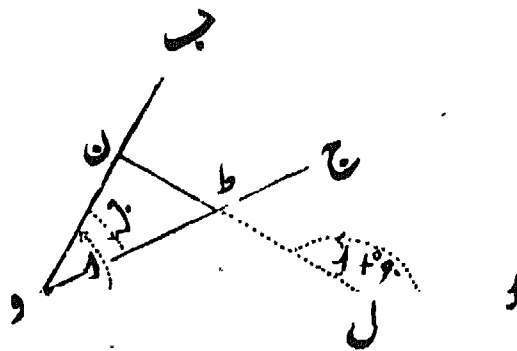


ان شکلوں سے ظاہر ہے کہ اوپر کا ثبوت ہر حالت میں صحیح ہے خواہ احاطہ کر نیوالے خطوط و باب اور وجہ کسی جگہ واقع ہوں۔

۲۶۰۔ زاویوں کے مسئلہ تفریق کی صورت میں فرض کرو کہ $\angle$ و $\angle$ زاویہ $\angle$ ہے اور $\angle$ و $\angle$

زاویہ ب ہے جو متقی سمت میں مرسم کیا گیا ہے
یعنی اوج زاویہ ا۔ ب کے برابر ہے، نیز وج
خط و ب سے ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جس کے
پہلے اگر مناسب علامت لکھی جائے تو وہ ب کے
برابر ہوتا ہے۔

زاویہ مجوزہ کے احاطہ کرنے والے خط
وج پر کوئی نقطہ ط لو اور و ب پر عمود ط ن
نکالو اور اس کو اس قدر خارج کرو کہ وہ و ا کو نقطہ
ل پر ملے۔



ثابت کرنا مطلوب ہے کہ جم (ب۔ ا) = جم اجم با + جب اجم ب

$$\text{و ط جم (ا۔ ب)} = \text{و ط جم اوج}$$

$$= \text{و ط کا ظل و ا پر (دفعہ ۲۵۶)}$$

$$= \text{و ن کا ظل ز ا پر + ن ط کا ظل و ا پر (دفعہ ۲۵۸)}$$

$$= \text{و ن جم ا + ن ط جم (ا + ۹۰) (دفعہ ۲۵۶)}$$

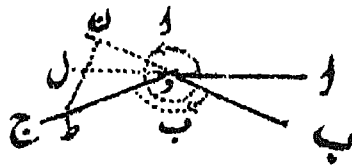
$$\begin{aligned}
 &= \text{وط جم} (-\text{ب}) \text{جم} (+) + \text{وط جب} (-\text{ب}) \text{جم} (+90) \text{ (دفعہ ۲۵۶)} \\
 &= \text{وط جم ب جم} (+) + \text{وط} (-\text{جب ب}) (-\text{ب}) \text{جم} (+) \text{ (دفعات ۴۲، ۴۳)} \\
 &= \text{وط} [\text{جم} (+\text{جم ب} + \text{جب} + \text{جب ب})]
 \end{aligned}$$

اس لئے جم (+-ب) = جم (+جم ب + جب + جب ب
(۲) ثابت کرنا مطلوب ہے جب (+-ب) = جب (+جم ب - جم + جب ب

$$\begin{aligned}
 &\text{وط جب} (+-ب) = \text{وط} \times \text{جب} (+\text{وج}) \\
 &= \text{وط کا ظل ایک ایسے خط پر جو دایرہ عمود ہو (دفعہ ۲۵۶)} \\
 &= \text{ون اور ن ط کے ظلوں کا مجموعہ ایک ایسے خط پر} \\
 &\text{جو دایرہ عمود ہو (دفعہ ۲۵۸)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{ون جب} (+) + \text{ن ط جب} (+90) \text{ (دفعہ ۲۵۶)} \\
 &= \text{وط جم} (-\text{ب}) \text{جب} (+) + \text{وط جب} (-\text{ب}) \text{جب} (+90) \text{ (دفعہ ۲۵۶)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{وط جم ب جب} (-) - \text{وط جب ب جم} (+) \text{ (دفعات ۴۲، ۴۳)} \\
 &\therefore \text{جب} (+-ب) = \text{جب} (+جم ب - جم + جب ب) \\
 &\text{اور یہ ثبوت ہر حالت میں درست ہیں خواہ احاطہ}
 \end{aligned}$$



کرنیوالے خطوط وب اور وج کسی جگہ پر واقع ہوں۔

متفرق مثالیں

۱۔ اگر ایک زاویہ عہ دو ایسے حصوں میں تقسیم کیا جائے جن کے محاسن کی نسبت لہ ہو تو ثابت کرو کہ حصوں کا تقاضا

لا مساوات جب $\frac{لہ}{لہ+ا} = \frac{ا}{لہ+ا}$ جب عہ سے حاصل ہوگا۔

۲۔ اگر مس (پ جم طہ) = مم (پ جب طہ) تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم (طہ - پ)} = \pm \frac{ا}{لہ+ا}$$

۳۔ کسی مثلث ا ب ج میں ثابت کرو کہ

$$\frac{ا-ب}{ج} = \frac{مس - \frac{ا}{لہ}}{\frac{ا}{لہ} + مس} = \frac{مس - \frac{ا}{لہ}}{\frac{ا}{لہ} + مس}$$

$$\text{اور } \frac{ا-ب}{ج} = \frac{ا-مس + مس - \frac{ا}{لہ}}{مس - \frac{ا}{لہ} + مس} = \frac{ا-مس + مس - \frac{ا}{لہ}}{مس - \frac{ا}{لہ} + مس}$$

اس میں ا، ب، ج مثلث کے زاوئے ہیں اور ا، ب، ج مثلث کے اضلاع ہیں۔

۴۔ ایک ہوائی جہاز ۱۸ میل فی گھنٹہ کی مستقل رفتار سے زمین سے ایک مستقل بلندی پر مشرق کی طرف جارہا تھا۔ کسی خاص وقت ایک شخص نے اسکو ٹھیک اپنے شمال کی طرف دیکھا، اس وقت اس کا زاویہ ارتقاع ۹۰° تھا، اگلے ایک منٹ بعد اس نے جہاز کو ایسی سمت میں دیکھا جو شمال سے

مشرق کی طرف کو ۶۲° کا زاویہ بناتی تھی۔ جہاز کی بلندی دریافت کرو، نیز جہاز کا زاویہ ارتفاع اُس وقت دریافت کرو جب مشاہدہ کرنے والے نے اُس کو دوسرے مقام میں دیکھا۔

۵۔ اگر ایک مثلث کے اضلاع ۵۱، ۳۵ اور ۲۶ فٹ ہوں تو ایک ایسے مثلث کے اضلاع دریافت کرو جس کا قاعدہ ۴۱ فٹ ہو اور جس کا رقبہ اور مجموعہ اضلاع وہی ہو جو پہلے مثلث کا ہے۔

۶۔ ثابت کرو کہ

$$\left| \begin{array}{c} 1 + \sqrt{a} \\ 2 + \sqrt{a} \end{array} \right| = \text{جم مس} - a$$

۷۔ زاویہ طہ کو معادلات

جب (طہ + عہ) = ۱، جم (طہ + بہ) = ب سے ساقط کرو

۸۔ ثابت کرو کہ خواہ زاویہ طہ کوئی قیمت اختیار کرے

جملہ $\frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{2} + \text{ب جب } \frac{1}{2} \text{ جم } \frac{1}{2} + \text{ج جب } \frac{1}{2} \text{ طہ}$

ہمیشہ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ ب} + \frac{1}{2} \text{ ج} + \frac{1}{2} \text{ طہ} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ ب} + \frac{1}{2} \text{ ج} + \frac{1}{2} \text{ طہ}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ ب} + \frac{1}{2} \text{ ج} + \frac{1}{2} \text{ طہ} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ ب} + \frac{1}{2} \text{ ج} + \frac{1}{2} \text{ طہ}$

کے درمیان واقع ہوگا۔

[*]

۹۔ اگر جب $\frac{1}{2} = \text{ک جب } \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

تو ثابت کرو کہ $\text{مس} (لا - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \text{ک} - \frac{1}{2} \text{مس}$
 اور جدولوں کی مدد سے مساوات کو حل کرو جبکہ $\text{ک} = 3$
 اور $1 = 50^\circ$

۱۰۔ $\text{مس} ط + \text{مس} (ط + \frac{11}{12}) + \text{مس} (ط + \frac{11}{12})$ کو
 $\text{مس} 3 ط$ کی رقوم میں بیان کرو

اس طرح سے یا کسی اور طرح سے مساوات ذیل کو حل کرو

$\text{مس} ط + \text{مس} (ط + \frac{11}{12}) + \text{مس} (ط + \frac{11}{12}) = 3$

اے اگر کسی مثلث ا ب ج میں $\frac{1}{2}$ ، $\text{مس} پ$ اور $\frac{1}{2}$

سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو ثابت کرو کہ $\text{جم} ا$ ، $\text{جم} ب$ ، $\text{جم} ج$

بھی سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے

۱۲۔ ایک شخص نے سمندر کے کنارے کھڑے ہو کر

دو ٹنگروں کو ایک ہی سیدھ میں دیکھا، انکو ملا نیوالا

خط کنارے سے زاویہ α بناتا تھا، جب وہ سمندر کے

کنارے فاصلہ $ل$ چلا تو اُس نے دیکھا کہ ٹنگروں کے

محاذی اسکی آنکھ پر زاویہ α بنتا ہے، فاصلہ $ب$ آگے

جانے پر اس نے دیکھا کہ دو بارہ اسکی آنکھ پر زاویہ α

بنتا ہے، ثابت کرو کہ ٹنگروں کا درمیانی فاصلہ

$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})$ قطع α - 2 $(1 + \frac{1}{2})$ $\text{جم} \alpha$ ہے۔

اس سوال میں فرض کرو کہ کنارہ سیدھا ہے اور سطح

سمندر سے آنکھ کی اونچائی صفر ہے

۱۳۔ ایک مثلث ا ب ج کے زاویوں کے منصف اس کے بیرونی دائرہ کو نقاط د، ع، ف پر بالترتیب قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلث د ع ف کے رقبہ کو نسبت ا ب ج کے رقبہ کے ساتھ ۲:۱ ہے۔

۱۴۔ ایک منتظم خمس کے متبادل زاویوں کو ملانے سے ایک اور منتظم خمس پیدا ہوتی ہے، ان کے رقبوں کی باہمی نسبت دریافت کرو۔

۱۵۔ اگر فہ = مس-۱ لا، لا۳ اور طہ = مس-۱ لا۲-ک تو ثابت کرو کہ فہ-طہ کی ایک قیمت ۳۰ ہے۔

۱۶۔ اگر $m^2 + m^2 + m^2 = 1$ جم طہ = ۱

$n^2 + n^2 + n^2 = 1$ جم طہ = ۱

اور $m^2 + m^2 + m^2 = 1$ جم طہ = ۱
تو ثابت کرو کہ $m^2 + n^2 = 1$ جم طہ = ۱

۱۷۔ اگر لا کی قیمت حقیقی ہو تو ثابت کرو کہ

کے لا۲-لا جم عہ + ۱ بلحاظ مقدار کے جب $\frac{1}{2}$ اور جم $\frac{1}{2}$
لا۲-لا جم بہ + ۱ جب $\frac{1}{2}$ جم $\frac{1}{2}$

کے درمیان واقع ہوگی۔

۱۸۔ اگر ایک ن اضلاع کی منتظم کثیر الا ضلاع کا مجموعہ اضلاع ایک دائرہ کے محیط کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ دائرہ کے رقبہ کو کثیر الا ضلاع کے رقبہ کے ساتھ نسبت مس $\frac{II}{I}$: $\frac{II}{II}$ کی ہے۔

۱۹۔ اگر جب (۲-ع-ط) = ۱+ لا جہاں لا نہایت ہی قلیل ہے تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 1$ لا مس ۲ ع تقریباً

۲۰۔ اگر ۲ حصہ = ع + بہ + جہ + لہ تو ثابت کرو کہ

جم (صہ - عہ) جم (صہ - بہ) جم (صہ - جہ) جم (صہ - لہ)

+ جب (صہ - عہ) جب (صہ - بہ) جب (صہ - جہ) جب (صہ - لہ)

= جم عہ جم بہ جم جہ جم لہ + جب عہ جب بہ جب جہ جب لہ

۲۱۔ معادلات ذیل کو مکمل طور پر حل کرو۔

(۱) مس عہ مس (طہ - عہ) + مس بہ مس (طہ - بہ)

= مس $\frac{1}{1}$ (مس عہ - مس بہ)

اور (۲) جب ۳ طہ = ۴ جب طہ جب ۲ طہ جب ۴ طہ

۲۲۔ ایک انکڑا (کرنیک) ۱۰ طول میں ۲ فٹ، نقطہ و

کے گرد گھوم سکتا ہے، اب کا رابطہ (سلاخ) اب ہے

اور نقطہ اب ہمیشہ ایک ایسے خط مستقیم پر حرکت کرتا

ہے جو نقطہ و میں سے گذرتا ہے، اگر اب کا طول ۱۰ فٹ

ہو اور نقطہ اب اپنے انتہائی مقام سے کل مسافت کا

$\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ اور $\frac{3}{4}$ واں حصہ طے کر چکا ہو تو ہر ایک صورت

میں جو زاوے اکٹرا وہ خط و ب سے بنائے انکی قیمتیں دریافت کرو۔

۲۳۔ ایک ۲۰۰ فٹ بلند پہاڑ کی چوٹی سے دو جہاز سطح سمندر پر نظر پڑے، ایک کا زاویہ انخفاض $9^{\circ} 10'$ تھا اور اسکی سمت، مشرق سے شمال کی طرف کو 30° کا زاویہ بناتی تھی، دوسرے کا زاویہ انخفاض $4^{\circ} 30'$ تھا اور اسکی سمت، مشرق سے جنوب کی طرف کو 25° کا زاویہ بناتی تھی، جہازوں کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو، نیز یہ بھی معلوم کرو کہ اگر کسی ایک جہاز پر کھڑے ہو کر دوسرے جہاز کی طرف دیکھا جائے تو اسکی جہت کیا ہوگی۔

۲۴۔ ثابت کرو کہ ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز میں سے اور مثلث کے کسی دو جانبی دائروں کے مرکروں میں سے جو دائرہ گزرتا ہے اس کا نصف قطر مثلث کے بیرونی دائرہ کے قطر کے برابر ہوتا ہے۔

(۱) (۱)

۲۵۔ اگر $\sin\left(\frac{b}{p} + \frac{p}{q}\right) = \sin\left(\frac{b}{p} + \frac{p}{q}\right)$ تو ثابت کرو کہ

جب $a = 3$ جب $a = 1$ جب $a = 3$ جب $a = 1$

۲۶۔ ثابت کرو کہ

جب b جب c جب a جب $(b - c) +$ دو متساویہ جملے

= جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

۲۷- پرکار کی ہر ایک شاخ ۷ انچ لمبی ہے اور دونوں شاخوں کے نقطہ مشترک سے ۴ انچ کے فاصلے پر پنسل کی شاخ میں ایک جوڑ ہے، اگر پرکار کے ذریعہ ایک ۴ انچ نصف قطر کا دائرہ کھینچا جائے اور دائرہ کھینچتے وقت پنسل شاخ کو جوڑ پر اس طرح ٹیڑھا کر دیا جائے کہ پنسل کاغذ پر عمود وار ہو تو ثابت کرو کہ دونوں شاخوں کے زوایا میلان سمت راس کے ساتھ تقریباً ۱۹° ۵' اور ۲۰° ۲۵' ہونگے۔

۲۸- ایک مثلث متساوی الاضلاع کھیت میں ایک برج ہے، مثلث کا ضلع ۱۰ فٹ ہے، برج کے محاذی کھیت کے تینوں کونوں پر جو زاوے بنتے ہیں ان کے مماس بالترتیب ۱+۳، ۲، ۲ ہیں، برج کی بلندی دریا کر دو۔

۲۹- دو دائروں کے نصف قطر بالترتیب ۴ اور ۴ ہیں اور وہ ایک دوسرے کو زاویہ ۷۰° پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ دائروں کا مشترک رقبہ

(۲-۲) مس ۱ ۴ جب عہ + ۲ عہ - ۴ جب عہ ہے

۳۰- جملات ذیل کی قیمتیں دریافت کرو۔

مس ۱ ۱۱+۱۱-۱ اور

$$\text{مس} \left(\frac{1}{2} \text{ جب } 1 + \frac{2}{11} + \frac{1}{2} \text{ جم } 1 - \frac{1}{2} \right)$$

۳۱۔ ع اور ب کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

$$\text{جب ع} + \text{جب ب} = \text{ل}$$

$$\text{جم ع} + \text{جم ب} = \text{م}$$

$$\text{مس ع} = \frac{1}{2} \text{ مس ب} = \text{ن}$$

۳۲۔ عمل تریسی سے دریافت کرو کہ مساوات

ج^۲ مس لا = اکی کتنی قیمتیں . اور ۲۲ کے درمیان

واقع ہوتی ہیں ؟



۳۳۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جم } 2 \text{ ع} = 2 \text{ جب } 2 \text{ ب} + 4 \text{ جم} (\text{ع} + \text{ب}) \text{ جب ع جب ب} + 2 \text{ جم} (\text{ع} + \text{ب})$$

$$34\text{۔ ثابت کرو کہ جب } \frac{11}{14} \text{ جب } \frac{11}{14} \text{ جب } \frac{11}{14} = \frac{1}{8}$$

۳۵۔ معادلات ذیل کو حل کرو۔

$$36 \text{ جب } 12 = \text{جب } 2 \text{ ب}$$

$$37 \text{ جب } 1 + \text{جب } 1 \text{ ب} = \frac{1}{4} (1 - 37)$$

۳۶۔ اگر کسی مثلث کے زاویوں کے ماس سلسلہ حسابیہ

میں ہوں تو ثابت کرو کہ ضلعوں کے مربعوں کی باہمی

نسبتیں لا (لا + ۹) : (لا + ۳) : ۲ : ۹ (لا + ۱) ہیں

جہاں لا بڑے سے بڑا یا چھوٹے سے چھوٹا تماس ہے۔

۳۷۔ ایک خط مستقیم پر تین نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج' ایک ہی سطح افقی میں ہیں، 'ا'ب = ۱۰۰ گز اور 'ب'ج = ۱۵۰ گز، ایک غبارہ کے ارتقاعی زاوے نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج' سے ایک ہی وقت میں 'ع'، 'ب'، 'ج' دیکھے گئے ہیں، ثابت کرو کہ غبارہ کی بلندی (ب) گزوں میں مساوات ذیل سے حاصل ہوتی ہے

$$ب^2 (۳ مم^2 ع + ۲ مم^2 ج - ۵ مم^2 ب) = ۷۵۰۰۰$$

۳۸۔ اگر کسی مثلث کے نقاط راس سے عمود 'ق'، 'ر' ایک ایسے خط مستقیم پر کھینچے جائیں جو مثلث کے اضلاع محدودہ کو 'د'، 'ع'، 'پ' پر ملے تو ثابت کرو کہ

$$(ق-ق)(ق-ق) + (ب-ق)(ق-ر) + (ج-ر)(ر-ق) = ۷۴$$

جہاں ۷۴ مثلث کا رقبہ ہے

$$۲ ق ۷$$

نیز ثابت کرو کہ ع پ =

$$(ق-ق)(ق-ر)$$

۳۹۔ ایک ن اضلاع کی تنظیم کثیر الاضلاع کے ضلع کا طول ۲ ہے اور کثیر الاضلاع کا رقبہ ۱ ہے، اگر اس کے اندر بنے ہوئے اور گرد بنے ہوئے دائروں کے رقبہ بالترتیب ۱ اور ۱ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۱ - ۱ = ۱ اور ۱ = ۱$$

۴۰۔ ایک مثلث کے اضلاع ۳۱، ۵۶، ۶۴ ہیں، ثابت کرو کہ اس کے ایک زاویہ اور زاویہ قائمہ کا فرق ایک دقیقہ سے کم ہے۔



۴۱۔ ثابت کرو کہ

$$+ \text{جب } 1 + \text{جم } 1 = 2 \text{ جب } 1 - 2 \text{ جب } 1$$

$$\text{جم } 1 - 1 \text{ جب } 1 = \text{جب } (1 - 1) + \text{جم } 1 - \text{جم } 1$$

۴۲۔ ثابت کرو کہ

$$(1 + \text{قط } 2 \text{ طہ}) (1 + \text{قط } 4 \text{ طہ}) (1 + \text{قط } 6 \text{ طہ}) \dots (1 + \text{قط } 2 \text{ طہ})$$

$$= \text{مس } 2 \text{ طہ} \times \text{مم } 2 \text{ طہ}$$

۴۳۔ اگر ایک مثلث کے اضلاع سلسلہ حسابیہ میں ہوں

اور اس کے سب سے بڑے اور سب سے چھوٹے زاویہ

کا فرق α ہو تو ثابت کرو کہ اضلاع کی باہمی نسبتیں

$$1 - \alpha : 1 : 1 + \alpha \text{ ہیں جہاں } \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{ جم } \alpha$$

۴۴۔ ایک گول جھیل $ABCD$ کے کنارے پر ایک

برج ہے، برج کا پائیں D ہے اور نقاط A, B, C سے

اس کی چوٹی کے ارتفاعی زاوے α, β, γ یہ مشاہدہ کئے

گئے ہیں، اگر زاویوں BAC اور ABC میں سے

ہر ایک طہ کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ

۲ جم ط مم بہ = مم عہ + مم جہ
 ۴۵۔ ایک مثلث ا ب ج کے زاویوں کے داخلی
 نقطہ سے اضلاع کو نقاط د، ع، ف پر ملتے ہیں، ثابت
 کرو کہ مثلث د ع ف کا رقبہ
 $\Delta \text{ ا ب ج}$

ہے
 (ب + ج) (ج + ا) (ا + ب)
 ۴۶۔ اگر جم ا لا + جم ا ما + جم ا می = π تو ثابت کرو کہ
 لا + ما + می = ۱
 ۴۷۔ زاویہ طہ کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

لہ جم ۲ طہ = جم (طہ + عہ)
 اور لہ جب ۲ طہ = ۲ جب (طہ + عہ)
 ۴۸۔ ایک دائرہ کا قطر ۶ انچ ہے، اسکی ایک قوس
 اور قوس کے وتر کا مجموعہ ۸ انچ ہے، قوس کے محاذی
 دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنے اس کے دریافت کرنے
 کے لئے ایک مساوات مرتب کرو اور مساوات کو
 ترمیمی عمل سے حل کرو۔

✱

۴۹۔ مختصر کرو

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جم (عہ + بہ)} - \text{جم (عہ + جہ)} \\ \text{جم (عہ - بہ)} - \text{جم (عہ - جہ)} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{جب (عہ + بہ)} - \text{جب (عہ + جہ)} \\ \text{جب (عہ - بہ)} - \text{جب (عہ - جہ)} \end{array} \right\}$$

۵۰۔ ثبات کرو کہ

جب^{۱۲} + جب^{۱۷} + جب^{۲۹} + جب^{۴۸} = جب^۹ + جب^{۱۸}

۵۱۔ ایک مثلث کے اضلاع ک، ب، ج ہیں اس مثلث کے اندر ایک متشابه مثلث بنایا گیا ہے جس کے اضلاع م، ب، م ج ہیں، اگر اضلاع ک اور م کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو ثابت کرو کہ ۲ م جم طہ = ۱

۵۲۔ ایک پہاڑ کی چوٹی کا دو مقامات ۱ اور ب سے جو ایک ہی سطح اُتقی میں واقع ہیں مشاہدہ کیا گیا ہے، مقام ۱ پہاڑی کے ٹھیک جنوب میں ہے اور ۱ سے مقام ب کی سمت، شمال مشرق ہے، اگر مقامات ۱ اور ب سے چوٹی کے ارتفاعی زاوے 9° اور 30° ہوں تو پہاڑی سے مقام ب کی قطبی جہت دریافت کرو۔

۵۳۔ ایک مثلث ΔABC کے بیرونی دائرہ کا مرکز O ہے، دائرہ کے نقاط B اور C پر کے مماس نقطہ P پر ملتے ہیں، اگر زاویہ $\angle POB = 110^\circ$ ، $\angle C$ کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ

۲ مس طه = مم ب ~ مم ج

۵۴۔ ہندسی عمل سے جم $(\frac{1}{10} \text{ جب } 1)$ کی قیمتوں کی تعداد دریافت کرو، نیز ثابت کرو کہ ان کا حاصل ضرب $\frac{1}{10} (1-1)$ ہے

۵۵۔ ثابت کرو کہ جملہ مس (لا + ع) کی قیمت
مس (لا - ع)

مسء ($\frac{\pi}{4} - \epsilon$) اور مسء ($\frac{\pi}{4} + \epsilon$) کے درمیان نہیں

واقعہ ہو سکتی۔

۵۶۔ ثبات کردہ

$$\text{جسم ط} + \text{جسم} \left(\frac{\text{ط}}{\text{ق}} + \text{ط} \right) + \text{جسم} \left(\frac{\text{ط}}{\text{ق}} + \text{ط} \right) + \dots + \text{ن قوتیک} = \frac{\text{ن}}{\text{ق}}$$

۵۷۔ اگر { جیب (عہ۔ بہ) + جم (عہ + بہ) جیب بہ } = جم عہ جیب بہ جیب (عہ + بہ)

تو ثابت کرو کہ مس عہد = مس بہ { (۲۱ جم بہ - ۱) - ۱ } اس میں

عہ اور بہ میں سے ہر ایک نراویہ قائمہ سے کم ہے۔

۵۸۔ لاکھ وہ سب قیمتیں دریافت کرو جو مساوات
ذیل کو یوراکریں

مس (لا + به) مس (لا + جبه) مس (لا + عم) مس (لا + عم) مس (لا + به) =

۵۹۔ مثلث اُبج میں زاویہ ا سے ضلع باج پر جو عمود

نکالا جائے اس کا پائیں د ہے ، اگر بج = ۱۱۷ فٹ ،

ح = ب = ۳۰۰ اور ح = ج = ۶۰۰ تو د کا

طول دریافت کرد

۶۰۔ ایک بنیادی خط پر تین نقاط 'ا'، 'پ'، 'ج' سے ایک

پہاڑ کی چوٹی کے زوایا ارتفاع بالترتیب ع، ب، ج، مشابہ
کئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی

(- اب $\times$ بج $\times$ ج) $\div$ (باج مم $\div$ ع $\div$ ج $\div$ مم $\div$ ب) $\div$ (ب $\div$ مم $\div$ ج) $\div$ (ج $\div$ ب) ہے، اس
جگہ میں خطوں کے رخوں کی علامات کو ملحوظ رکھا گیا ہے۔
۶۱۔ اگر مثلث ابج کے زاویہ ج کا منصف ضلع
اب کو د پر اور بیرونی دائرہ کو ع پر قطع کرے
تو ثابت کرو کہ

$$ج : ع : د = (ا + ب) : ج$$

جہاں ا، ب، ج، مثلث کے ضلعوں کے طول ہیں
۶۲۔ ط کو معادلات ذیل سے ساقط کرو

$$ا مس ط + ب مم ط = ج$$

$$ا مم ط - ب مس ط = ج$$

اور

۶۳۔ عمل تریسی سے صحیح طور پر نصف درجہ تک

مساوات مم لا = جم لا کی تقریبی قیمت دریافت کرو

۶۴۔ ایک شخص ایک ٹینس کورٹ کے قائم الزاویہ

کونوں کو بنانے میں تین رسیاں استعمال کرتا ہے، انکے

طول بالترتیب ۳ گز، ۴ گز، ۵ گز ۲ فٹ ۱۰ انچ ہیں،

کورٹ کے زاویوں کی پیمائش میں جو غلطیاں اسطرح
واقع ہوتی ہیں ان کی مقدار میں دریافت کرو۔

۶۵۔ اگر n جب 2 (عہ + بہ) = جب 2 عہ + جب 2 بہ - جب 2 عہ جب 2 بہ جم (عہ - بہ)

تو ثابت کرو کہ مس عہ = $1 \pm n$ مس بہ

۶۶۔ اگر جملہ 1 جم (طہ + عہ) + ب جب (طہ + بہ) کی قیمت

1 جب (طہ + عہ) + ب جب (طہ + بہ) طہ کی تمام قیمتوں کے لئے ہمیشہ مستقل رہے تو ثابت کرو کہ

1 - ب ب = 1 ب - 1 ب جب (عہ - بہ)

۶۷۔ ثابت کرو کہ طہ کی وہ قیمتیں جو شرائط مساوات

جب 2 طہ جم (عہ - بہ) - جب 2 عہ جم (بہ + طہ) - جب 2 بہ جب 2 (عہ + طہ) =

کو پورا کرتی ہیں جملات $(1 + n^2) \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \pi$ اور $n + \pi$ عہ میں شامل ہیں جہاں n کوئی مثبت یا منفی صحیح عدد ہے۔

۶۸۔ مثلث 1 ب ج کے وسطانیات ایک دوسرے

سے زاوے عہ بہ عہ بناتے ہیں ثابت کرو کہ

مم عہ + مم بہ + مم جہ + مم 1 + مم ب + مم ج =

۶۹۔ ایک دریا کے کنارے دو مقامات کا باہمی فاصلہ

1 ہے، مقابل کے کنارے پر ایک برج ہے اور ہر دو

مقامات سے برج کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع عہ ہے، ان مقامات

کے عین وسط میں ایک مقام ہے اگر اس پر کھڑے ہو کر

دیکھا جائے تو چوٹی کا زاویہ ارتفاع بہ دکھائی دیتا ہے،

برج کی بلندی اور دریا کا عرض 1 عہ بہ کی رقوم میں

دریافت کرو۔

اگر $1 = 100$ گز، $ع = \frac{1}{4} ۶۲$ اور $ب = ۳۰$ تو ثابت کرو کہ
برج کی بلندی ۱۵۰ ہے۔

۷۰۔ اگر ایک مثلث کے اندرونی دائرہ کے نقاط تاس اضلاع $بج$ ، $ج$ ، $د$ کے ساتھ بالترتیب $د$ ، $ع$ ، $ف$ ہوں اور اگر $د$ ، $ب$ ، $ع$ ، $ج$ ، $ف$ کے مربع سلسلہ حسابیہ ہیں ہوں تو مثلث کے اضلاع سلسلہ موسیقیہ میں ہوں گے۔

۷۱۔ ایک مثلث متساوی الاضلاع اور ایک منتظم مسج دونوں ایک دائرہ کے اندر بنائے گئے ہیں ثابت کرو کہ اگر مثلث کے نصف ضلع کے طول سے مسج کے ایک ضلع کے طول کو نفی کر دیں تو ما حاصل دائرہ کے نصف قطر کے $\frac{1}{4}$ ہیں حصہ سے کم ہوگا۔

۷۲۔ ثابت کرو کہ مقدار $جم طه$ ، $جم طه$ ، $جم طه$ ، $جم طه$ ، $جم طه$ کی قیمت $۱ + جب طه$ اور $۱ + جب طه$ کے درمیان واقع ہوتی

+

۷۳۔ ۸ جب $ع$ جب $ب$ جب $ج$ جب $د$ کو آٹھ چوب تمام کے سلسلے میں بیان کرو

۷۴۔ اگر $جب طه = جم طه$ ، $جم طه$ ، $جم طه$ ، $جم طه$ ، $جم طه$ تو ثابت کرو

کہ $مس طه = مس (طه \pm ع)$
 $مس (طه \pm ب)$

۷۵۔ ایک مثلث کا قاعدہ ۱، مقابل کا زاویہ ۱ اور باقی دو اضلاع کا حاصل ضرب ۲ دیا ہوا ہے، مثلث کو حل کرو اور ثابت کرو کہ ان اجزاء سے کوئی مثلث نہیں بن سکتا اگر $1 > 2$ کہ جب $\frac{1}{2}$

۷۶۔ پہاڑ کی ایک جانب میں دو نقاط اور ق میں، سطح افقی کے ایک نقطہ سے ان نقاط کے ارتفاعی زاوے ۳۸° اور ۶۵° مشاہدہ کئے گئے ہیں، پہاڑ کے پائیں ۱ کا فاصلہ ۵۰۰ گز ہے اور طول اُفق = ۳۲۰ گز، تمام شکل سطح عمودی میں واقع ہے، ثابت کرو کہ فاصلہ ۱ ق تقریباً ۳۶۹ گز ہے، پہاڑ کی سلامی (دھلان) دریافت کرو۔

۷۷۔ مثلث ا ب ج کے جانبی دائروں کے مرکزے، صم، صم ہیں اور مثلثات ب ص ج، ج ص ا اور ا ص ب کے اندرونی دائروں کے نصف قطر صم، صم، صم ہیں ثابت کرو کہ

صم : صم : صم = جب $\frac{1}{2}$: جب $\frac{1}{2}$: جب $\frac{1}{2}$

۷۸۔ دو دائروں کے نصف قطروں کا مجموعہ ۱ ہے، دائرے ایک سطح افقی میں اس طرح رکھے گئے ہیں کہ ان کے مرکزوں کا باہمی فاصلہ ۱ ہے، اگر رسی کے ایک طبقہ کو کس کر دائروں کے گرد اس طرح لپیٹ دیا جائے کہ وہ دائروں کے درمیان آٹھ کی شکل میں

آڑی گزریے تو ثابت کرو کہ رسی کا طول $(\frac{3}{4} + \frac{1}{2})$ ہے۔

۷۹۔ ثابت کرو کہ

$$\begin{array}{l} \text{مس}^1 - \text{لا}^1 + \text{لا}^2 - \text{ب}^2 + \text{مس}^1 - \text{لا}^1 + \text{لا}^2 - \text{ب}^2 \\ \text{ب}^1 + \text{لا}^1 + \text{لا}^2 + \text{ب}^2 \end{array}$$

$$\text{مس}^1 - \text{لا}^1 + \text{لا}^2 - \text{ب}^2 = \pi \text{ ن}$$

۸۰۔ معلوم ہے کہ لا کی تقریبی قیمت ۲، ۴، ۵ شرائط مساوات ۳ جب لا = لا + لا + لا کو یوں ا کرتی ہے، اس سے نزدیک تر تقریب دریافت کرو [فرض کرو کہ ۲، ۴، ۵ نیم قطری زاوے = ۱۴۰°، ۲۲°، ۳۰°]

— *

۸۱۔ ثابت کرو کہ

$$\text{جب}^1 = \text{جب}^2 + \text{جب}^3 - \text{جب}^4 - \text{جب}^5 + \text{جب}^6 - \text{جب}^7 + \text{جب}^8 - \text{جب}^9 + \text{جب}^{10}$$

۸۲۔ معادلات ذیل کا مکمل حل دریافت کرو

$$\text{مس}^3 \text{ ط} + \text{مس}^3 \text{ فہ} = ۲$$

$$\text{مس}^3 \text{ ط} + \text{مس}^3 \text{ فہ} = ۴$$

۸۳۔ اگر کسی مثلث ا ب ج میں

$$\text{جب}^2 \text{ ط} = \text{جب}^1 (1 - \text{ط}) + \text{جب}^2 (1 - \text{ط}) + \text{جب}^3 (1 - \text{ط})$$

تو ثابت کرو کہ $مم ط = مم ۱ + مم ب + مم ج$
 ۸۴۔ ایک جہاز ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک بندرگاہ کی طرف جا رہا تھا، مقام ب سے جو ۱ کے ٹھیک مغرب کی طرف دس میل کے فاصلہ پر تھا جہاز کی بہت مشاہدہ کی گئی اور وہ مشرق سے شمال کی جانب میں ۲۴ کا زاویہ بناتی تھی، ۳ گھنٹہ کے بعد جہاز بندرگاہ میں پہنچ گیا، اول مشاہدہ کے وقت جہاز کا فاصلہ مقام ب سے دریافت کرو۔

۸۵۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کے جانبی دائروں کے مرکزوں کو ملانے سے جو مثلث بنتا ہے اس کے

اندرونی دائرہ کا نصف قطر $\frac{1}{2} مم ۱ + \frac{1}{2} مم ب + \frac{1}{2} مم ج$ ہے۔

۸۶۔ ایک ن اضلاع کی کثیرالاضلاع ایک دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہے اور اس کے اضلاع کے محاذی مرکز پر زاوے ۲ عہ، ۴ عہ، ۶ عہ، ۲ ن عہ بنتے ہیں ثابت کرو کہ اسکے رقبہ کو نسبت ایک ایسی ن اضلاع کی منتظم کثیرالاضلاع کے رقبہ کے ساتھ جو اسی دائرہ کے اندر بنی ہوئی ہو جب ن عہ : ن جب عہ ہے

۸۷۔ مساوات

$$\frac{م ۱ - م ۲}{م ۱ + م ۲} = \frac{م ۳ - م ۴}{م ۳ + م ۴} \quad \left| \frac{م ۱ - م ۲}{م ۱ + م ۲} = \frac{م ۳ - م ۴}{م ۳ + م ۴} \right|$$

کو لا اور ما کی منطق صحیح مساوات کی شکل میں بیان کرو۔

۸۸۔ اگر لا، لام، لام، لام، مساوات

لا۔ لا جب ۲ بہ + لا جم ۲ بہ۔ لا جم ۲ بہ۔ جب ۲ بہ =
کی قیمتیں ہوں تو ثابت کرو کہ

مس۔ لا + مس۔ لا + مس۔ لا = ن + ۲۲ + ۲۲ - بہ
جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے۔

۸۹۔ اگر جب (طہ - بہ) جم عہ + جم (عہ + طہ) جب بہ =
جب (فہ - عہ) جم بہ جم (فہ - بہ) جب عہ

اور مس طہ مس عہ + جم (عہ - بہ) =
مس فہ مس بہ جم (عہ + بہ)

تو ثابت کرو کہ مس طہ = ۱/۲ (مس بہ + مم عہ) اور مس فہ = ۱/۲ (مس عہ - مم بہ)

۹۰۔ اگر جم ۳ لا = ۳ - ۱/۲۸ تو ثابت کرو کہ

جم لا کی تین قیمتیں ۱/۲۸ جب ۱/۲۸، ۱/۲۸ جب ۱/۲۸، ۱/۲۸ جب ۱/۲۸
اور ۱/۲۸ جب ۱/۲۸ ہیں۔

۹۱۔ ایک مثلث کا قاعدہ ۱ اور اضلاع کی نسبت

ب (۱ > ۱) دی ہوئی ہے ثابت کرو کہ زاویہ ب کا ارتفاع
ف مقدار ۱/۲ سے زیادہ نہیں ہو سکتا اور اگر
ف کی یہ قیمت ہو تو مثلث کے زاویہ راس کی قیمت
۲ - ۱/۲ مس ح اب ہوگی۔

۹۲۔ ایک ریلوے لائن کی گولائی کی شکل ربع دائرہ کی

ایک قطعہ کا رقبہ ۲۵ مربع انچ ہے ، قطعہ کی قوس کے محاذی دائرہ کے مرکز پر جو زاویہ بنتا ہے اس کو عمل تریسی سے دریافت کرو۔

— — — — — * — — — — —

۹۷۔ ثابت کرو کہ ۴ جب $\frac{1}{2} = 2$ $(5 + 5) - \frac{1}{2} (3 - 5)$ $\frac{1}{2}$

۹۸۔ اگر جم (بہ - جہ) + جم (جہ - عہ) + جم (عہ - یہ) + ۱ = ۰۔
تو ثابت کرو کہ بہ - جہ ، جہ - عہ یا عہ - یہ ، π کے کسی ضِعف کے برابر ہے۔

۹۹۔ کسی مثلث کے زاویوں کی بیوب کا حاصل ضرب فٹ ہے اور بیوب اتمام کا حاصل ضرب قی ہے ،
ثابت کرو کہ زاویوں کے تماس مساوات ذیل کی قیمتیں ہیں

ق لا - ف لا + (ا + ق) لا - ف = -

اگر ف = $\frac{1}{2} (3 + 5)$ اور ق = $\frac{1}{2} (5 - 3)$ تو ثابت کرو کہ مثلث کے زاوے ۴۵° ، ۹۰° اور ۴۵° ہیں۔

۱۰۰۔ ایک خاص مقام سے جہاز کی مختلف جہات کا مشاہدہ کیا گیا ، کسی خاص وقت جہاز ، سمت شمال سے مغرب کی طرف کو زاویہ عم بناتا تھا ، اس کے دس منٹ بعد وہ ٹھیک شمال کی جانب میں تھا ، اور اس کے دس منٹ بعد جہاز کی سمت ، جانب شمال

سے مشرق کی طرف کو زاویہ عم بناتی تھی، اگر فرض کریں
جائے کہ اس اثنا میں جہاز کی رفتار اور سمت حرکت
میں کچھ فرق نہیں آتا تو ثابت کرو کہ اس کی سمت
حرکت جانب شمال سے مشرق کی طرف کو زاویہ طہ
بناتی ہے جہاں مس طہ = جب^۲ جب^۱ عم (عم - عم)

۱۰۱- سطح ہموار پر ایک پہاڑی ہے اور اس کی بیرونی
شکل قطعہ کرہ کی سی ہے، سطح ہموار پر پہاڑی کا ڈھلان
عہ ہے اور پائیں پہاڑ سے ۱ فٹ کے فاصلے پر ایک
مقام ہے جس سے پہاڑ کے سب سے اونچے نقطہ کا
(جو دکھائی دیتا ہے) زاویہ ارتفاع بہ مشاہدہ کیا گیا ہے
ثابت کرو کہ پہاڑ کی بلندی میدان کوہ سے جب^۲ جب^۱ عہ ہے۔
جب^۲ عہ

۱۰۲- اگر مثلث ا ب ج میں نقاط الزویا ۱، ۲، ۳، ۴
سے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں اور ان کے
پائین بالترتیب د، ع، ف، ہوں اور مثلثات
د ع ف، ۱ ع ف، ۲ ب ف، ۳ د اور ج د ع کے
اندرونی دائروں کے نصف قطر صہ، صہ، صہ، صہ
ہوں تو ثابت کرو کہ ۲ صہ = ۳ صہ صہ صہ صہ

۱۰۳- ایک گول کھیت کا مرکز و ہے اور اس کے
محیط پر کوئی نقطہ ۱ ہے، ایک رسی کے ذریعہ ایک گول

نقطہ ۱ سے مربوط ہے اور کیفیت کے $\frac{1}{n}$ حصہ پر گھاس
چر سکتا ہے، اگر محیط کا بعید ترین نقطہ جس تک گھوڑا
پہنچ سکتا ہے ب ہو اور $\frac{1}{n}$ = طہ تو ثابت کرو

$$\text{جب طہ} + (\pi - \text{طہ}) = \text{جم طہ} = (1 - \frac{1}{n})\pi$$

۱۰۴۔ مساوات ذیل کو حل کرو

$$\text{طہ} = \text{مس}^1 - (\text{مس}^2 \text{ طہ}) - \frac{1}{n} \text{ جب}^1 \text{ }^2 \text{ جب}^2 \text{ }^3 \text{ جب}^3 \text{ }^4 \text{ جب}^4 \text{ }^5 \text{ جب}^5 \text{ }^6 \text{ جب}^6 \text{ }^7 \text{ جب}^7 \text{ }^8 \text{ جب}^8 \text{ }^9 \text{ جب}^9 \text{ }^{10} \text{ جب}^{10}$$

$$۱۰۵۔ \text{اگر جم}^2 \text{ طہ} = \text{مس}^1 \text{ اور مس}^2 \text{ طہ} = \text{مس}^3$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ جم}^2 \text{ عہ} + \text{جب}^2 \text{ عہ} = (\text{لم}^2)$$

۱۰۶۔ ایک شخص سطح افقی پر کسی خاص سمت میں
فاصلہ ۱ چلتا ہے، اور اس کے بعد ایک اور سمت
میں جو سمت سابقہ سے زاویہ عہ بناتی ہے فاصلہ ۱
جاتا ہے ثابت کرو کہ ایک ہی رخ میں ن دفعہ ایسا
کر نیکے بعد وہ اپنے نقطہ ابتدائی سے $\frac{1}{n}$ فاصلہ
پہنچے ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ جس خط سے یہ فاصلہ تعبیر
ہوتا ہے وہ اس کی اصلی یا ابتدائی سمت سے زاویہ

$$(n-1) \frac{\pi}{2} \text{ بنتا ہے}$$

۱۰۷۔ ثابت کرو کہ

$$\text{مس}^1 (\text{جہ} - \text{لہ}) + \text{مس}^2 (\text{جہ} - \text{لہ}) + \text{مس}^3 (\text{جہ} - \text{لہ}) + \text{مس}^4 (\text{جہ} - \text{لہ}) + \text{مس}^5 (\text{جہ} - \text{لہ}) + \text{مس}^6 (\text{جہ} - \text{لہ}) + \text{مس}^7 (\text{جہ} - \text{لہ}) + \text{مس}^8 (\text{جہ} - \text{لہ}) + \text{مس}^9 (\text{جہ} - \text{لہ}) + \text{مس}^{10} (\text{جہ} - \text{لہ})$$

۱۰۸۔ ایک شہاب ثاقب دو مقامات λ اور β کے عین اوپر سے ایک خط مستقیم میں گزرتا ہے، مقامات سطح افقی میں ایک دوسرے سے ۱۰۰۰ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہیں، جب وہ λ کے اوپر ہو تو نقطہ β سے اس کا ارتفاع ۵۰ ہوتا ہے اور جب β کے اوپر ہو تو نقطہ λ سے اس کا ارتفاع ۴۰ ہوتا ہے، نقطہ λ سے اُس مقام کا فاصلہ قریب ترین فٹ تک دریافت کرو جہاں وہ سطح افقی پر جا کے گرے گا۔

۱۰۹۔ ایک پہاڑ کے رُخ کا میلان سطح افقی کے ساتھ θ ہے، پہاڑ کے پائیں پر دو نقاط ہیں جن سے دو سیدھے راستے دو عمودی سطحوں میں اوپر جاتے ہیں اور ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں، اگر دو شخص ان راستوں سے اوپر چڑھنا شروع کریں اور پائیں پہاڑ سے λ اور β فٹ کے فاصلوں پر ایک دوسرے کو ملیں تو ثابت کرو کہ اُس وقت انکی عمودی بلندی (ف) سطح افقی سے، مساوات درجہ دوم

$$(۲ - جب \theta) (ف) = (\lambda + \beta) (ف) + \lambda \beta جب \theta = ۰$$

کی چھوٹی قیمت کے برابر ہے۔

۱۱۰۔ اگر مساوات $\sin (\theta + \frac{\pi}{2}) = \sin \theta$ کی

قیمتیں θ ، β ، γ ، δ ، ϵ ، ζ ، η ، θ ہوں جن میں سے کسی دو کے ماس برابر ہوں تو ثابت کرو کہ

مس ع + مس ب + مس ج + مس ل =

۱۱۱۔ اگر مساوات جب (ط + ع) = ک جب ط کی قیمتیں

ط ، ط ، ط ، ط ہوں جن میں سے کسی دو کا تفاوت
 $\pi 2$ یا $\pi 2$ کے کسی ضعف کے برابر نہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\pi (1 + \pi 2) = \text{ط} + \text{ط} + \text{ط} + \text{ط}$$

۱۱۲۔ مسائل دفعہ ۲۴۹ کو تفصیلی عمل سے ثابت کرو

۱۱۳۔ مثالوں ذیل کو ثابت کرو

(۱) جب ع + جب ب + جب ج - جب (ع + ب + ج)

$$= \text{م جب} - \text{م جب} + \text{م جب} + \text{م جب} + \text{م جب} + \text{م جب}$$

(۲) جم ع جب ۲ (ب - ج) + جم ب جب ۲ (ج - ع) + جم ج جب ۲ (ع - ب)

$$+ ۲ \text{ جب (ب - ج) جب (ج - ع) جب (ع - ب)} =$$

۱۱۴۔ ثابت کرو کہ مساوات قط ط + قم ط = ج

کی دو قیمتیں ۰ اور $\pi 2$ کے درمیان واقع ہیں اگر $\chi > 8$

اور چار قیمتیں اگر $\chi < 8$

۱۱۵۔ اگر مثلث ا ب ج کے زاویوں کے خارجی منصفوں

کے تقاطع سے مثلث ا ب ج بنے اور مثلث ا ب ج

کے خارجی منصفوں کے تقاطع سے مثلث ا ب ج

بنے اور علیٰ ہذا القیاس تو ثابت کرو کہ اس طرح سے

چون و ان مثلث حاصل ہوگا اس کے زاویہ ان کی

قیمت $\frac{\pi}{3} + (\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3})$ کے برابر ہوگی نیز ثابت

کرو کہ مثلثوں کا میلان متساوی الاضلاع ہونی کی طرف ہے
 ۱۱۶۔ کسی مقام λ سے ایک پہاڑ کی چوٹی ϕ ٹھیک
 شمال کی طرف واقع ہے اور اس کا زاویہ ارتفاع مقام
 λ سے α ہے، نقطہ λ سے دفٹ بلند ایک پہاڑی
 کی چوٹی β ہے اور اس چوٹی سے ϕ کا زاویہ ارتفاع
 β ہے، اگر β پر کھڑے ہو کر دیکھیں تو λ کی سمت
 جانب جنوب کے مغرب کے طرف کو زاویہ λ بناتی ہے
 اور ϕ کی سمت مقام λ کے شمال کی طرف کو زاویہ
 ϕ بناتی ہے ثابت کرو کہ مقام λ سے چوٹی ϕ کی

بلندی d مس α جب β ہے

۱۱۷۔ ایک شخص نے ایک پہاڑ کے پائیں پر کھڑے
 ہو کر ایک شے کو جو آدھ میل کے فاصلہ پر تھی اسی
 سطح افقی میں مشاہدہ کیا جس میں کہ وہ خود تھا، اسکے
 بعد ۲۰۰ گز پہاڑ کے اوپر چڑھا اور اس نے دیکھا کہ
 اُس شے کا زاویہ انخفاض α ہے اور اس کی سمت
 اس کے نقطہ ابتدائی کی سمت کے ساتھ زاویہ α ہے
 کا بناتی ہے، جس راستے سے وہ پہاڑ پر چڑھتا ہے
 اس کا میلان افق کے ساتھ قریب ترین منٹ تک
 دریافت کرو

۱۱۸۔ اگر کسی مثلث کے اُس جانبی دائرہ کے محاذی

جو ضلع Δ کوس کرتا ہے اندرونی دائرہ کے مرکز پر زاویہ
۲ فیہ اور باقی دو جانبی دائروں کے مرکروں پر زاویے
۲ فیہ اور ۲ فیہ بنیں تو ثابت کرو کہ

جب ϕ جب ϕ جب ϕ = $\frac{\pi}{2}$ - $\frac{\pi}{4}$

۱۱۹۔ ایک n اضلاع کی منتظم کثیر الاضلاع کا ایک
ضلع ایک ثابت مستقیم خط پر رکھا گیا ہے اور اس
ضلع کے ایک سرے کے گرد شکل کو اتنا پھرایا گیا ہے
کہ ساتھ کا ضلع خط مستقیم پر منطبق ہو جاتا ہے، اگر اس طرح
کرنے سے شکل کو ایک پورا چکر دیا جائے تو ثابت
کرو کہ کثیر الاضلاع کا کوئی داس زاویہ $\frac{\pi}{n}$ کا $\frac{\pi}{2}$ کم
فاصلہ طے کرتا ہے جہاں سے اس دائرہ کا نصف قطر ہے جو
کثیر الاضلاع کے گرد بنایا جائے نیز ثابت کرو کہ دائروں کے
جو قطاع کوئی داس زاویہ مرسم کرتا ہے ان کے رقبوں کا
مجموعہ π ۲ ہے

۱۲۰۔ معادلات ذیل سے طہ اور فہ کو ساقط کرو

$$\frac{1}{f} \text{ جم طہ } + \frac{1}{p} \text{ جب طہ } = 1$$

$$\frac{1}{f} \text{ جم فہ } + \frac{1}{p} \text{ جب فہ } = 1$$

$$\text{جم طہ جم فہ} + \frac{\text{جب طہ جب فہ}}{p} = 1$$

اگر دو محذب $\frac{1}{2}$ خطوط $\frac{1}{2}$ ع $\frac{1}{2}$ ع ع ب
اور اق ق ق ب

ایک ہی نقاط اور باہر پر آکر ختم ہوں اور پہلا خط دوسرے کے بالکل باہر ہو تو ثابت کرو کہ پہلا خط دوسرے سے بڑا ہے

۱۲۲۔ ثابت کرو کہ

جیب (ط - جہ - عم) جیب (ط - عہ - یہ) + جیب (ط - عہ - یہ) جیب (ط - جہ - عم) جیب (جہ - یہ - عم) جیب (جہ - یہ - عم)

$$+ \text{جیب (ط - پ - ج - جیب (ط - ج - ع - ع) = 1}$$

۱۲۳۔ اگر (جی^۱ ع۔ جی^۲ ب) مم ج + (جی^۱ ب۔ جی^۲ ج) مم ع + (جی^۱ ج۔ جی^۲ ع) مم ب = تو ثابت کرو کہ یا تو دو زاویوں کا فرق π کے کسی ضعف کے برابر ہے یا تینوں زاویوں کا مجموعہ اس ضعف کے برابر ہے۔

۱۲۴- سطح افقی پر ایک پہاڑی ہے، اس کا قاعدہ گول ہے اور اس کی بیرونی شکل قطعہ کرہ کی سی ہے، سطح افقی پر کے دو مقامات سے جن کے فاصلے قاعدہ سے ۱ اور ۲ فٹ ہیں پہاڑ کے اُس نقطہ کے ارتفاعی زاویے ط اور فہ مشاہدہ کئے گئے ہیں جو سب سے اونچا دکھائی دیتا ہے، ثابت کرو کہ پہاڑی کی بلندی

$$2 \left[\frac{(b \text{ مم فہ}) - (a \text{ مم طہ})}{\text{مم فہ} - \text{مم طہ}} \right] \text{ ہے۔}$$

۱۲۵- ایک برج کی چوٹی پر ایک نصف گردی گنبد ہے اور گنبد کے سر پر صلیب ہے، کسی نقطہ پر صلیب کا زاویہ ارتفاع عہ ہے اور گنبد کا بہ، گنبد کی سیدھ میں فاصلہ ۱ جانے پر صلیب گنبد کے عین اوپر دکھائی دیتا ہے اور اُس وقت گنبد کا زاویہ ارتفاع جہ ہے، ثابت کرو کہ سطح زمین سے گنبد کے مرکز کی بلندی

$$\frac{1}{\text{جب جہ}} \times \frac{\text{جم عہ جب بہ} - \text{جب عہ جم جہ}}{\text{جم بہ} - \text{جم جہ}}$$

۱۲۶- اگر جب ۱ + جب ۲ ب + جب ۳ ج = ۱ تو ثابت کرو کہ مثلث ۱ ب ج کا بیرونی دائرہ اس کے نقطہ قطعی دائرہ کو قائم الزاویہ پر قطع کرتا ہے۔

۱۲۷- ایک دائرہ کا نصف قطر م ہے اور اس کے

محیط پر ایک ایسا نقطہ د ہے جس کو مرکز ماکر ایک اور دائرہ کھینچا گیا ہے اس دائرہ کا نصف قطر $\frac{3}{4}r$ ہے ، ان دائروں کے درمیان جو ہلال کی شکل بنتی ہے اس کے اندر ایک اور دائرہ رکھ دیا گیا ہے جس کا نصف قطر $\frac{1}{4}r$ ہے ثابت کرو کہ اگر چھوٹا دائرہ اصلی دائرہ (نصف قطر r) کے محیط پر حرکت کرے تو اس کا مرکز ایک انتہائی مقام سے دوسرے انتہائی مقام تک حرکت کرنے میں ایک ایسی قوس مرتب کرے گا جس کا طول $\frac{4}{3}\pi r$ ہو گا۔

۱۲۸۔ معادلات ذیل سے لا اور ما کو سا قط کرو

$$\text{جب لا} + \text{جب م} = \text{د}$$

$$\text{جم لا} + \text{جم م} = \text{ب}$$

$$\text{مس لا} + \text{مس م} = \text{ج}$$

۱۲۹۔ اگر ۲ جم ن طہ کو صج سے تعبیر کریں تو ثابت کرو کہ

$$\text{صج} + ۱ = \text{صم} - \text{صج} - ۱$$

اسے ثابت کرو کہ

$$۲ \text{ جم ل طہ} = \text{صم} - ۱ + \text{صم} + ۱۲ \text{ صم} - ۱$$

۱۳۰۔ عمل تریبی سے ثابت کرو کہ ۴، ۵ مساوات

جم لا = لا (جہاں لا کی پیمائش نیم قطری زادیوں میں کی گئی ہے) کا تقریبی حل ہے نیز ثابت کرو کہ مساوات کی

صرف یہی حقیقی قیمت ہے۔

۱۳۱۔ ثابت کرو کہ

جب (لا-بہ) جب (لا-جہ) جب ۲ (لا-عہ) + دو متضادہ جملے =
 جب (عہ-بہ) جب (عہ-جہ)

۱۳۲۔ اگر ا ب ج کوئی مثلث ہو تو ثابت کرو کہ

جب ۱ جم (ب-ج) + جب ۲ جم (ج-ا) + جب ۳ جم (ا-ب)
 = ۳ جب ۱ جب ۲ جب ۳ جب ج

۱۳۳۔ ایک شخص نے دو اشیا کو ٹھیک سمت مغرب میں دیکھا، اس کے بعد وہ فاصلہ ج شمال کی طرف چلا اور اُس نے اشیا کے محاذی زاویہ عہ دیکھا، شمال کی جانب میں اور فاصلہ ج جانے پر اُس نے اشیا کے محاذی زاویہ بہ مشاہدہ کیا، ثابت کرو کہ اشیا کا درمیانی فاصلہ ۲ جم عہ ہے۔

۱۳۴۔ ایک پہاڑی کا پہلو سطح ہے اور افق سے زاویہ عہ بناتا ہے، اُس پر سطح عمودی میں ایک سڑک جاتی ہے جو اُس سطح عمودی سے جو خط میلان اعظم میں سے گذرتی ہے زاویہ بہ بناتی ہے، ثابت کرو کہ سڑک کا میلان افق سے مس-ا (مس عہ جم بہ) ہے۔

۱۳۵۔ ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کے اندرونی اور بیرونی دائروں کے مرکزوں کو ملانے والا خط،

ضلع ب ج سے زاویہ مس-۲ (جم بہ + جم ج-ا) بناتا ہے۔

۱۳۶۔ معادلات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

لا جب طہ - ماجم طہ = - جب م طہ

اور لاجم طہ + ماجم طہ = $\frac{5}{4}$ - $\frac{3}{4}$ ج م طہ

۱۳۷۔ ایک منتظم کثیر الاضلاع دائرہ کے اندر بنائی گئی ہے اگر کسی نقطہ کو (جو ضروری نہیں کہ شکل کے سطح میں واقع ہو) کثیر الاضلاع کے کو نوں سے ملایا جائے اور ان خطوط کے مربعوں کا اوسط حسابی نکالا جائے تو ثابت کرو کہ یہ اوسط ان دو خطوط کے مربعوں کے اوسط حسابی کے مساوی ہوگا جو نقطہ مذکورہ اور محیط دائرہ کے قریب ترین اور بعید ترین نقاط کو ملائیں۔

۱۳۸۔ تین نقطے ا، ب، ج ایک خط مستقیم پر واقع ہیں اور ا ب کو ب ج سے وہی نسبت ہے جو م کو ن سے ہے، نقاط ا، ب، ج میں سے متوازی اور مستقیم خط لا، ب ما، جے کھینچے گئے ہیں، نقطہ ط خط لا پر حرکت کرتا ہے اور نقطہ ر خط ج سے پر اگر کسی وقت پر جوت سے بغیر ہوتا ہے $ط = ا + ل$ جب (ن ت + م)

اور فاصلہ ج ر = ج + ج جب (ن ت + م)
اور اگر مستقیم خط ط ر، ب ما کو نقطہ ق پر قطع کرے تو فاصلہ ب ق کے لئے ایک متشابہ جملہ دریافت کرو۔

۱۳۹۔ ثابت کرو کہ

جب (ب - ج) جب ۳ م + جب (ج - م) جب ۳ م + جب (م - ب) جب ۳ م

۴ = جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) جب (عہ + بہ + جہ) = ثابت کر دو کہ

جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) جب (عہ + بہ + جہ) =

۴ = جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ) جب (عہ + بہ + جہ) =

۴ = اگر جب (لا + عہ) جب (بہ - جہ) + جب (لا + عہ) جب (بہ - جہ) =

+ جب (لا + عہ) جب (عہ - بہ) = ۴ جب (بہ - جہ) جب (جہ - عہ) جب (عہ - بہ)

تو ثابت کر دو کہ لا + عہ + بہ + جہ = (۲ + ن) (۱/۲)

۴ = اگر ۱ + ب + ج = ۲ تو ثابت کر دو کہ

جبا ۱ + جبب + جبج = ۳ جب ۱/۲ جب ۱/۲ جب ۱/۲ جب ۱/۲

- جب ۱/۲ جب ۱/۲ جب ۱/۲ جب ۱/۲

۴ = ایک جھنڈا سمت راس سے کوئی زاویہ بناتا ہے

اور اس کے پائیں کو مرکز مانکر ایک افقی دائرہ کھینچا گیا ہے

ایک شخص محیط دائرہ کے گرد چلکر مشاہدہ کرتا ہے کہ

جھنڈے کے محاذی اس کی آنکھ پر بڑے سے بڑا زاویہ

عہ اور چھوٹے سے چھوٹا زاویہ بہ بنتا ہے اور جب

وہ ان مقامات کے عین وسط میں محیط دائرہ پر ہو تو

یہ زاویہ طہ ہوتا ہے، اگر آنکھ کی اونچائی کو نظر انداز

کر دیا جائے تو ثابت کر دو کہ

مس طہ = جب (عہ - بہ) + ۴ جب (عہ - بہ) / جب (عہ + بہ)

۴ = دو خطوط ایک سطح مائل پر کھینچے گئے ہیں اور

کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے مربعوں کا مجموعہ n ($1 + \frac{n-1}{2}$) ہے۔

۴۸۔ ایک دائرہ کی کسی قوس AB کے محاذی دائرہ کے مرکز پر زاویہ 2θ بنتا ہے اور نقاط A اور B پر کے n مساں نقطہ M پر ملتے ہیں، عمل ترسیبی سے θ کی قیمت قریب ترین درجہ تک اسی صورت میں دریافت کرو (۱) جبکہ دائرہ کا رقبہ A اس رقبہ کے مساوی ہو جو M A اور B قوس AB کے اندر گھرا ہوا ہے (۲) جب M A اور B کے طولوں کا مجموعہ قوس AB اور وتر AB کے مجموعہ کے برابر ہو۔

۴۹۔ ثابت کرو کہ مثلث کے زاوے ارتباطات ذیل کو پورا کرتے ہیں

$$(1) \text{ جب } 1 + \text{جب } 2 + \text{جب } 3$$

$$= 3 \text{ جب } 1 + \text{جب } 2 + \text{جب } 3 + \text{جب } 4 + \text{جب } 5 + \text{جب } 6 + \text{جب } 7 + \text{جب } 8 + \text{جب } 9 + \text{جب } 10 + \text{جب } 11 + \text{جب } 12$$

$$(2) \text{ جب } 1 + \text{جب } 2 + \text{جب } 3 + \text{جب } 4 + \text{جب } 5 + \text{جب } 6 + \text{جب } 7 + \text{جب } 8 + \text{جب } 9 + \text{جب } 10 + \text{جب } 11 + \text{جب } 12$$

$$= 3 + 2 + 1 + \text{جب } 4 + \text{جب } 5 + \text{جب } 6 + \text{جب } 7 + \text{جب } 8 + \text{جب } 9 + \text{جب } 10 + \text{جب } 11 + \text{جب } 12$$

۱۵۰۔ نقطہ O سے ایک شخص ایک پہاڑی پر سیدھے راستہ سے چڑھتا ہوا دکھائی دیا اور جب وہ دو مقامات P اور Q پر سے گذرا تو اس کے ظاہری قد کے ارتفاعی زاوے مشاہدہ کرنے سے معلوم ہوا کہ $\angle POQ = 90^\circ$ زاویہ $\angle POQ = 90^\circ$ جب مقامات P اور Q کے ارتفاع نقطہ

و سے عہ اور بہ دکھائی دے ، اگر افق سے راستہ کا میلان نہ ہو تو ثابت کرو کہ نہ مساوات ذیل کی شرائط کو پورا کرتا ہے

$$\text{جب } ۱ \text{ نہ} = (\text{ل جب عہ} - \text{جب بہ}) / (\text{ل} - ۲ \text{ جم جہ} + ۱)$$

۱۵۱- مساوات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

$$\text{لا} + ۱ = ۱ (\text{۲ جم طہ} - \text{جم ۲ طہ})$$

$$\text{اور } ۶ = ۱ (\text{۲ جب طہ} - \text{جب ۲ طہ})$$

۱۵۲- سطح مستوی میں ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے اور سطح کے کسی نقطہ سے کثیر الاضلاع کے ضلعوں پر عمود لگائے گئے ہیں ، ثابت کرو کہ ان عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ ان خطوط کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہے جو عمودوں کے پایوں کو کثیر الاضلاع کے مرکز کے ساتھ ملاتے ہیں -

۱۵۳- ایک مستطیلی کھیت کے اضلاع ۱ اور ۲

ہیں اور اس کے مرکز پر ایک کھوئی ہے جس کے ساتھ ایک رسی کے ذریعہ ایک گھوڑا بند ہے ، اگر گھوڑا ٹھیک آدھے کھیت میں بلا تکلف چر سکے تو ثابت کرو کہ رسی کا طول تقریباً ۰.۵۸۳×۱ ہے -

۱۵۴- ثابت کرو کہ مساوات جب (طہ + ل) = (۱ جب ۲ طہ + ب) کی چار قیمتیں ہیں جن کا مجموعہ دو قائموں کے طاق ضعیف

۱۵۵۔ اگر طہ کوئی مثبت حادثہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ زاویہ طہ کے بڑھنے سے نسبت $\frac{\text{طہ}}{\text{جب طہ}}$ ہمیشہ بڑھتی ہے اور $\frac{\text{طہ}}{\text{سب طہ}}$ ہمیشہ گھٹتی ہے۔

۱۵۶۔ اگر جب لا = م جب ما جہاں م ایک سے بڑا ہے تو ثابت کرو کہ جب زاویہ طہ صفر سے قائمہ تک بڑھتا ہے تو نسبت $\frac{م}{لا}$ متواتر بڑھتی ہے اور اس کی قیمتیں م اور ص کے برابر ہوتی ہیں جبکہ لا بالترتیب صفر اور ایک قائمہ کے برابر ہو۔

۱۵۷۔ ثابت کرو کہ

جب^۱ (بہ۔ جم) جب^۲ (عہ۔ لہ) + جب^۳ (جہ۔ عہ) جب^۴ (بہ۔ لہ) + جب^۵ (عہ۔ لہ) جب^۶ (بہ۔ جم) جب^۷ (لہ۔ لہ)
 = جب^۸ (عہ۔ لہ) جب^۹ (بہ۔ جم) جب^{۱۰} (جہ۔ عہ) جب^{۱۱} (عہ۔ لہ) جب^{۱۲} (بہ۔ لہ) جب^{۱۳} (لہ۔ لہ)
 ۱۵۸۔ ثابت کر دو کہ $\text{جم} (۳\text{عہ} - ۲\text{بہ} - ۱\text{جہ} - ۱\text{لہ})$
 = $۴\text{جم} (۳\text{عہ} + ۲\text{بہ} - ۱\text{جہ} - ۱\text{لہ}) + ۳\text{جم} (۲\text{عہ} + ۱\text{بہ} - ۱\text{لہ}) + ۲\text{جم} (۱\text{عہ} + ۱\text{بہ} - ۱\text{لہ})$
 جہاں جم اُن سب رقموں کے حاصل جمع کو تعبیر کرتا ہے
 جن کا عام نمونہ وہ رقم ہے جس کے ماقبل یہ علامت
 لکھی گئی ہے۔
 ۱۵۹۔ ثابت کر دو کہ

جیب (عہ + یہ + چہ) جم عہ جیب بہ جیب (عہ + بہ + چہ) جیب عہ جیب بہ جیب چہ
 - جیب (عہ + بہ + چہ) جم عہ جم بہ جم چہ - جم (عہ + بہ + چہ) جیب عہ جم بہ جم چہ
 + جیب (عہ + بہ) جم (بہ + چہ) جم (عہ + چہ) جم (بہ + چہ) جیب (چہ + عہ) =
 ۱۰۔ ثابت کرو کہ

جب^۱ عہ جب (یہ - جم) جب (جہ - لہ) جب (لہ - بہ)
 - جب^۲ بہ جب (جہ - لہ) جب (لہ - عہ) جب (عہ - جم)
 + جب^۳ جہ جب (لہ - عہ) جب (عہ - بہ) جب (بہ - لہ)
 - جب^۴ لہ جب (عہ - یہ) جب (یہ - جم) جب (جم - عہ) = ۰

۱۶۱۔ جملہ فن ق - رس کو مختصر کرو جہاں

ف = لا جم (عہ + بہ) + ما جب (عہ + یہ) - جم (عہ - بہ)
 ق = لا جم (جہ + لہ) + ما جب (جہ + لہ) - جم (جہ - لہ)
 ر = لا جم (عہ + جم) + ما جب (عہ + جم) - جم (عہ - جم)
 س = لا جم (بہ + لہ) + ما جب (بہ + لہ) - جم (بہ - لہ)
 ۱۶۲۔ اگر ۱ + با - ۲ اب جم عہ = ج + د - ۲ ج د جم جہ
 با + ج - ۲ ب ج جم بہ = ۱ + د - ۲ د د جم لہ
 اور ۱ اب جب عہ + ج د جب جہ = ب ج جب بہ + د د جب لہ

تو ثابت کرو کہ جم (عہ + جم) = جم (بہ + لہ)
 ۱۶۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$= \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \text{جم طہ} & ۱ \\ \text{جم طہ} & ۱ & \cdot & \cdot \\ \cdot & \text{جم عہ} & ۱ & \cdot \\ \cdot & \text{جم جہ} & ۱ & \cdot \end{vmatrix}$$

کا حل طہ = ن + (۱ - ج) جب (۱) جم عہ + جم بہ - ۲ جم عہ جم بہ جم جہ ہے
 جب جہ

۱۶۴۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث ا ب ج میں
 $\text{جم د} + \text{جم م ب} + \text{جم م ج} - ۱ = ۲ \text{ جب م د} + \text{جب م ب} + \text{جب م ج}$
 اگر م کی صورت بالترتیب ۴، ۳، ۲ ہو یا ۴، ۳، ۲

۱۶۵۔ ثابت کرو کہ کسی مثلث ا ب ج میں
 (۱) $\text{د}^۳ \text{ جب م ب} + \text{ج}^۳ \text{ جب م د} + \text{ب}^۳ \text{ جب م ج} = \text{ج}^۳ \text{ جب م د} + \text{د}^۳ \text{ جب م ب} + \text{ب}^۳ \text{ جب م ج}$
 $= \text{د}^۳ \text{ جب ج} + \text{ب}^۳ \text{ جب ج} + \text{ج}^۳ \text{ جب ج}$
 اور (۲) $\text{ج}^۲ \text{ م د} + \text{د}^۲ \text{ م ب} + \text{ب}^۲ \text{ م ج} = \text{ج}^۲ \text{ م د} + \text{د}^۲ \text{ م ب} + \text{ب}^۲ \text{ م ج}$
 $= (۱ - ۱) \times \text{ج}^۲ \text{ م د} + \text{د}^۲ \text{ م ب} + \text{ب}^۲ \text{ م ج}$
 ۱۶۶۔ اگر کسی مثلث کے زاوے د، ب، ج ہوں تو
 ثابت کرو کہ

$\text{سن}^۲ \text{ (م م ب جب)} + \text{سن}^۲ \text{ (م ج م د)} + \text{سن}^۲ \text{ (م د م ب)}$
 $= \text{سن}^۲ \text{ (ج} + \text{د} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} + \text{ب})$

۱۶۷۔ کسی مثلث کے نقاط الزوایا د، ب، ج میں سے
 ایسے مستقیم خط کھینچے گئے ہیں جو اضلاع ا ب، ب ج، ج د
 میں سے ہر ایک سے زاویہ ع بناتے ہیں، ثابت کرو کہ
 جو مثلث اس طرح بنتا ہے اس کے اضلاع کی نسبت
 مثلث ا ب ج کے اضلاع کے ساتھ

جم ع - جب ع (م د + م ب + م ج) : ۱ ہے
 ۱۶۸۔ سطح افقی پر اسطوانہ کی شکل کا ایک برج ہے
 اور برج کی چوٹی پر ایک مخروط ہے، سطح زمین کے

ایک مقام پر کھڑے ہو کر برج کی چوٹی کے قریب ترین نقطہ کا زاویہ ارتفاع α اور مخروط کی چوٹی کا زاویہ ارتفاع β مشاہدہ کیا گیا ہے، برج کی سیدھ میں فاصلہ l جائے، یہی زاوے بالترتیب β اور α ہو جاتے ہیں، ثابت کرو کہ برج اور مخروط کی چوٹیوں کی بلندیاں سطح زمین سے l جب α جب β (ج-ج) اور l جب β جب α (ل-ل) ہیں نیز برج کا قطر

۲ l جب β جب α (ل-ل) - ۲ l جب α جب β (ج-ج) ہے
 ۱۶۹ - سطح زمین کے نیچے ایک پتھر کی تہ ہے، اور اسکا میلان افق سے دریافت کرنے کے لئے ایک افقی مربع کے تین نقاط پر عمودی سوراخ کھودے گئے ہیں۔ ان نقاط پر تہ کی گہرائیاں بالترتیب l ، b ، c ہیں

ثابت کرو کہ یہ میلان افق سے α - l (ل-ل) + b (ب-ب) ہے
 جہاں d مربع کے ضلع کو تعبیر کرتا ہے۔
 ۱۷۰ - ایک پہاڑ کے مقابل کی جانبوں میں دو مقام l اور b ہیں، l سے b تک ایک سرنگ نکالنی منظور ہے، l اور b سے ایک دور کے مقام c کے ارتفاعی زاوے α اور β مشاہدہ کئے گئے ہیں اور زاویہ α β = β ، نیز l اور b کے طول l اور b معلوم ہیں، ثابت کرو کہ مقام b کی بلندی (د) مقام l

= (ج ب ع) - ب جب ب اور ا ب کا طول (ل) = م ا د ب - ۲ ا ب ج م جہ
اور خط ا ب افق سے زاویہ جب ا ج اور خط ا ج سے
زاویہ جب ا ب جب ج بناتا ہے۔

۱۷۱ - ایک پہاڑی کا زاویہ ارتفاع نہ ہے، ایک شخص
ایسی سمت میں اس کے اوپر چڑھنا شروع کرتا ہے
جو خط میلان اعظم سے زاویہ لہ بناتی ہے، فاصلہ ن
اوپر چڑھنے کے بعد وہ دیکھتا ہے کہ ایک ایسی شے کا
زاویہ انخفاض عہ ہے جو اُس کی سمت طریق میں سے گزرنے
والی عمودی سطح اور پائیں کوہ میں سے گزرنے والی افقی
سطح میں واقع ہے، اس کے بعد وہ فاصلہ ن اور
اوپر چڑھکر دیکھتا ہے کہ اسی شے کا زاویہ انخفاض
بہ ہے، ثابت کرو کہ زاویہ ارتفاع نہ مساوات ذیل کو
حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\{ \text{ج} - (\text{م م بہ} - \text{م م عہ}) + \text{م م بہ} \} + \text{ا} = \text{م م نہ قط لہ}$$

۱۷۲ - ایک پہاڑ کی تین چوٹیاں ہیں، جن میں سے
ا سب سے نیچی ہے اور چوٹی ا سے ب کی
بلندی (د) معلوم ہے، چوٹی ا سے ب اور ج کے
ارتفاعی زاوے بہ اور جہ مشاہدہ کئے گئے ہیں،
اگر ا ب اور ا ج میں سے گزرنے والی عمودی
سطحوں کا درمیانی زاویہ طہ ہو اور نقطہ ب پر

ب ۱ اور ب ج میں سے گذرنے والی عمودی سطحوں کا
درمیانی زاویہ فہ دکھائی دے تو ثابت کرو کہ چوٹی ۱ سے چوٹی
ج کی بلندی د مم بہ مس جیہ جب فہ قم (طہ + فہ) ہے
۱۷۳۔ ایک پہاڑ کے سطح پہلو پر دو سیدھے راستے
ب ج اور ج ۱ ہیں، ان کے طول بالترتیب ۱ اور ۲
ہیں اور دونوں کا چڑھاؤ اوپر کی طرف م میں ۱ ہے
(یعنی م افقی میں ۱ عمودی) اور نقطہ ب سے ۱ تک
چڑھاؤ ف میں ۱ ہے، ثابت کرو کہ پہاڑ کے پہلو کا
میلان افق سے عہ ہے جہاں

۲ ۱ ب مم عہ = (۱ + ب) ف - (۱ کہ ب) م
۱۷۴۔ ثابت کرو کہ مثلث کے اندرونی اور نو نقطی
دائروں کے مرکزوں کا باہمی فاصلہ $\frac{1}{2}$ رہے،
اس سے فیوریک کا مسئلہ حاصل کرو یعنی
ثابت کرو کہ کسی مثلث کے اندرونی اور نو نقطی دائرے
ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں۔

۱۷۵۔ ۱ ب ج د ایک ذو اربعۃ الاضلاع ہے، اس میں
۱ ب = ۳، بیج = ۴، ج د = ۵ اور د ۱ = ۶ فٹ
اور اس کا رقبہ = ۳۳ + ۹ مربع فٹ ثابت کرو کہ
ان شرائط کو پورا کرنے والی دو اشکال ذو اربعۃ الاضلاع

ہیں جن میں بالترتیب زاویہ ب کی قیمتیں جم - ۱ - ۱۲۲ [۳۲، ۴۴]

یعنی تقریباً ۶۰° اور ۱۷۵° ۱۵ ہیں
۱۷۶۔ معادلات ذیل سے عہ، ہ، جہ کو ساقط کرو

$$۱ \text{ جم عہ} + ۲ \text{ ب جم بہ} + ۳ \text{ ج جم جہ} = ۰$$

$$۱ \text{ جب عہ} + ۲ \text{ ب جب بہ} + ۳ \text{ ج جب جہ} = ۰$$

$$۱ \text{ قط عہ} + ۲ \text{ ب قط بہ} + ۳ \text{ ج قط جہ} = ۰$$

۱۷۷۔ معادلات ذیل سے طہ کو ساقط کرو

$$\text{مس (طہ - عہ)} + \text{مس (طہ - بہ)} = \text{لا}$$

$$\text{مم (طہ - عہ)} + \text{مم (طہ - بہ)} = \text{ما}$$

۱۷۸۔ معادلات ذیل سے فہ کو ساقط کرو

$$\text{لا جم ۳ فہ} + \text{ما جب ۳ فہ} = \text{ب جم فہ}$$

$$\text{اور لا جب ۳ فہ} + \text{ما جم ۳ فہ} = \text{ب جم (فہ + ۳۰°)}$$

۱۷۹۔ ایک دائرہ کا نصف قطر ۱ ہے اور اس کے

اندروں اور ن اضلاع کی دو منتظم اشکال کثیرالاضلاع بنائی گئی ہیں، ثابت کرو کہ ان تمام وتروں کے مجموعہ کا مجموعہ جو ایک کثیرالاضلاع کے ایک کونے کو دوسری کثیرالاضلاع کے ایک کونے کے ساتھ ملانے سے حاصل ہوتے ہیں ۲۰ م ن ہے

۱۸۰۔ ایک محیط دائرہ کے گرد ۲۰ پتھر برابر برابر

فاصلوں پر ترتیب دیئے گئے ہیں۔ ان سب کو دائرہ کے مرکز تک اٹھا کر یگانے میں جتنی محنت درکار ہو اس کا مقابلہ اُس محنت سے کرو جو ایک پتھر کے گرد ان سب کا انبار لگانے میں درکار ہو،

نیز ثابت کرو کہ اگر پتھروں کی تعداد کو لا انتہا بڑھا دیا جائے تو یہ نسبت $\pi : 2$ ہو جائے گی۔

۱۸۱۔ عمل ترسیبی سے یا کسی اور طرح سے مساوات $2 + 2 = 4$ کی ان قیمتوں کی تعداد دریافت کرو جو π کے درمیان واقع ہوں، اور سب سے بڑی قیمت کی تقریبی قیمت دریافت کرو۔ بدلوں سے اپنے نتیجہ کی تصدیق کرو۔

۱۸۲۔ لا کی چھوٹی سے چھوٹی مثبت قیمت دریافت کرو جو شرائط مساوات $2 + 2 = 4$ کو پورا کرے۔
۱۸۳۔ جملہ جب لا کی ترسیم بناؤ اور ثابت کرو کہ اگر لا ایک چھوٹی مثبت مقدار ہو تو مساوات $2 + 2 = 4$ جب لا کی تین حقیقی قیمتیں ہوں گی۔

۱۸۴۔ ثابت کرو کہ مساوات $2 + 2 = 4$ جسے لا کی ایسی حقیقی قیمتوں کے تقریبات جو مقابلہ بڑی ہوں مساوات $2 + 2 = 4$ سے حاصل ہوتے ہیں

جہاں م کوئی بڑا طاق صحیح عدد ہے
۱۸۵۔ عمل ترسیبی سے مساوات $2 + 2 = 4$ کی تعداد سب سے چھوٹی مثبت اور منفی قیمتوں کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو۔

نیز ثابت کرو کہ اس مساوات کی بڑی قیمتوں کی تقریبی

قیمتیں مساوات $\text{لا} = \text{ن} + \frac{\text{ن} - ۱}{۲۲}$ سے حاصل ہوتی ہیں، اس میں ن کوئی بڑی مقدار ہے۔
 ۱۸۶۔ ثابت کرو کہ مساوات $\text{مس} \text{لا} = ۲$ لا کی قیمت جو صفر اور $\frac{۲۲}{۲}$ کے درمیان واقع ہے تقریباً ۱۶۵۴ ہے معلوم ہے $\text{مس} ۱۵۱۹ = ۲۶۲۶۰$ اور $\text{مس} ۱۶۹۴ = ۲۶۵۵۹$
 ۱۸۷۔ اگر طہ کوئی حادثہ زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس طہ ہمیشہ طہ} + \frac{\text{طہ}^۲}{۳} + \frac{\text{طہ}^۳}{۱۵} + \dots + \frac{\text{طہ}^{۲۰} + ۱}{۱ - ۲} + \dots$$

سے بڑا ہوگا
 ۱۸۸۔ اگر ا، ب، ع، ہ مستقل مقدار میں ہوں تو ثابت کرو کہ مساوات

جم (طہ - ع) + اجم (طہ - ب) + ب =
 کی قیمتوں کے چار مختلف مجموعے ہیں اور اگر ان مختلف مجموعوں کی کسی چار قیمتوں کو طہ، طہ، طہ، طہ سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ طہ + طہ + طہ + طہ - ۲ ع، ۲۲ کا جفت ضعف ہے۔

۱۸۹۔ اگر شرائط مساوات

$$\text{میم (طہ + ع)} + \text{میم (طہ + ب)} + \text{میم (طہ + ج)} = \text{میم (طہ + ع)} + \text{میم (طہ + ب)} + \text{میم (طہ + ج)}$$

طہ، طہ، طہ سے پوری ہو سکیں جن میں سے کسی دو کا فرق ۲ قائموں کے ضعف کے برابر نہ ہو تو ثابت کرو

ط + ط + ط + ط + ع + ہ + ج = ط ۲ کے کسی ضعیف کے برابر ہوگا

۱۹۰۔ ثابت کرو کہ بالعموم مساوات

$$1 \text{ جب } 2 \text{ لا} + 1 \text{ ب جم } 3 \text{ لا} + 1 \text{ ج} = 0$$

کی چھ مختلف قیمتیں ہیں جن میں سے کسی دو کا تفاوت ط ۲ کے برابر نہیں ہو سکتا، نیز ثابت کرو کہ ان کے مجموعہ کا ماس $\frac{1}{2}$ ہے۔

۱۹۱۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$\text{مس} (ط - ع) + \text{قط} (ط - ب) = \text{م ج}$$

کی چار قیمتیں ایسی ہیں (جن میں سے کسی دو کا فرق ط ۲ کے اصغاف کے برابر نہیں) جو ربط ذیل کو پورا کرتی ہیں

$$\text{ط} + \text{ط} + \text{ط} + \text{ط} = 2 (\text{ن} + \text{ع} + \text{ہ} - \text{ج})$$

۱۹۲۔ اگر لا کی تین قیمتیں ع، ہ، ج مساوات

$$\text{جب } 2 \text{ ط} (1 \text{ جب } 1 \text{ لا} + 1 \text{ ب جم } 1 \text{ لا}) = \text{جب } 2 \text{ لا} (1 \text{ جب } 1 \text{ ط} + 1 \text{ ب جم } 1 \text{ ط})$$

کو پورا کریں اور ان میں سے کسی دو کا باہمی فرق یا ان میں سے کسی ایک اور ط کا فرق ط ۲ کے کسی ضعیف سے تعبیر نہ ہو سکے تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ع} - \text{مس ہ} - \text{مس ج} + \text{مس ط} = 1$$

۱۹۳۔ اگر مساوات ۱ جم ۲ ط + ۱ ب جب ۲ ط + ۱ ج جم ۲ ط + ۱ د = 0

کی چار مختلف قیمتیں ط، ط، ط، ط ہوں تو

$$\text{ثابت کرو کہ } 1 \text{ ج جب } 1 \text{ ط} + 1 \text{ ط} + 1 \text{ ط} - 1 \text{ ط} = 0$$

لا کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ہو جہاں مستقل مقداروں
 '۱'، '۲'..... میں لا شامل نہیں ہے، تو ثابت کرو کہ
 ان مستقل مقداروں میں سے ہر ایک صفر کے برابر ہوگی

جوابات -

امثلہ ۱ (صفحہ ۱۱-۱۲)

- ۱- $\frac{2}{3}$ ۲- $\frac{30.1}{34.0}$ ۳- $\frac{45549}{42800}$
- ۴- $\frac{9}{2}$ ۵- $\frac{3441}{10800}$ ۶- $\frac{388}{3325}$
- ۷- $\frac{3}{4}$ ۸- $\frac{3}{4}$ ۹- $\frac{3}{4}$
- ۱۰- $\frac{3}{4}$ ۱۱- $\frac{3}{4}$ ۱۲- $\frac{3}{4}$
- ۱۳- $\frac{1}{5}$ زاویہ قائمہ ' ۱۰۸
- ۱۴- 53522 زاویہ قائمہ ' 90° 15664
- ۱۵- 394534 زاویہ قائمہ ' 35° 195444
- ۱۶- 55.809 زاویہ قائمہ ' 229° 114
- ۱۷- 559000.5 زاویہ قائمہ ' 983° 4 1542

$$۲۸ - ۵ \text{ } ۳۳ \text{ } ۲۰ \text{ } ۹۹$$

$$۲۹ - ۶ \text{ } ۱۹ \text{ } ۳۲ \text{ } ۱۲ \text{ } ۳۱ - ۳۳ \text{ } ۲۰ \text{ } ۱۰ \text{ } ۲۸$$

امثله ۲ (صفحہ ۱۷-۱۸)

$$۱ - ۲۵۱۳۲۷۷۴ \text{ } ۲۵ \text{ } ۱۳۲۷۷۴ \text{ } ۲۵ \text{ } ۱۳۲۷۷۴ \text{ } ۲۵ \text{ } ۱۳۲۷۷۴$$

$$۲ - ۱۹۷۲۸ \text{ } ۱۹ \text{ } ۷۲۸ \text{ } ۱۹ \text{ } ۷۲۸ \text{ } ۱۹ \text{ } ۷۲۸$$

$$۳ - ۱۲۷۸۵ \text{ } ۱۲ \text{ } ۷۸۵ \text{ } ۱۲ \text{ } ۷۸۵ \text{ } ۱۲ \text{ } ۷۸۵$$

$$۴ - ۳۷۱۳۱۵۹ \text{ } ۳۷ \text{ } ۱۳۱۵۹ \text{ } ۳۷ \text{ } ۱۳۱۵۹ \text{ } ۳۷ \text{ } ۱۳۱۵۹$$

$$۵ - ۱۳۷۹۹۴ \text{ } ۱۳ \text{ } ۷۹۹۴ \text{ } ۱۳ \text{ } ۷۹۹۴ \text{ } ۱۳ \text{ } ۷۹۹۴$$

امثله ۳ (صفحہ ۲۲-۲۳)

$$۱ - ۹۰۰ \text{ } ۹ \text{ } ۰۰ \text{ } ۹۰۰ \text{ } ۹ \text{ } ۰۰ \text{ } ۹۰۰ \text{ } ۹ \text{ } ۰۰$$

$$۲ - ۵۸۷۴ \text{ } ۵۸ \text{ } ۷۴ \text{ } ۵۸۷۴ \text{ } ۵۸ \text{ } ۷۴ \text{ } ۵۸۷۴ \text{ } ۵۸ \text{ } ۷۴$$

$$۳ - ۳۳۳ \text{ } ۳۳ \text{ } ۳۳ \text{ } ۳۳۳ \text{ } ۳۳ \text{ } ۳۳ \text{ } ۳۳۳ \text{ } ۳۳ \text{ } ۳۳$$

$$۴ - ۱۰ \text{ } ۱۰ \text{ } ۱۰ \text{ } ۱۰ \text{ } ۱۰ \text{ } ۱۰ \text{ } ۱۰ \text{ } ۱۰ \text{ } ۱۰$$

$$۵ - ۱۲ \text{ } ۱۲ \text{ } ۱۲ \text{ } ۱۲ \text{ } ۱۲ \text{ } ۱۲ \text{ } ۱۲ \text{ } ۱۲ \text{ } ۱۲$$

$$۶ - ۱۳ \text{ } ۱۳ \text{ } ۱۳ \text{ } ۱۳ \text{ } ۱۳ \text{ } ۱۳ \text{ } ۱۳ \text{ } ۱۳ \text{ } ۱۳$$

$$۷ - ۱۵ \text{ } ۱۵ \text{ } ۱۵ \text{ } ۱۵ \text{ } ۱۵ \text{ } ۱۵ \text{ } ۱۵ \text{ } ۱۵ \text{ } ۱۵$$

$$۸ - ۱۸ \text{ } ۱۸ \text{ } ۱۸ \text{ } ۱۸ \text{ } ۱۸ \text{ } ۱۸ \text{ } ۱۸ \text{ } ۱۸ \text{ } ۱۸$$

- ۷- ۳۹۵۹۶۸ میل تقریباً ۸- ۱۱ فٹ = ۳۱۵۹۶۸ فٹ
 ۹- ۴:۵ -۱۰- ۳۵۱۴۱۶
 ۱۱- $\frac{۱۲}{۳۵}$ ، $\frac{۱۹}{۳۵}$ ، $\frac{۱۴}{۳۵}$ ، $\frac{۱۹}{۳۵}$ ، $\frac{۱۲}{۳۵}$ نیم قطر سی
 ۱۲- ۲۴ ۹۵ ۳۰۵ میل تقریباً ۱۳- ۲۰۴۲۵۴۵ فٹ تقریباً
 ۱۴- ۱۵۳۵۹ فٹ تقریباً ۱۵- ۲۴۲۵۴ فٹ تقریباً
 ۱۶- ۳۲۱۴۲۵۹ فٹ تقریباً ۱۷- ۳۸۱۹۶۶۲ فٹ تقریباً
 ۱۸- ۱۹۶۰۹۹ -۱۹- ۱۱۰۵۶۸ میل
 ۲۰- ۲۳۸۸۳۳ میل ۲۱- ۲۱۴۰۰ ، ۶۸۷۵۵۵ تقریباً
 ۲۲- ۱۰ × ۴۷۸ میل

امثلہ ۶ (صفحہ ۴۶-۴۷)

- ۵- $\frac{۱۵}{۳}$ ، $\frac{۱}{۱۵}$ ، وغیرہ ۶- $\frac{۱۲}{۱۳}$ ، $\frac{۱۲}{۵}$
 ۷- $\frac{۱۱}{۴۰}$ ، $\frac{۴۰}{۴۱}$ ، $\frac{۴۱}{۴۰}$ ۸- $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۳}{۵}$
 ۹- $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۳}{۴}$ ۱۰- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۱}{۵}$ ، $\frac{۳}{۵}$
 ۱۱- $\frac{۳}{۲}$ ۱۲- $\frac{۱۵}{۱۲}$ ، $\frac{۱۲}{۸}$
 ۱۳- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۳}{۵}$ ۱۴- $\frac{۳}{۵}$
 ۱۵- $\frac{۳}{۵}$ ، $\frac{۳}{۱۳}$ ، $\frac{۳}{۵}$

$$\begin{array}{rcl}
 12 & - & 13 \\
 18 & - & 19 \\
 20 & - & 21 \\
 22 & - & 23 \\
 24 & - & 25 \\
 26 & - & 27 \\
 28 & - & 29 \\
 30 & - & 31 \\
 32 & - & 33 \\
 34 & - & 35 \\
 36 & - & 37 \\
 38 & - & 39 \\
 40 & - & 41 \\
 42 & - & 43 \\
 44 & - & 45 \\
 46 & - & 47 \\
 48 & - & 49 \\
 50 & - & 51 \\
 52 & - & 53 \\
 54 & - & 55 \\
 56 & - & 57 \\
 58 & - & 59 \\
 60 & - & 61 \\
 62 & - & 63 \\
 64 & - & 65 \\
 66 & - & 67 \\
 68 & - & 69 \\
 70 & - & 71 \\
 72 & - & 73 \\
 74 & - & 75 \\
 76 & - & 77 \\
 78 & - & 79 \\
 80 & - & 81 \\
 82 & - & 83 \\
 84 & - & 85 \\
 86 & - & 87 \\
 88 & - & 89 \\
 90 & - & 91 \\
 92 & - & 93 \\
 94 & - & 95 \\
 96 & - & 97 \\
 98 & - & 99 \\
 100 & - & 101
 \end{array}$$

مثلاً ۸ (صفحات ۶۴-۶۸)

- ۱- ۴۴۴۴۴۴۴۴ ۲۰ فٹ ۲- ۱۶۰ فٹ
- ۳- ۲۲۵ فٹ ۴- ۱۳۶۴۴ فٹ
- ۵- ۴۴۴۴۴۴۴۴ ۶- ۳۶۴۴۴۴۴۴
- ۷- ۸۶۴۴۴ فٹ ۸- ۱۱۵۴۳۵۹۴ فٹ
- ۹- ۸۴۴۴۴۴۴۴ ۱۰- ۳۴۴۴۴۴۴۴
- ۱۱- ۹۴۴۴۴۴۴۴ ۱۲- ۱۳۴۴۴۴۴۴
- ۱۳- ۱۳۰ ۱۴- ۱۳۴۴۴۴۴۴
- ۱۵- ۱۳۴۴۴۴۴۴ ۱۶- ۲۵۴۴۴۴۴۴
- ۱۷- ۱۳۴۴۴۴۴۴ ۱۸- ۱۰۴۴۴۴۴۴
- ۱۹- ۱۰۴۴۴۴۴۴ ۲۰- ۸۶۴۴۴۴۴۴

۲۱۔.....۹۹۲۳۸ گز

امثلہ ۹ (صفحات ۹۱-۹۳)

$$۱۔ \frac{۲۲۵۰}{۹۲۸۹} \pi \quad \frac{۲۵۰۰}{۹۲۸۹} \pi \quad \text{اور} \quad \frac{۸۱}{۳۳۱} \pi \quad \text{نیم قطری زاوے}$$

$$۲۔ ۹۸ \quad ۲۵ \quad ۱۷۵۸$$

$$۳۔ \frac{۲ \text{ لا}}{۲ \text{ لا} + ۲} \quad \frac{۲ \text{ لا}}{۲ \text{ لا} - ۲}$$

$$۸۔ \frac{۱}{\text{مس}} - \frac{۱}{\text{مس}} \quad ۹۔ ط = ۹۰^\circ$$

$$۱۰۔ \frac{۱}{۳} \text{ منٹ میں}$$

امثلہ ۱۰ (صفحات ۱۰۶-۱۰۷)

$$۴۔ ۱۳۴۶۵ \quad ۲۵۳۰۹۴$$

$$۵۔ ۱۳۴۶۵ \quad ۲۵۳۰۹۴$$

$$۶۔ ۱۳۴۶۵ \quad ۲۵۳۰۹۴$$

$$۸۔ ۱۳۴۶۵ \quad ۲۵۳۰۹۴$$

$$۹۔ ۲۵^\circ \text{ اور } ۱۳۵^\circ \quad ۱۰۔ ۲۰^\circ \text{ اور } ۱۴۰^\circ$$

$$۱۱۔ ۳۵^\circ \text{ اور } ۱۳۵^\circ \quad ۱۲۔ ۵۰^\circ \text{ اور } ۱۳۰^\circ$$

$$۱۳۔ ۵۰^\circ \text{ اور } ۲۱۰^\circ \quad ۱۴۔ ۲۱۰^\circ \text{ اور } ۱۳۰^\circ$$

$$۱۵۔ \text{جہم} \quad ۱۶۔ \text{جب } ۹۰^\circ$$

$$۱۷۔ \text{میں } ۳۳^\circ \quad ۱۸۔ \text{جب } ۲۲^\circ$$

۱۹- جب ۷	۲۰- محم ۲
۲۱- جم ۳۳	۲۲- جم ۱۸
۲۳- جم ۲۵	۲۴- جم ۳۰
۲۵- محم ۲۶	۲۶- قم ۲۳
۲۷- قم ۳۶	۲۸- منفی
۲۹- منفی	۳۰- مثبت
۳۱- صفر	۳۲- مثبت
۳۳- مثبت	۳۴- مثبت
۳۵- منفی	

$$۲۶- \frac{۱}{۳۱} \text{ اور } \frac{۲۸-}{۳۱} \text{ ، } \frac{۱}{۳۱} \text{ اور } \frac{۲۷-}{۳۱}$$

امثلہ ۱۱ (صفحات ۱۱۷ - ۱۱۹)

۱- $\frac{n}{4}(1-) + n$	۲- $\frac{n}{4}(1-) - n$
۳- $\frac{n}{4}(1-) + n$	۴- $\frac{n}{4} \pm n$
۵- $\frac{n}{4} \pm n$	۶- $\frac{n}{4} \pm n$
۷- $\frac{n}{4} + n$	۸- $\frac{n}{4} + n$
۹- $\frac{n}{4} + n$	۱۰- $\frac{n}{4} \pm n$
۱۱- $\frac{n}{4}(1-) + n$	۱۲- $\frac{n}{4} \pm n$

$$\begin{array}{ll}
 ۱۳- \frac{\pi}{4} \pm \pi \text{ ن} & ۱۴- \frac{\pi}{4} \pm \pi \text{ ن} \\
 ۱۵- \frac{\pi}{4} \pm \pi \text{ ن} & ۱۶- \frac{\pi}{4} \pm \pi \text{ ن} \\
 ۱۷- \frac{\pi}{4} \pm \pi \text{ ن} & ۱۸- \frac{\pi}{4} + \pi (1 + \text{ن}) \\
 ۱۹- \frac{\pi}{4} \pm \pi \text{ ن} &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 ۲۰- ۰.۵ \text{ اور } ۰.۵, \left(\frac{\pi}{4} + \text{ن} \right) \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} (1 - \text{ن}) \\
 \text{اور } \left(\frac{\pi}{4} - \text{ن} \right) \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} (1 - \text{ن}) \text{ جہاں م اور ن} \\
 \text{کوئی صحیح عدد ہیں۔}
 \end{array}$$

$$۲۱- \frac{1}{4} \pm \frac{\pi}{4} \text{ اور } \frac{1}{4} \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} - \pi \left(\frac{\pi}{4} - \text{ن} \right) \text{ اور } \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + \pi \left(\frac{\pi}{4} + \text{ن} \right)$$

$$۲۲- (۱) ۰.۵ \text{ اور } ۰.۵, (۲) ۰.۵ \text{ اور } ۰.۵, (۳) ۰.۵ \text{ اور } ۰.۵$$

$$۲۳- (۱) ۰.۵, (۲) ۰.۵, (۳) ۰.۵, (۴) ۰.۵, (۵) ۰.۵$$

مثلاً ۱۲ (صفحہ ۱۲۰-۱۲۲)

$$\begin{array}{ll}
 ۱- \frac{\pi}{4} \pm \pi \text{ ن} & ۲- \frac{\pi}{4} \pm \pi \text{ ن} \\
 ۳- \frac{\pi}{4} \pm \pi \text{ ن} & ۴- \frac{\pi}{4} \pm \pi \text{ ن} \\
 ۵- \frac{\pi}{4} \pm \pi \text{ ن} &
 \end{array}$$

$$۶- ط = ط۲ \pm \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$۸- ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$۹- مس ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$۱۱- ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$۱۲- ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$۱۳- ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$۱۵- جب ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$۱۶- ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$۱۸- ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$۲۰- ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$۲۱- ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$۲۲- ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$۲۳- ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$۲۵- ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi \quad ط = ط۲ + \pi$$

$$-۲۷ \quad \frac{e}{f} \pm \frac{\pi}{f} \left(\frac{1}{f} + n \right) - ۲۸ \quad \frac{\pi}{f} \left(\frac{1}{f} + n \right)$$

$$-۲۹ \quad \frac{e}{f} \pm \frac{\pi n}{f} - ۳۰ \quad \frac{\pi}{f} \pm \pi n$$

$$-۳۱ \quad \frac{\pi}{m-n} \left(\frac{1}{f} + r \right)$$

$$-۳۲ \quad \text{مس ط} = \frac{\sqrt{1 + n^2} \pm \sqrt{1 + n^2 + 2n - 5} \sqrt{1 + n^2}}{f} < 1$$

یا $2 >$

$$-۳۳ \quad \text{ط} = \frac{\pi}{f} \left(\frac{n}{f} + m \right) \pm \frac{\pi}{f} (1 - \frac{n}{f})$$

$$= \frac{\pi}{f} \left(\frac{n}{f} - m \right) \pm \frac{\pi}{f} (1 - \frac{n}{f})$$

$$-۳۴ \quad \frac{1}{5} \left[\frac{\pi}{f} \pm \pi (m^2 - n^2) \right] \text{ اور } \left[\frac{\pi}{f} \mp \pi \pm \pi (m^2 - n^2) \right] \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} \left[\frac{\pi}{f} \mp \pi \pm \pi (m^2 - n^2) \right]$$

$$-۳۵ \quad ۴۵^\circ \text{ اور } ۹۰^\circ - ۳۶ \quad \frac{1}{f} \text{ یا } \frac{5}{f}$$

$$-۳۷ \quad \frac{1}{f} \pm \frac{5}{f}$$

امثلہ ۱۳ (صفحات ۱۳۱-۱۳۲)

$$-۱ \quad \frac{۱۳۳}{۲۰۵} - \frac{۸۴}{۲۰۵} - ۲ \quad \frac{۱۵۹۶}{۳۲۴۵} - \frac{۳۲۴۴}{۳۲۴۵}$$

$$-۳ \quad \frac{۲۲۰}{۲۱} - \frac{۱۷۱}{۲۲۱} - \frac{۲۲۰}{۲۲۱}$$

امثلہ ۱۴ (صفحات ۱۳۶ - ۱۳۹)

$$۳ - ۲ \text{ جب } (ط + ن فہ) \text{ جب } \frac{۳}{۴} فہ$$

$$۳ - ۲ \text{ جب } (ط + ن فہ) \text{ جم } \frac{۳}{۴} فہ$$

امثلہ ۱۵ (صفحات ۱۴۰ - ۱۴۱)

$$۱ - \text{جم } ۲ طہ - \text{جم } ۱۲ طہ \quad ۲ - \text{جب } ۲ طہ - \text{جب } ۲ طہ$$

$$۳ - \text{جم } ۱۲ طہ + \text{جم } ۸ طہ \quad ۴ - \text{جم } ۱۲ طہ - \text{جم } ۱۲ طہ$$

امثلہ ۱۶ (صفحات ۱۴۵ - ۱۴۶)

$$۱ - ۳ \quad \frac{۹}{۱۳}$$

امثلہ ۱۷ (صفحات ۱۵۵ - ۱۵۸)

$$۱ - \frac{۲۴}{۲۵} \pm (۱) \quad \frac{۱۲۰}{۱۹۹} \pm (۲) \quad \frac{۲۰۱۴}{۴۲۲۵} (۳)$$

$$۲ - \frac{۱۹۱}{۲۸۹} (۱) \quad \frac{۴}{۲۵} - (۲) \quad \frac{۱۱۹}{۱۹۹} (۴)$$

$$۳ - ۱$$

امثلہ ۱۸ (صفحات ۱۶۲ - ۱۶۶)

$$۱ - \frac{۳۱}{۴} \pm \frac{۳۱}{۴} \pm \frac{۳۱}{۴} \pm \frac{۳۱}{۴}$$

$$۲ - \frac{۱۳۱}{۲} \pm \frac{۱۳۱}{۲} \pm \frac{۱۳۱}{۲} \pm \frac{۱۳۱}{۲}$$

- ۳- $\frac{14}{3.5}$ ، $\frac{29}{3.5}$ -۴ $\frac{6}{2h.5}$
- ۵- $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{2} \pm -4$
- ۷- $\frac{4h - 2h - 2h}{2h^2}$ ، $\frac{4h + 2h + 2h}{2h^2}$ ، $\frac{1-2h}{1-2h}$
- ۸- $\sqrt{4 - 2 - 2} = 0$ ، $\sqrt{4 + 2 - 2} = 2$ اور -۲۳
- ۲۴- اور -۲۵
- ۲۹- (۱) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$
- (۲) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$
- (۳) $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$
- (۴) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$
- ۳- (۱) $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$
- (۲) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$
- (۳) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$ اور $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$

امثلہ ۱۹ (صفحات ۱۸۰-۱۸۱)

۱۲- زاویہ کی جیب ۲ جب ۱۸ کے برابر ہے

۱۳- $\frac{\pi}{8}$ یا $\frac{\pi}{8} (2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$

امثلہ ۲۱ (صفحات ۱۹۸-۲۰۰)

۱- $\frac{\pi}{4}$ یا $\frac{\pi}{4} (2 \pm \frac{\pi}{\sqrt{2}})$

۲- $\frac{\pi}{4} (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ یا $\frac{\pi}{4} (2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$

۳- $\frac{\pi}{4} (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ یا $\frac{\pi}{4} (2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$

۴- $\frac{\pi}{4} (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ یا $\frac{\pi}{4} (2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$

۵- $\frac{\pi}{4} (2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ یا $\frac{\pi}{4} (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$

۶- $\frac{\pi}{4} (2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ یا $\frac{\pi}{4} (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$

۷- $\frac{\pi}{4} (2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ یا $\frac{\pi}{4} (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$

۸- $\frac{\pi}{4} (2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ یا $\frac{\pi}{4} (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$

۹- $\frac{\pi}{4} (2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ یا $\frac{\pi}{4} (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$

۱۰- $\frac{\pi}{4} (2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$ یا $\frac{\pi}{4} (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$-۱۱ \quad \frac{\pi}{\gamma} \left(\frac{1}{\gamma} + \alpha \right) \leq \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{\gamma} + \alpha \right)$$

$$-۱۲ \quad \pi \mu \leq \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\pi^2}{\gamma} (1 - \alpha) - \pi \mu \right]$$

$$-۱۳ \quad \frac{\pi^2 \mu^2}{1 \pm \alpha} \leq \pi \mu^2 \quad -۱۴ \quad \frac{\pi \mu^2}{\alpha + \mu} \leq \frac{\pi}{\mu} (1 + \mu^2)$$

$$-۱۵ \quad \pi (1 + \mu^2) \leq \mu \pm \alpha$$

$$-۱۶ \quad \pi \mu \leq \frac{\pi \mu}{1 - \alpha} \leq \frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{1}{\gamma} + \mu \right)$$

$$-۱۷ \quad \frac{\pi}{\gamma} - \pi \alpha^2 \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\pi}{\gamma} - \pi \alpha^2 \right)$$

$$-۱۸ \quad \frac{\pi}{\gamma} - \frac{\pi}{\gamma} (1 - \alpha) + \pi \alpha \leq \frac{\pi}{\gamma} + \pi \alpha^2$$

$$-۱۹ \quad \frac{\pi}{\gamma} (1 - \alpha) + \frac{\pi}{\gamma} + \pi \alpha \leq \frac{\pi}{\gamma} + \pi \alpha^2$$

$$-۲۰ \quad \left[\frac{1}{\gamma} \frac{1}{\alpha} \right] (1 - \alpha) + \frac{1}{\alpha} \times \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}$$

$$-۲۱ \quad \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \times \alpha \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \times \alpha$$

$$-۲۲ \quad \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \times \alpha \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \times \alpha$$

$$-۲۳ \quad \frac{\pi}{\gamma} + \pi \alpha^2 \leq \pi \alpha^2 \quad -۲۴ \quad \frac{\pi^2}{\gamma} + \pi \alpha^2$$

$$-۲۵ \quad \frac{\pi}{\gamma} + \pi \alpha^2 \leq \frac{\pi}{\gamma} - \pi \alpha^2 \leq \frac{\pi}{\gamma} + \pi \alpha^2$$

$$-۲۶ \quad \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha}$$

$$-۲۷ \quad \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha}$$

۲ باب

اور ۵ باب + ۳ ج - ۲ ب - ۱ ج

جہاں ۱ = نوک ۲، ب = نوک ۳ اور ج = نوک ۷

۸ - ۲۲۲۲۱ ۹ - ۸۵۶۴۱۵ ۱۰ - ۹۵۶۱۹۲
 ۱۱ - ۱۵۶۳۸۹ ۱۲ - ۴۵۷۱۹۲ ۱۳ - ۵۴۱۴۳

مثلاً ۲۳ (۲۳۸ - ۲۴۱)

- ۱ - ۱۵۵۲۷۳۹۴ ، ۴۵۵۲۷۳۷۵
- ۲ - ۴۷۸۹۵۰۲ ، ۴۷۸۹۵۲۹
- ۳ - ۴۷۸۴۷۷۷ ، ۴۷۸۴۷۷۷
- ۴ - ۲۵۸۳۶۷۲ ، ۲۵۸۳۶۷۲
- ۵ - ۲۷۷۲۰۴۶۲ (۲) ، ۲۷۷۲۰۴۸۱۵ (۱)
- ۶۷۷۳۷۶۳ (۴) ، ۴۷۷۲۴۰۷۹ (۳)
- ۵۷۷۴۰۶۴ (۴) ، ۵۷۷۴۴۷۴ (۵)
- ۶ - ۴۷۷۰۴۱۷ ، ۴۷۷۰۴۱۷
- ۸ - ۸۴۵۴۵۰۹ ، ۸۴۵۴۵۱۰۴
- ۹ - ۴۷۷۰۴۱۷ ، ۴۷۷۰۴۱۷
- ۱۰ - ۴۷۷۰۴۱۷ ، ۴۷۷۰۴۱۷
- ۱۱ - ۴۷۷۰۴۱۷ ، ۴۷۷۰۴۱۷
- ۱۲ - ۴۷۷۰۴۱۷ ، ۴۷۷۰۴۱۷

- ۱۴- ۲۷ ۳۳ ۳۴
 ۱۵- ۲۳ ۲۷ ۲۱ ۹ ۵ ۲۵ ۳۳ ۹۷
 ۱۶- ۱۷ ۱۸ ۲۷ ۱۰۵۰۲۲۹۳۱۲
 ۱۸- ۱۲ ۵۲ ۳۴

امثلة ۲۵ (صفحات ۲۴۹-۲۵۱)

- ۱- ۳۱ ۲۷ ۳۱ ۲۲ ۱ ۲۸
 ۳- ۱۲۵ ۲۳ ۹۵ ۱۰۹۹۷۳۳۰
 ۴- ۲۸ ۳۴ ۲۲ ۹۵۴۱۹۸۵۰۹
 ۵- ۱۰ ۱۵ ۳۳ ۴ ۲۲ ۵۵
 ۷- (۱) ۹۵۷۷۹۰۴۳ (۲) ۹۵۷۷۰۸۵۷
 (۳) ۱۰۵۱۹۵۸۹۱۷ (۴) ۱۰۵۰۷۵۷۹۰۷
 (۵) ۱۰۵۲۰۰۱۳۳۷ (۶) ۱۰۵۰۷۲۵۰۲۷
 (۷) ۹۵۷۲۴۵۱۶۲
 ۸- (۱) ۳۰ ۳۳ ۲۲ (۲) ۵۸ ۳۱ ۵۷
 (۳) ۳۲ ۳۱ ۵۷ (۴) ۳۹ ۴ ۵۷
 ۹- ۵۳۷۳۴۰۲
 ۱۰- (۱) حجم (لا-ما) قط لا قط ما (۲) حجم (لا+ما) قط لا قط ما
 (۳) حجم (لا-ما) قط لا قط ما
 (۴) حجم (لا+ما) قط لا قط ما
 (۵) مس لا
 (۶) مس لا مس ما

$$\frac{9}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1$$

$$-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{11}{2}, \frac{13}{2}, \frac{15}{2}, \dots, \infty$$

$$\frac{14}{12} \div \frac{54}{48} = \frac{2}{3}$$

$$25' 25' 4. - 6 \quad \frac{286}{114} \text{ is } \frac{4}{21} = 4$$

$$\frac{313}{338} - 28 \quad \frac{2}{5} - 25 \quad \frac{2}{5} - 23$$

19451A 251 1A454:.....-1

-۲- پم پم دے ، پم پم یی ، پم پم فٹ

[illegible]

15 191 20 - 2

١٢. - ٢ ١٣. - ٢ ١٤. - ١

- ۵- ۴۵ ' ۴۰ ' ۴۵ - ۴ ۱۵ ' ۴۰ ' ۴۵
۶- ۴۸ ' ۴۹ ' ۴۳ - ۸ ۲۷ ' ۴۱ ' ۴۱
۹- ۴۹ ' ۴۹ ' ۴۵ - ۱۰ ۴۹ ' ۴۸ ' ۴۹
۱۱- ۴۹ ' ۴۵ ' ۴۱ ' ۴۹ ' ۴۵ ' ۴۱ ' ۴۹
۱۲- ۴۸ ' ۴۹ ' ۴۳ ' ۴۱ ' ۴۲ ' ۴۳ ' ۴۰
۱۳- ۴۳ ' ۴۲ ' ۴۵ ' ۴۳ ' ۴۷ ' ۴۵
۴۵ ' ۴۱ ' ۴۳

امثلہ ۳ (صفحات ۲۸۶ تا ۲۹۰)

- ۱- ۴۳ ' ۴۱ ' ۴۱ ' ۴۳ ' ۴۸
۲- ۴۷ ' ۴۸ ' ۴۵ ' ۴۸
۳- ۴۸ ' ۴۹ ' ۴۹ ' ۴۹ ' ۴۹
۴- ۴۷ ' ۴۵ ' ۴۹ ' ۴۹
۵- ۴۹ ' ۴۳ ' ۴۹ ' ۴۹
۶- ۴۹ ' ۴۹ ' ۴۹
۷- ۴۹ ' ۴۹ ' ۴۹
۸- ۴۹ ' ۴۹ ' ۴۹
۹- ۴۹ ' ۴۹ ' ۴۹
۱۰- ۴۹ ' ۴۹
۱۱- ۴۹ ' ۴۹
۱۲- ۴۹ ' ۴۹
۱۳- ۴۹ ' ۴۹
۱۴- ۴۹ ' ۴۹
۱۵- ۴۹ ' ۴۹

- ۱۶ - ۲۵۲۹۸۲۳
 ۱۷ - ۲۲۴۵۸۷۶۵۰ ' ۲۹ ' ۳۵ ' ۱۰
 ۱۸ - ۱ = ۸۳ ' ۷۹ = ۲۲ ' ۱۴ ' ۲۱ ' ۱۰

ج = ۱۹۹۵.۹۹

- ۱۹ - ب = ۱۰ ' ۱۸ ' ۵۱ = ج ' ۲۴ ' ۵۴ ' ۵۱ اور

۱ = ۹۳۵۱۹۲

- ۲۰ - ۲۳ ' ۱ ' ۵۱ اور ۱۸ ' ۲۱ ' ۹
 ۲۱ - ۸۸ ' ۳۰ ' ۱ اور ۳۳ ' ۳۰ ' ۵۹

امثلہ ۳ (صفحات ۲۹۸ تا ۳۰۰)

- ۱ - مثلث نہیں بن سکتا۔
 ۲ - ب = ۳۰ ' ج = ۱۰۵ ' ب = ۲۱ اور ب = ۴۰
 ج = ۷۵ اور ب = ۲۱
 ۳ - ب = ۱۵ ' ج = ۳۵ ' ب = ۵۰ (۲۱ - ۲۱)
 اور ب = ۱۰۵ ' ج = ۲۵ ' ب = ۵۰ (۲۱ - ۲۱)
 ۵ - ۵۱۲ = ۳۱۲
 ۶ - ۱۰۰ ' مثلث قائم الزاویہ ہے
 ۸ - ۳۳ ' ۲۹ ' ۳۰ اور ۱۰ ' ۳۰ ' ۳۰

- ۹- ۱۷۱ یا ۳۵۸
- ۱۰- (۱) مثلث قائم الزاویہ ہے اور ب = ۶۰
(۲) ب = ۳۸۹۳، ۶۰، ب = ۸، ۳۱ اور ج = ۱۳۱، ۱۹
ب = ۱۱، ۱۹ اور ج = ۳۸، ۳۱
- ۱۱- ۹۵، ۵۹ اور ۱۴، ۵۶، ۱۲
- ۱۲- ۵۹۸۸، ۲۵۶۷۱۸ اور ۲۵۶۷۱۸ میل فی گھنٹہ
- ۱۳- ۳، ۲، ۱۲ یا ۱۱۶، ۵۷، ۳۸
- ۱۴- ۶۲، ۱۳، ۲۳ اور ۱۰۲، ۱۷، ۳۷
- یا ۱۱۷، ۲۸، ۳۷ اور ۴۰، ۲۰، ۲۳
- ۱۵- ۵۹۲۶۳۶۱

مثلاً ۳۲ (صفحات ۳۰-۳۰۳)

- ۱- ۱۱ : ۹ : ۷
- ۲- ۷۹۵۰۶۳
- ۵- ۱۳، ۱۹، ۲۱، ۱۵، ۱۱ میل
- ۶- ۲۰۹۷۱۶، ۲۰ فٹ
- ۸- ۶۷۵۸۵۶۳، ۶ اور ۸۴۷۸۳۳، ۵ فٹ
- ۹- ۴۳۵۲، ۴۰ فٹ
- ۱۰- ۲۸۸۳، ۲۳۳ گز
- ۱۱- ۲۲۲۹ گز

مثلاً ۳۳ (صفحات ۳۱۰-۳۱۶)

- ۱- ۱۰۰ فٹ اونچا اور ۵۰ فٹ چوڑا، ۲۵ فٹ
- ۲- ۲۵۷۸۳۴ گز
- ۳- ۳۳۵۰۷، ۳۳ فٹ، ۱۷ فٹ

- ۳- ۱۸ و ۳ فٹ
۵- ۱۲۰ فٹ
۶- ح س ع م ب
۷- ۱۹۳۹ و ۲۰۰ فٹ
۸- ۱۰۰ فٹ
۹- ۶۱ و ۲۲۴ فٹ
۱۰- ۱۰۰ و ۲۱۶ فٹ
۱۵- ف ق = ب ف = ب ق = ۱۰۰ فٹ
۱۶- ۵۰۰ (۶۴ - ۲۴) فٹ
۱۷- ۱۰۰ و ۲۱۶ فٹ
۱۸- ۱۱۹ و ۳۲۱ میل
۱۹- ۱۱۹ و ۲۸۶ فٹ
۲۰- ۸۰ و ۲۳۵ گز
۲۱- ۱۳۲ و ۲۶۶ فٹ
۲۲- ۱۲۵ و ۳۱۶ فٹ

امثلہ ۳۲ (صفحات ۳۲۱-۳۲۲)

- ۳- ۲۰ فٹ ، ۴۰ فٹ
۴- ل ق م جہ جہاں جہ سورج کا ارتقاع ہے
جب جہ = $\frac{1}{2}$
۵- ۳۲ و ۳۴ میل ، رفتار ۳۴ و ۱۲ میل فی گھنٹہ مشرق سے جنوب کی جانب میں ایک ایسا زاویہ بناتی ہے جس کا مماس ۱ + ۳ ہے ۔

- ۶۔ ۱۰.۵۲۴۲۶ میل فی گھنٹہ
- ۷۔ ۱۷.۳۹۲۳ میل ۱۴.۵۹۹۷ میل
- ۸۔ ۲.۳۹ میل ، ۱.۳۶۶ میل
- ۹۔ زاویہ مطلوبہ کا کاس $\frac{2}{3}$ ہے ، $\frac{9}{52}$ گھنٹہ
- ۱۳۔ ج جب بد رقم (عہ + بد) 'ج جب عہ جب بد رقم (عہ + بد)
- ۱۴۔ ۹ گز ، ۲ گز - ۱۶ - $\frac{5}{3}$ ، $\frac{52}{3}$
- ۲۰۔ ٹیلے سے $\frac{345}{2}$ فٹ کے فاصلہ پر
- ۲۱۔ ج (۱- جب عہ) قطعہ ۲۲ - ۱۱.۴۵۱۲۳ فٹ
- ۲۳۔ ۱۰.۶۹۷۴۵ فٹ ۲۶ - ایک ایسا زاویہ جس کا کاس $\frac{1}{2}$ ہے
- ۲۹۔ ۲۵ - ۳۲ - ۱۸ ۲۶ ۴
- ۳۴۔ مس عہ قطبہ : ۱ - ۳۷ - ۹.۱۵۸۹۶ فٹ
- ۳۸۔ ۱۹۶۰.۵۹۵ گز ۳۹ - ۲.۴۵۸۳۲ میل
- ۴۰۔ ۳۳۳۵۴۹۳۲ فٹ

امثلہ ۳۵ (صفحات ۳۳۴ تا ۳۳۶)

- ۱۔ ۸۴ - ۲ - ۲۱۶ - ۳ - ۶۳۰
- ۴۔ ۳۷۲۰ - ۵ - ۲۷۰ - ۶ - ۱۱۷۰.۹۶
- ۷۔ ۱۴۷۰ - ۸ - ۱۵۱۸۳
- ۱۲۔ ۳۵ گز اور ۲۶ گز ۱۳ - ۱۴.۵۹۹۷ گز

۱۷- ۵/۴ اور ۱۰/۵، ۱۳/۵ اور ۱۵/۵

۱۸-.....۱۰۴۲ء ۱۷ء مرجع الج

امثلہ ۳۶ (صفحات ۳۴۵ تا ۳۴۷)

۳- $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8$ بالترتیب

امثلہ ۳۷ (۳۵۹ - ۳۶۴)

۳۵ - ہر ایک دائرہ کے نصف قطر کا..... ۱۵۴۷ یا ۱۵۴۷ گنا

$$\dots \left(\frac{p}{p} - 1 \right) \times 1 \times (1) + \frac{p}{p} = 1 \quad - 14$$

امثلہ ۳۸ - (صفحات ۱۷۳ تا ۱۷۴)

۱- (۱) ۱۰۵/۳ مربع فٹ (۲) ۷۱۰/۲ مربع فٹ

۳ $1\frac{5}{4}$ اور $2\frac{1}{4}$ فٹ

امثلہ ۳۹ (صفحات ۳۷۷ تا ۳۸۰)

۱- ۵۵۵۹۸
۲- ۵۵۳۵۹

۳- (۱) ۱۵۶۲۰..... مربع فٹ (۲) ۲۵۵۹۸..... مربع فٹ

(۳)..... ۴۸۳۸ مربع فٹ (۴)..... ۷۹۴ مربع فٹ

(۵۵) ۱۱۵۱۹۴... مربع فوت

۴-.....۱۵۸۸۶۶ مربع فٹ ۵- ۳۳۱۳۶ مربع فٹ

۶- ۲:۲۸ + ۲:۳۱ ۲:۲۸ + ۲:۳۱

۱۲- ۳ ۱۳- ۶

۱۵- ۹ ۱۶- ۲۰ اور ۱۰

۱۷- ۶ اور ۵، ۱۲ اور ۸، ۱۸ اور ۱۰

۲۲ اور ۱۱، ۲۷ اور ۱۲، ۳۲ اور ۱۴

۵۴ اور ۱۵، ۷۲ اور ۱۶، ۱۰۲ اور ۱۷

۱۶۲ اور ۱۸، ۳۴۲ اور ۱۹ اضلاع بالترتیب

۱۹- $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۲}{۳}$

امثلہ ۴۰ (صفحات ۳۸۶-۳۸۸)

۱- ۵۰۰ ۲۰۴ ۲- ۷۰۰۰۰ ۷

۳- ۷۰۰۰ ۹ ۴- ۹۹۹۹۹ ۹

۵- ۲۵۷۸۳۱۰۰ ۷ ۶- ۱۱۰۰۰۰۰ ۱۱

۷- ۳۳ ۳۳ ۸- ۳۷ ۳۷ ۹۸ ۳۷

۹- ۳۹ ۳۹ ۱۰- ۳۳ ۳۳ ۳۳ ۳۳

۱۱-.....۱۱۳۵۹

امثلہ ۴۱ (صفحات ۳۸۹-۳۹۱)

۱- ۴۳۵۷۷۷ مربع فٹ ۲- ۴۷۰۸۷۷ مربع فٹ

۳- ۱۲۷ ۱۹ ۲۶ ۴- ۶ مربع فٹ

۵۔ ۴۰۰۰ و ۱۱ پانچ ۶۔ ۴۴۶۲۵ و ۰۰۰ پانچ

۷۔ $\frac{2}{3}$ و ۱۱

امثلہ ۴۲ (صفحات ۳۹۳-۳۹۵)

۱۔ ۱، ۸، ۴۵ ۲۔ ۲۳ و ۱۷ میل

۳۔ ۴۱ و میل، ۱، ۴۸ تقریباً

۸۔ تقریباً ۶۱۸۰۰ میٹر = تقریباً $\frac{1}{4}$ ۳۸ میل

۹۔ ۳۹۶۰ میل

امثلہ ۴۳ (صفحات ۴۰۲-۴۰۶)

۲۸۔ $\pm$ واجب ۲ یہ ۲۹۔ $\frac{1}{4}$

۳۰۔ $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ ۳۱۔ $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

۳۲۔ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ۳۳۔ $\frac{\pi}{2}$ یا π یا $\pi + \frac{\pi}{2}$

۳۴۔ $\frac{5}{3}$ ۳۵۔ $\frac{5}{3}$

۳۶۔ $\sqrt{2} - (\sqrt{2} + 2)$

۳۷۔ $\sqrt{2} - 2$ یا $\sqrt{2}$

۳۸۔ π یا $\pi - 1$ یا $\pi + 1$ ۳۹۔ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

۴۰۔ ۱۳

۴۱۔ لامساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

لا۔ لا (اب + ا ج + ا د + ب ج + ب د + ج د) + ا ب ج د =

$$۲۲ - لا = لا + اب$$

$$۲۳ - اب + [ا - لا + ا - اب - ا]$$

$$۲۴ - اب + ا - اب$$

امثله ۲۴ (صفحات ۲۱۳-۲۱۶)

$$۱ - \frac{۱}{۲} جب ۲ن طه قم طه$$

$$۲ - جم ۳ن - ا + جب \frac{۳}{۲} ن - ا قم \frac{۳}{۲} ا$$

$$۳ - \frac{۱}{۲}$$

$$۴ - جب [ع + (ن - \frac{۱}{۲})] جب ن به قط \frac{۱}{۲}$$

$$۵ - جب ن طه$$

$$۶ - جب ۲ن لا (جم ۲ن لا + جب ۲ن لا) (جم لا + جب لا) قم ۲لا$$

$$۷ - \frac{۱}{۲} [(ن + ا) جب ۲ع - جب (۲ + ن) ع] قم ع$$

$$۸ - \frac{۱}{۲} جب (۲ + ن) ع \times جب ۲ن ع قم ع$$

$$۹ - \frac{۱}{۲} جم ۲ع - \frac{۱}{۲} جم (ن + ۳) ع جب ن ع قم ع$$

۱۳- جم (۲ ن - ع) جم (ن + ۱) بد - جم (۲ ن + ع) جم ن بد + جم ع (۱ - جم بد)
۲ (جم بد - جم ۲ ع)

۱۴- $\frac{1}{n} - \frac{1}{n} [(n+1) \text{ جب ع} - \text{جب } (n+1) \text{ ع}]$ قم ع

۱۵- $\frac{n}{p} - \frac{1}{p} \text{ جم } [(n-1) \text{ ع} + ۲ ط]$ جب ن ع قم ع

۱۶- $\frac{3}{n} \text{ جب } \frac{1+n}{p} \text{ ع جب } \frac{n}{p} \text{ قم } \frac{n}{p} \text{ ع}$

- $\frac{1}{p} \text{ جب } ۳ \frac{1+n}{p} \text{ ع } \times \text{ جب } \frac{n}{p} \text{ ع قم } \frac{3n}{p} \text{ ع}$

۱۷- $\frac{1}{n} [(n-۳) \text{ جم } (n+1) \text{ ع جب } n \text{ ع قم ع}]$

+ جم (۲ ن + ۲) ع جب ۲ ن ع قم ۲ ع

۱۸- $\frac{1}{n} [(n+۳) \text{ جم } (n+1) \text{ ع جب } n \text{ ع قم ع}]$

+ جم (۲ ن + ۲) ع جب ۲ ن ع قم ۲ ع

۱۹- $\frac{1}{p} \text{ جب } \frac{n}{p} [\text{جم } \frac{n}{p} - ۱ ط + \text{جم } \frac{n}{p} + ۳ ط + \text{جم } \frac{n}{p} + ۴ ط]$ قم ط

+ $\frac{1}{p} \text{ جب } \frac{n}{p} \text{ جم } \frac{n}{p} + ۹ ط$ قم ط

۲۰- $\frac{1}{p} \text{ جب } (۲ ن + ۲) \text{ بد جب } ۲ ن بد$ قط بد

۴۵ مثلہ (صفحات ۴۲۲-۴۲۳)

۱- ا + ب = ج + د

$$۲ - \frac{\lambda}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda} = \text{جم} (\text{ب} - \text{ع}) = \text{جب} (\text{ع} - \text{ب})$$

$$۳ - \lambda (\text{ج} - \text{د}) = \text{ب د ج}$$

$$۴ - \lambda \text{ جب ع} + \text{ب جم ع} = \lambda \text{ ب} (\text{ا} + \text{ب})$$

$$۵ - 1 = \frac{\lambda}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda}$$

$$۶ - \lambda + \lambda = \frac{\lambda}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda}$$

$$۷ - (\text{ف} + \text{ا}) + ۲ \text{ ق} (\text{ف} + \text{ا}) = (\text{ق} + \text{ف}) = ۴ (\text{ق} + \text{ف})$$

$$۸ - (\lambda + \lambda - \lambda) = \lambda (\lambda + \lambda) (\lambda + \lambda)$$

$$۹ - \lambda + \lambda = ۲ + ۲ = \text{جم ع}$$

$$۱۰ - \lambda \lambda = (\lambda - \lambda) \text{ مس ع}$$

$$۱۱ - \lambda (\text{ج} - \text{ا}) (\text{ب} - \text{د}) = \text{ب} (\text{ب} - \text{ج}) (\text{ب} - \text{د})$$

$$۱۲ - ۸ \text{ ب ج} = \lambda \{ \text{ب} (\text{ج} - \text{ب}) + \text{ب} (\text{ج} - \text{ب}) \}$$

$$۱۳ - \lambda (\text{ج} - \lambda - \lambda) = \text{ب} (\lambda)$$

$$= \lambda (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) (\text{ا} - \text{ب} + \text{ج}) (\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}) (\text{ا} - \text{ب} + \text{ج})$$

$$۱۴ - \text{ب} (\lambda - \lambda - \lambda) + (\lambda + \lambda) = \lambda (\lambda + \lambda) (\lambda + \lambda)$$

متفرق مثالیں (صفحات ۲۳۲-۲۸۰)

۴- ۱۴۲ فت تقریباً ۴۰ ۴۰ تقریباً

۵-۴۱-۵۰۶۱ ف

6- جب (پہلے) = $\sqrt{a-b} \pm \sqrt{a+b}$

ሥራ ረገድ ለገንዘብ - 9

$$2:57.3-4 \quad -12 \quad \frac{11}{12} \left(\frac{1}{12} + 0 \right) = -10$$

$$x + x^2(1-x) + \pi(0) = x(1) \quad -21$$

یا مس ط = (۱ - قم قم پر) مس $\frac{+}{-}$

$$(۲) ط = ن \quad یا \quad (ن \neq \frac{1}{2}) \quad \frac{\pi}{2}$$

٢٢ - ١٩ ٢٨ ' ٢٨ ١٠٨ ' ١٣

۲۳۔ ۱۲۹۸ فٹ تقریباً '۹۳ ۳۱' جنوب سے مشرق کی طرف کو۔

۲۸- ۸۰ فٹ ۳۱- $\frac{1}{4}$ مین لائ ۳۲- $\frac{لا+ما}{لا-ما}$

۳۱- $(L+1)^2 = (n-1)(n+1)$

۴۴ - وقتیں

$$\pi\left(\frac{1}{q} \pm \infty\right), \pi\left(\frac{1}{14} \pm \rho\right) - 25$$

- ۴۷- (لذ-ا) = ۲۷ لذجم ع جب ع
- ۴۸- ۱۵۳۹ نیم قطری = ۷۹ ۳۰ تقریباً
- ۴۹- جب (بہ-جہ) قط (عہ-بہ) قط (عہ-جہ)
- ۵۰- ۱۱ ۱۲ مشرق سے شمال کی طرف کو
- ۵۱- چھ قیمتیں ۵۸ - $\frac{1}{11}$ [ن ۱۱ + $\frac{11}{11}$ - عہ - بہ - جہ]
- ۵۲- ۷۲۵۷۷ فٹ
- ۵۳- ج ۱۲۱ - ب = ۱۲۱ - (۱-ب) اب
- ۵۴- $\frac{1}{11}$ ۱۱۸ - ۶۳ - ۱۹ ۱ - $\frac{1}{11}$ ۲۸ + $\frac{1}{11}$ ۵۰ تقریباً
- ۵۵- ا جب ع جب بہ
- ۵۶- ا جب (بہ-عہ) جب (بہ+عہ)
- ۵۷- ج (عہ+بہ+جہ+لذ) + ج (عہ+بہ-جہ-لذ)
- ۵۸- ج (عہ-بہ+جہ-لذ) + ج (عہ-بہ-جہ+لذ) ج (عہ+بہ+جہ+لذ)
- ۵۹- ج (عہ-بہ+جہ+لذ) - ج (عہ+بہ-جہ-لذ) ج (عہ+بہ+جہ+لذ)
- ۶۰- ۱۹ $\frac{1}{11}$ تقریباً ۸۰ - لا = ۲۵۳۱
- ۶۱- مس طہ = ۲۱۱ یا ۲۱۱ ± ۲
- ۶۲- مس ف = ۲۱۱ یا ۲۱۱ ± ۲
- ۶۳- ۱۶۵۴۷ میل

$$r(r \wedge -q)r = r \vdash - \wedge$$

$$(p+1)A^p = C + A^p - q^p$$

۹۵- جب $\frac{ن}{۲}$ ط جب $(۳+ن)$ ط $[۱+۲جم ۲ط]$ قم $\frac{ط}{۲}$
 - جب $\frac{۳}{۲}$ ط $۹+$ ط جب $\frac{۳}{۲}$ ط قم $\frac{ط}{۲}$

۹۴ - ۲۵۵ نیقطی = ۱۴۴ تقریباً

۱۰۴- مسطه = ۱' ۱' ۱' ۲ = ۲

۱۰۸- ۲۳۷۹ ف ۱۱۷- ۱۱

$$b + j = l + \bar{l} - 12.$$

$$x^2 = 2 - (2 + \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - j) + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + j) = 1.34$$

- 12A

م ج + ن ا + م ح + ن ا + م ن ل ح جم (ع - ج) جب (ن ت و ب)
م + ن

جہاں مس بہ = (م ج حب حہ + ن ل حب عہ) ÷ (م ج ح جم جہ + ن ل ح جم عہ)

$$9\frac{1}{2} \cdot 24\frac{1}{2} = 128 \quad 2 = 2 \cdot 2 + 2 = 124$$

$$(l + u) \cdot r = (u \cdot r + l + u) - |u|$$

- ۱۶۱- (۱- لا- ما) جب (ع- لہ) جب (بہ- جہ)
 ۱۶۶- لا + ب + ج + ج - ۲ ب ج - ج - لا - ۲ لا ب = .
 ۱۶۷- لا ما - ۳ لا ما = (لا + ما) ۲ مس (بہ- عہ) .
 ۱۶۸- ب (۳ لا- ما) ۲ { ۴ (لا- ما) - ب }
 = ۸ (لا- ما) ۳ + ۳ ب (لا- ما)
 ۱۸۱- تین قیمتیں ' ۲۹۹ تقریباً
 ۱۸۲- ۹۸ نیمقٹری = ۵۶ ۹ تقریباً
 ۱۸۵- ۲۶۰.۷ اور - ۱۶۲۳

০১৮

عدرون کے لوکار تم

طبعی جیو . . . طبعی ماس
لوکار تھی جیو ب اور لوکار تھی ماس وغیرہ

جدول اول
عددوں کے نمبر

[illegible]

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000

عددوں کے قواعد

[illegible]

۱۹۹۵ء کے لیے

9 8 7 6 5 4 3 2 1

[illegible][illegible][illegible]

11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

52.

10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

[illegible][illegible]

10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

5

[illegible]

044

[illegible]

9 7 7 7 0 2 7 7 1 9 7 7 7 0 2 7 7 7 1

عددوں کے لوکارٹ

[illegible]

ΔΥΥ

[illegible]

5

050

چند روزی

طبیعیاتی

014

| نق | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|
| ۲۳۴ | ۲۱۸ | ۱۹۱ | ۱۶۴ | ۱۳۷ | ۱۰۹ | ۸۲ | ۵۵ | ۲۷ | ۱۹ |
| ۲۳۴ | ۲۱۷ | ۱۹۰ | ۱۶۳ | ۱۳۶ | ۱۰۸ | ۸۱ | ۵۴ | ۲۷ | ۱۸ |
| ۲۳۳ | ۲۱۵ | ۱۸۸ | ۱۶۱ | ۱۳۵ | ۱۰۷ | ۸۱ | ۵۴ | ۲۷ | ۱۸ |
| ۲۳۳ | ۲۱۴ | ۱۸۷ | ۱۶۰ | ۱۳۴ | ۱۰۶ | ۸۰ | ۵۳ | ۲۷ | ۱۷ |
| ۲۳۲ | ۲۱۳ | ۱۸۶ | ۱۵۹ | ۱۳۳ | ۱۰۵ | ۷۹ | ۵۲ | ۲۶ | ۱۶ |
| ۲۳۲ | ۲۱۲ | ۱۸۵ | ۱۵۸ | ۱۳۲ | ۱۰۴ | ۷۸ | ۵۱ | ۲۵ | ۱۵ |
| ۲۳۱ | ۲۱۱ | ۱۸۴ | ۱۵۷ | ۱۳۱ | ۱۰۳ | ۷۷ | ۵۰ | ۲۴ | ۱۴ |
| ۲۳۱ | ۲۱۰ | ۱۸۳ | ۱۵۶ | ۱۳۰ | ۱۰۲ | ۷۶ | ۴۹ | ۲۳ | ۱۳ |
| ۲۳۰ | ۲۰۹ | ۱۸۲ | ۱۵۵ | ۱۲۹ | ۱۰۱ | ۷۵ | ۴۸ | ۲۲ | ۱۲ |
| ۲۳۰ | ۲۰۸ | ۱۸۱ | ۱۵۴ | ۱۲۸ | ۱۰۰ | ۷۴ | ۴۷ | ۲۱ | ۱۱ |
| ۲۲۹ | ۲۰۷ | ۱۸۰ | ۱۵۳ | ۱۲۷ | ۹۹ | ۷۳ | ۴۶ | ۲۰ | ۱۰ |
| ۲۲۹ | ۲۰۶ | ۱۷۹ | ۱۵۲ | ۱۲۶ | ۹۸ | ۷۲ | ۴۵ | ۱۹ | ۹ |
| ۲۲۸ | ۲۰۵ | ۱۷۸ | ۱۵۱ | ۱۲۵ | ۹۷ | ۷۱ | ۴۴ | ۱۸ | ۸ |
| ۲۲۸ | ۲۰۴ | ۱۷۷ | ۱۵۰ | ۱۲۴ | ۹۶ | ۷۰ | ۴۳ | ۱۷ | ۷ |
| ۲۲۷ | ۲۰۳ | ۱۷۶ | ۱۴۹ | ۱۲۳ | ۹۵ | ۶۹ | ۴۲ | ۱۶ | ۶ |
| ۲۲۷ | ۲۰۲ | ۱۷۵ | ۱۴۸ | ۱۲۲ | ۹۴ | ۶۸ | ۴۱ | ۱۵ | ۵ |
| ۲۲۶ | ۲۰۱ | ۱۷۴ | ۱۴۷ | ۱۲۱ | ۹۳ | ۶۷ | ۴۰ | ۱۴ | ۴ |
| ۲۲۶ | ۲۰۰ | ۱۷۳ | ۱۴۶ | ۱۲۰ | ۹۲ | ۶۶ | ۳۹ | ۱۳ | ۳ |
| ۲۲۵ | ۱۹۹ | ۱۷۲ | ۱۴۵ | ۱۱۹ | ۹۱ | ۶۵ | ۳۸ | ۱۲ | ۲ |
| ۲۲۵ | ۱۹۸ | ۱۷۱ | ۱۴۴ | ۱۱۸ | ۹۰ | ۶۴ | ۳۷ | ۱۱ | ۱ |
| ۲۲۴ | ۱۹۷ | ۱۷۰ | ۱۴۳ | ۱۱۷ | ۸۹ | ۶۳ | ۳۶ | ۱۰ | ۰ |
| ۲۲۴ | ۱۹۶ | ۱۶۹ | ۱۴۲ | ۱۱۶ | ۸۸ | ۶۲ | ۳۵ | ۹ | - |
| ۲۲۳ | ۱۹۵ | ۱۶۸ | ۱۴۱ | ۱۱۵ | ۸۷ | ۶۱ | ۳۴ | ۸ | - |
| ۲۲۳ | ۱۹۴ | ۱۶۷ | ۱۴۰ | ۱۱۴ | ۸۶ | ۶۰ | ۳۳ | ۷ | - |
| ۲۲۲ | ۱۹۳ | ۱۶۶ | ۱۳۹ | ۱۱۳ | ۸۵ | ۵۹ | ۳۲ | ۶ | - |
| ۲۲۲ | ۱۹۲ | ۱۶۵ | ۱۳۸ | ۱۱۲ | ۸۴ | ۵۸ | ۳۱ | ۵ | - |
| ۲۲۱ | ۱۹۱ | ۱۶۴ | ۱۳۷ | ۱۱۱ | ۸۳ | ۵۷ | ۳۰ | ۴ | - |
| ۲۲۱ | ۱۹۰ | ۱۶۳ | ۱۳۶ | ۱۱۰ | ۸۲ | ۵۶ | ۲۹ | ۳ | - |
| ۲۲۰ | ۱۸۹ | ۱۶۲ | ۱۳۵ | ۱۰۹ | ۸۱ | ۵۵ | ۲۸ | ۲ | - |
| ۲۲۰ | ۱۸۸ | ۱۶۱ | ۱۳۴ | ۱۰۸ | ۸۰ | ۵۴ | ۲۷ | ۱ | - |
| ۲۱۹ | ۱۸۷ | ۱۶۰ | ۱۳۳ | ۱۰۷ | ۷۹ | ۵۳ | ۲۶ | ۰ | - |
| ۲۱۹ | ۱۸۶ | ۱۵۹ | ۱۳۲ | ۱۰۶ | ۷۸ | ۵۲ | ۲۵ | - | - |
| ۲۱۸ | ۱۸۵ | ۱۵۸ | ۱۳۱ | ۱۰۵ | ۷۷ | ۵۱ | ۲۴ | - | - |
| ۲۱۸ | ۱۸۴ | ۱۵۷ | ۱۳۰ | ۱۰۴ | ۷۶ | ۵۰ | ۲۳ | - | - |
| ۲۱۷ | ۱۸۳ | ۱۵۶ | ۱۲۹ | ۱۰۳ | ۷۵ | ۴۹ | ۲۲ | - | - |
| ۲۱۷ | ۱۸۲ | ۱۵۵ | ۱۲۸ | ۱۰۲ | ۷۴ | ۴۸ | ۲۱ | - | - |
| ۲۱۶ | ۱۸۱ | ۱۵۴ | ۱۲۷ | ۱۰۱ | ۷۳ | ۴۷ | ۲۰ | - | - |
| ۲۱۶ | ۱۸۰ | ۱۵۳ | ۱۲۶ | ۱۰۰ | ۷۲ | ۴۶ | ۱۹ | - | - |
| ۲۱۵ | ۱۷۹ | ۱۵۲ | ۱۲۵ | ۹۹ | ۷۱ | ۴۵ | ۱۸ | - | - |
| ۲۱۵ | ۱۷۸ | ۱۵۱ | ۱۲۴ | ۹۸ | ۷۰ | ۴۴ | ۱۷ | - | - |
| ۲۱۴ | ۱۷۷ | ۱۵۰ | ۱۲۳ | ۹۷ | ۶۹ | ۴۳ | ۱۶ | - | - |
| ۲۱۴ | ۱۷۶ | ۱۴۹ | ۱۲۲ | ۹۶ | ۶۸ | ۴۲ | ۱۵ | - | - |
| ۲۱۳ | ۱۷۵ | ۱۴۸ | ۱۲۱ | ۹۵ | ۶۷ | ۴۱ | ۱۴ | - | - |
| ۲۱۳ | ۱۷۴ | ۱۴۷ | ۱۲۰ | ۹۴ | ۶۶ | ۴۰ | ۱۳ | - | - |
| ۲۱۲ | ۱۷۳ | ۱۴۶ | ۱۱۹ | ۹۳ | ۶۵ | ۳۹ | ۱۲ | - | - |
| ۲۱۲ | ۱۷۲ | ۱۴۵ | ۱۱۸ | ۹۲ | ۶۴ | ۳۸ | ۱۱ | - | - |
| ۲۱۱ | ۱۷۱ | ۱۴۴ | ۱۱۷ | ۹۱ | ۶۳ | ۳۷ | ۱۰ | - | - |
| ۲۱۱ | ۱۷۰ | ۱۴۳ | ۱۱۶ | ۹۰ | ۶۲ | ۳۶ | ۹ | - | - |
| ۲۱۰ | ۱۶۹ | ۱۴۲ | ۱۱۵ | ۸۹ | ۶۱ | ۳۵ | ۸ | - | - |
| ۲۱۰ | ۱۶۸ | ۱۴۱ | ۱۱۴ | ۸۸ | ۶۰ | ۳۴ | ۷ | - | - |
| ۲۰۹ | ۱۶۷ | ۱۴۰ | ۱۱۳ | ۸۷ | ۵۹ | ۳۳ | ۶ | - | - |
| ۲۰۹ | ۱۶۶ | ۱۳۹ | ۱۱۲ | ۸۶ | ۵۸ | ۳۲ | ۵ | - | - |
| ۲۰۸ | ۱۶۵ | ۱۳۸ | ۱۱۱ | ۸۵ | ۵۷ | ۳۱ | ۴ | - | - |
| ۲۰۸ | ۱۶۴ | ۱۳۷ | ۱۱۰ | ۸۴ | ۵۶ | ۳۰ | ۳ | - | - |
| ۲۰۷ | ۱۶۳ | ۱۳۶ | ۱۰۹ | ۸۳ | ۵۵ | ۲۹ | ۲ | - | - |
| ۲۰۷ | ۱۶۲ | ۱۳۵ | ۱۰۸ | ۸۲ | ۵۴ | ۲۸ | ۱ | - | - |
| ۲۰۶ | ۱۶۱ | ۱۳۴ | ۱۰۷ | ۸۱ | ۵۳ | ۲۷ | ۰ | - | - |
| ۲۰۶ | ۱۶۰ | ۱۳۳ | ۱۰۶ | ۸۰ | ۵۲ | ۲۶ | - | - | - |
| ۲۰۵ | ۱۵۹ | ۱۳۲ | ۱۰۵ | ۷۹ | ۵۱ | ۲۵ | - | - | - |
| ۲۰۵ | ۱۵۸ | ۱۳۱ | ۱۰۴ | ۷۸ | ۵۰ | ۲۴ | - | - | - |
| ۲۰۴ | ۱۵۷ | ۱۳۰ | ۱۰۳ | ۷۷ | ۴۹ | ۲۳ | - | - | - |
| ۲۰۴ | ۱۵۶ | ۱۲۹ | ۱۰۲ | ۷۶ | ۴۸ | ۲۲ | - | - | - |
| ۲۰۳ | ۱۵۵ | ۱۲۸ | ۱۰۱ | ۷۵ | ۴۷ | ۲۱ | - | - | - |
| ۲۰۳ | ۱۵۴ | ۱۲۷ | ۱۰۰ | ۷۴ | ۴۶ | ۲۰ | - | - | - |
| ۲۰۲ | ۱۵۳ | ۱۲۶ | ۹۹ | ۷۳ | ۴۵ | ۱۹ | - | - | - |
| ۲۰۲ | ۱۵۲ | ۱۲۵ | ۹۸ | ۷۲ | ۴۴ | ۱۸ | - | - | - |
| ۲۰۱ | ۱۵۱ | ۱۲۴ | ۹۷ | ۷۱ | ۴۳ | ۱۷ | - | - | - |
| ۲۰۱ | ۱۵۰ | ۱۲۳ | ۹۶ | ۷۰ | ۴۲ | ۱۶ | - | - | - |
| ۲۰۰ | ۱۴۹ | ۱۲۲ | ۹۵ | ۶۹ | ۴۱ | ۱۵ | - | - | - |
| ۲۰۰ | ۱۴۸ | ۱۲۱ | ۹۴ | ۶۸ | ۴۰ | ۱۴ | - | - | - |
| ۱۹۹ | ۱۴۷ | ۱۲۰ | ۹۳ | ۶۷ | ۳۹ | ۱۳ | - | - | - |
| ۱۹۹ | ۱۴۶ | ۱۱۹ | ۹۲ | ۶۶ | ۳۸ | ۱۲ | - | - | - |
| ۱۹۸ | ۱۴۵ | ۱۱۸ | ۹۱ | ۶۵ | ۳۷ | ۱۱ | - | - | - |
| ۱۹۸ | ۱۴۴ | ۱۱۷ | ۹۰ | ۶۴ | ۳۶ | ۱۰ | - | - | - |
| ۱۹۷ | ۱۴۳ | ۱۱۶ | ۸۹ | ۶۳ | ۳۵ | ۹ | - | - | - |
| ۱۹۷ | ۱۴۲ | ۱۱۵ | ۸۸ | ۶۲ | ۳۴ | ۸ | - | - | - |
| ۱۹۶ | ۱۴۱ | ۱۱۴ | ۸۷ | ۶۱ | ۳۳ | ۷ | - | - | - |
| ۱۹۶ | ۱۴۰ | ۱۱۳ | ۸۶ | ۶۰ | ۳۲ | ۶ | - | - | - |
| ۱۹۵ | ۱۳۹ | ۱۱۲ | ۸۵ | ۵۹ | ۳۱ | ۵ | - | - | - |
| ۱۹۵ | ۱۳۸ | ۱۱۱ | ۸۴ | ۵۸ | ۳۰ | ۴ | - | - | - |
| ۱۹۴ | ۱۳۷ | ۱۱۰ | ۸۳ | ۵۷ | ۲۹ | ۳ | - | - | - |
| ۱۹۴ | ۱۳۶ | ۱۰۹ | ۸۲ | ۵۶ | ۲۸ | ۲ | - | - | - |
| ۱۹۳ | ۱۳۵ | ۱۰۸ | ۸۱ | ۵۵ | ۲۷ | ۱ | - | - | - |
| ۱۹۳ | ۱۳۴ | ۱۰۷ | ۸۰ | ۵۴ | ۲۶ | ۰ | - | - | - |
| ۱۹۲ | ۱۳۳ | ۱۰۶ | ۷۹ | ۵۳ | ۲۵ | - | - | - | - |
| ۱۹۲ | ۱۳۲ | ۱۰۵ | ۷۸ | ۵۲ | ۲۴ | - | - | - | - |
| ۱۹۱ | ۱۳۱ | ۱۰۴ | ۷۷ | ۵۱ | ۲۳ | - | - | - | - |
| ۱۹۱ | ۱۳۰ | ۱۰۳ | ۷۶ | ۵۰ | ۲۲ | - | - | - | - |
| ۱۹۰ | ۱۲۹ | ۱۰۲ | ۷۵ | ۴۹ | ۲۱ | - | - | - | - |
| ۱۹۰ | ۱۲۸ | ۱۰۱ | ۷۴ | ۴۸ | ۲۰ | - | - | - | - |
| ۱۸۹ | ۱۲۷ | ۱۰۰ | ۷۳ | ۴۷ | ۱۹ | - | - | - | - |
| ۱۸۹ | ۱۲۶ | ۹۹ | ۷۲ | ۴۶ | ۱۸ | - | - | - | - |
| ۱۸۸ | ۱۲۵ | ۹۸ | ۷۱ | ۴۵ | ۱۷ | - | - | - | - |
| ۱۸۸ | ۱۲۴ | ۹۷ | ۷۰ | ۴۴ | ۱۶ | - | - | - | - |
| ۱۸۷ | ۱۲۳ | ۹۶ | ۶۹ | ۴۳ | ۱۵ | - | - | - | - |
| ۱۸۷ | ۱۲۲ | ۹۵ | ۶۸ | ۴۲ | ۱۴ | - | - | - | - |
| ۱۸۶ | ۱۲۱ | ۹۴ | ۶۷ | ۴۱ | ۱۳ | - | - | - | - |
| ۱۸۶ | ۱۲۰ | ۹۳ | ۶۶ | ۴۰ | ۱۲ | - | - | - | - |
| ۱۸۵ | ۱۱۹ | ۹۲ | ۶۵ | ۳۹ | ۱۱ | - | - | - | - |
| ۱۸۵ | ۱۱۸ | ۹۱ | ۶۴ | ۳۸ | ۱۰ | - | - | - | - |
| ۱۸۴ | ۱۱۷ | ۹۰ | ۶۳ | ۳۷ | ۹ | - | - | - | - |
| ۱۸۴ | ۱۱۶ | ۸۹ | ۶۲ | ۳۶ | ۸ | - | - | - | - |
| ۱۸۳ | ۱۱۵ | ۸۸ | ۶۱ | ۳۵ | ۷ | - | - | - | - |
| ۱۸۳ | ۱۱۴ | ۸۷ | ۶۰ | ۳۴ | ۶ | - | - | - | - |
| ۱۸۲ | ۱۱۳ | ۸۶ | ۵۹ | ۳۳ | ۵ | - | - | - | - |
| ۱۸۲ | ۱۱۲ | ۸۵ | ۵۸ | ۳۲ | ۴ | - | - | - | - |
| ۱۸۱ | ۱۱۱ | ۸۴ | ۵۷ | ۳۱ | ۳ | - | - | - | - |
| ۱۸۱ | ۱۱۰ | ۸۳ | ۵۶ | ۳۰ | ۲ | - | - | - | - |
| ۱۸۰ | ۱۰۹ | ۸۲ | ۵۵ | ۲۹ | ۱ | - | - | - | - |
| ۱۸۰ | ۱۰۸ | ۸۱ | ۵۴ | ۲۸ | ۰ | - | - | - | - |
| ۱۷۹ | ۱۰۷ | ۸۰ | ۵۳ | ۲۷ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۹ | ۱۰۶ | ۷۹ | ۵۲ | ۲۶ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۸ | ۱۰۵ | ۷۸ | ۵۱ | ۲۵ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۸ | ۱۰۴ | ۷۷ | ۵۰ | ۲۴ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۷ | ۱۰۳ | ۷۶ | ۴۹ | ۲۳ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۷ | ۱۰۲ | ۷۵ | ۴۸ | ۲۲ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۶ | ۱۰۱ | ۷۴ | ۴۷ | ۲۱ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۶ | ۱۰۰ | ۷۳ | ۴۶ | ۲۰ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۵ | ۹۹ | ۷۲ | ۴۵ | ۱۹ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۵ | ۹۸ | ۷۱ | ۴۴ | ۱۸ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۴ | ۹۷ | ۷۰ | ۴۳ | ۱۷ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۴ | ۹۶ | ۶۹ | ۴۲ | ۱۶ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۳ | ۹۵ | ۶۸ | ۴۱ | ۱۵ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۳ | ۹۴ | ۶۷ | ۴۰ | ۱۴ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۲ | ۹۳ | ۶۶ | ۳۹ | ۱۳ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۲ | ۹۲ | ۶۵ | ۳۸ | ۱۲ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۱ | ۹۱ | ۶۴ | ۳۷ | ۱۱ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۱ | ۹۰ | ۶۳ | ۳۶ | ۱۰ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۰ | ۸۹ | ۶۲ | ۳۵ | ۹ | - | - | - | - | - |
| ۱۷۰ | ۸۸ | ۶۱ | ۳۴ | ۸ | - | - | - | - | - |
| ۱۶۹ | ۸۷ | ۶۰ | ۳۳ | ۷ | - | - | - | - | - |
| ۱۶۹ | ۸۶ | ۵۹ | ۳۲ | ۶ | - | - | - | - | - |
| ۱۶۸ | ۸۵ | ۵۸ | ۳۱ | ۵ | - | - | - | - | - |
| ۱۶۸ | ۸۴ | ۵۷ | ۳۰ | ۴ | - | - | - | - | - |
| ۱۶۷ | ۸۳ | | | | | | | | |

طبعی جیو

نق

۱۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰ ۵۰ ۶۰ ۷۰ ۸۰ ۹۰ ۰

۷۲۵

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----|
| ۲۲۵ | ۲۰۰ | ۱۷۵ | ۱۵۰ | ۱۲۵ | ۱۰۰ | ۷۵ | ۵۰ | ۲۵ | ۵۹ | ۵۰۱۲۵۲ | ۵۰۵۱۰۰۲ | ۵۰۷۵۰۲ | ۵۰۵۰۵۳ | ۵۰۰۲۵۲ | ۵۰۵۰۰۰۰ | ۲۱ |
| ۲۲۳ | ۱۹۸ | ۱۷۳ | ۱۴۸ | ۱۲۳ | ۹۹ | ۷۴ | ۵۰ | ۲۵ | ۵۸ | ۵۰۲۷۷۵ | ۵۰۲۷۲۹۸ | ۵۰۲۷۲۵۰ | ۵۰۲۰۰۲ | ۵۰۱۷۷۵۳ | ۵۰۱۵۰۰۲ | ۲۱ |
| ۲۲۱ | ۱۹۶ | ۱۷۲ | ۱۴۷ | ۱۲۳ | ۹۸ | ۷۳ | ۴۹ | ۲۵ | ۵۷ | ۵۰۲۲۲۰ | ۵۰۲۹۷۵۰ | ۵۰۲۷۷۴۰ | ۵۰۲۹۲۹۲ | ۵۰۲۳۲۳۸ | ۵۰۲۹۹۹۲ | ۲۲ |
| ۲۱۹ | ۱۹۴ | ۱۷۰ | ۱۴۶ | ۱۲۲ | ۹۷ | ۷۲ | ۴۸ | ۲۴ | ۵۶ | ۵۰۵۲۷۷۷ | ۵۰۵۲۷۳۶ | ۵۰۵۱۹۹۲ | ۵۰۵۲۹۵۱ | ۵۰۴۷۷۰۸ | ۵۰۴۲۷۴۲ | ۲۳ |
| ۲۱۶ | ۱۹۲ | ۱۶۸ | ۱۴۴ | ۱۲۰ | ۹۶ | ۷۲ | ۴۸ | ۲۴ | ۵۵ | ۵۰۷۷۱۱۹ | ۵۰۷۴۸۸۰ | ۵۰۷۴۲۹۱ | ۵۰۷۴۲۰۱ | ۵۰۷۴۱۰۶ | ۵۰۵۹۹۱۹ | ۲۴ |
| ۲۱۳ | ۱۹۰ | ۱۶۶ | ۱۴۲ | ۱۱۹ | ۹۵ | ۷۱ | ۴۷ | ۲۳ | ۵۴ | ۵۰۸۵۵۲۳ | ۵۰۸۵۴۰۷ | ۵۰۸۵۰۰۷ | ۵۰۷۷۸۳۲ | ۵۰۷۷۵۹۶ | ۵۰۷۷۲۵۸ | ۲۵ |
| ۲۱۱ | ۱۸۷ | ۱۶۳ | ۱۳۹ | ۱۱۷ | ۹۴ | ۷۰ | ۴۷ | ۲۲ | ۵۳ | ۵۰۹۹۹۲۹ | ۵۰۹۷۷۱۶ | ۵۰۹۹۲۸۲ | ۵۰۹۹۲۲۸ | ۵۰۹۰۰۱۲ | ۵۰۸۷۷۷۹ | ۲۶ |
| ۲۰۸ | ۱۸۵ | ۱۶۲ | ۱۳۹ | ۱۱۶ | ۹۲ | ۷۰ | ۴۶ | ۲۲ | ۵۲ | ۵۱۱۳۳۷۷ | ۵۱۱۳۰۰۷ | ۵۱۰۸۷۷۴ | ۵۱۰۴۲۹۵ | ۵۱۰۴۲۱۲ | ۵۱۰۱۸۸۲ | ۲۷ |
| ۲۰۵ | ۱۸۲ | ۱۵۹ | ۱۳۷ | ۱۱۴ | ۹۱ | ۶۸ | ۴۶ | ۲۲ | ۵۱ | ۵۱۲۷۷۷۷ | ۵۱۲۷۷۷۹ | ۵۱۲۷۲۵۱ | ۵۱۲۰۰۲۲ | ۵۱۱۷۷۷۹ | ۵۱۱۵۰۰۶ | ۲۸ |
| ۲۰۲ | ۱۷۹ | ۱۵۷ | ۱۳۵ | ۱۱۲ | ۹۰ | ۶۷ | ۴۵ | ۲۲ | ۵۰ | ۵۱۴۰۰۵۶ | ۵۱۳۸۲۳۲ | ۵۱۳۷۷۰۸ | ۵۱۳۲۳۸۳ | ۵۱۳۱۵۸۸ | ۵۱۲۹۲۳۲ | ۲۹ |

زق

طبعی تریب

| ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ | ١١ | ١٢ | ١٣ | ١٤ | ١٥ | ١٦ | ١٧ | ١٨ | ١٩ | ٢٠ | ٢١ | ٢٢ | ٢٣ | ٢٤ | ٢٥ | ٢٦ | ٢٧ | ٢٨ | ٢٩ | ٣٠ | ٣١ | ٣٢ | ٣٣ | ٣٤ | ٣٥ | ٣٦ | ٣٧ | ٣٨ | ٣٩ | ٤٠ | ٤١ | ٤٢ | ٤٣ | ٤٤ | ٤٥ | ٤٦ | ٤٧ | ٤٨ | ٤٩ | ٥٠ | ٥١ | ٥٢ | ٥٣ | ٥٤ | ٥٥ | ٥٦ | ٥٧ | ٥٨ | ٥٩ | ٦٠ | ٦١ | ٦٢ | ٦٣ | ٦٤ | ٦٥ | ٦٦ | ٦٧ | ٦٨ | ٦٩ | ٧٠ | ٧١ | ٧٢ | ٧٣ | ٧٤ | ٧٥ | ٧٦ | ٧٧ | ٧٨ | ٧٩ | ٨٠ | ٨١ | ٨٢ | ٨٣ | ٨٤ | ٨٥ | ٨٦ | ٨٧ | ٨٨ | ٨٩ | ٩٠ | ٩١ | ٩٢ | ٩٣ | ٩٤ | ٩٥ | ٩٦ | ٩٧ | ٩٨ | ٩٩ | ١٠٠ | |
|-----|
| ١٠٠ | ١٠١ | ١٠٢ | ١٠٣ | ١٠٤ | ١٠٥ | ١٠٦ | ١٠٧ | ١٠٨ | ١٠٩ | ١١٠ | ١١١ | ١١٢ | ١١٣ | ١١٤ | ١١٥ | ١١٦ | ١١٧ | ١١٨ | ١١٩ | ١٢٠ | ١٢١ | ١٢٢ | ١٢٣ | ١٢٤ | ١٢٥ | ١٢٦ | ١٢٧ | ١٢٨ | ١٢٩ | ١٣٠ | ١٣١ | ١٣٢ | ١٣٣ | ١٣٤ | ١٣٥ | ١٣٦ | ١٣٧ | ١٣٨ | ١٣٩ | ١٤٠ | ١٤١ | ١٤٢ | ١٤٣ | ١٤٤ | ١٤٥ | ١٤٦ | ١٤٧ | ١٤٨ | ١٤٩ | ١٥٠ | ١٥١ | ١٥٢ | ١٥٣ | ١٥٤ | ١٥٥ | ١٥٦ | ١٥٧ | ١٥٨ | ١٥٩ | ١٦٠ | ١٦١ | ١٦٢ | ١٦٣ | ١٦٤ | ١٦٥ | ١٦٦ | ١٦٧ | ١٦٨ | ١٦٩ | ١٧٠ | ١٧١ | ١٧٢ | ١٧٣ | ١٧٤ | ١٧٥ | ١٧٦ | ١٧٧ | ١٧٨ | ١٧٩ | ١٨٠ | ١٨١ | ١٨٢ | ١٨٣ | ١٨٤ | ١٨٥ | ١٨٦ | ١٨٧ | ١٨٨ | ١٨٩ | ١٩٠ | ١٩١ | ١٩٢ | ١٩٣ | ١٩٤ | ١٩٥ | ١٩٦ | ١٩٧ | ١٩٨ | ١٩٩ | ٢٠٠ |

٣٥

१०८५७८९१०१११२१३१४१५१६१७१८१९२०

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 | 129 | 130 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 138 | 139 | 140 | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 150 | 151 | 152 | 153 | 154 | 155 | 156 | 157 | 158 | 159 | 160 | 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 170 | 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 | 181 | 182 | 183 | 184 | 185 | 186 | 187 | 188 | 189 | 190 | 191 | 192 | 193 | 194 | 195 | 196 | 197 | 198 | 199 | 200 | 201 | 202 | 203 | 204 | 205 | 206 | 207 | 208 | 209 | 210 | 211 | 212 | 213 | 214 | 215 | 216 | 217 | 218 | 219 | 220 | 221 | 222 | 223 | 224 | 225 | 226 | 227 | 228 | 229 | 230 | 231 | 232 | 233 | 234 | 235 | 236 | 237 | 238 | 239 | 240 | 241 | 242 | 243 | 244 | 245 | 246 | 247 | 248 | 249 | 250 | 251 | 252 | 253 | 254 | 255 | 256 | 257 | 258 | 259 | 260 | 261 | 262 | 263 | 264 | 265 | 266 | 267 | 268 | 269 | 270 | 271 | 272 | 273 | 274 | 275 | 276 | 277 | 278 | 279 | 280 | 281 | 282 | 283 | 284 | 285 | 286 | 287 | 288 | 289 | 290 | 291 | 292 | 293 | 294 | 295 | 296 | 297 | 298 | 299 | 300 | 301 | 302 | 303 | 304 | 305 | 306 | 307 | 308 | 309 | 310 | 311 | 312 | 313 | 314 | 315 | 316 | 317 | 318 | 319 | 320 | 321 | 322 | 323 | 324 | 325 | 326 | 327 | 328 | 329 | 330 | 331 | 332 | 333 | 334 | 335 | 336 | 337 | 338 | 339 | 340 | 341 | 342 | 343 | 344 | 345 | 346 | 347 | 348 | 349 | 350 | 351 | 352 | 353 | 354 | 355 | 356 | 357 | 358 | 359 | 360 | 361 | 362 | 363 | 364 | 365 | 366 | 367 | 368 | 369 | 370 | 371 | 372 | 373 | 374 | 375 | 376 | 377 | 378 | 379 | 380 | 381 | 382 | 383 | 384 | 385 | 386 | 387 | 388 | 389 | 390 | 391 | 392 | 393 | 394 | 395 | 396 | 397 | 398 | 399 | 400 | 401 | 402 | 403 | 404 | 405 | 406 | 407 | 408 | 409 | 410 | 411 | 412 | 413 | 414 | 415 | 416 | 417 | 418 | 419 | 420 | 421 | 422 | 423 | 424 | 425 | 426 | 427 | 428 | 429 | 430 | 431 | 432 | 433 | 434 | 435 | 436 | 437 | 438 | 439 | 440 | 441 | 442 | 443 | 444 | 445 | 446 | 447 | 448 | 449 | 450 | 451 | 452 | 453 | 454 | 455 | 456 | 457 | 458 | 459 | 460 | 461 | 462 | 463 | 464 | 465 | 466 | 467 | 468 | 469 | 470 | 471 | 472 | 473 | 474 | 475 | 476 | 477 | 478 | 479 | 480 | 481 | 482 | 483 | 484 | 485 | 486 | 487 | 488 | 489 | 490 | 491 | 492 | 493 | 494 | 495 | 496 | 497 | 498 | 499 | 500 | 501 | 502 | 503 | 504 | 505 | 506 | 507 | 508 | 509 | 510 | 511 | 512 | 513 | 514 | 515 | 516 | 517 | 518 | 519 | 520 | 521 | 522 | 523 | 524 | 525 | 526 | 527 | 528 | 529 | 530 | 531 | 532 | 533 | 534 | 535 | 536 | 537 | 538 | 539 | 540 | 541 | 542 | 543 | 544 | 545 | 546 | 547 | 548 | 549 | 550 | 551 | 552 | 553 | 554 | 555 | 556 | 557 | 558 | 559 | 560 | 561 | 562 | 563 | 564 | 565 | 566 | 567 | 568 | 569 | 570 | 571 | 572 | 573 | 574 | 575 | 576 | 577 | 578 | 579 | 580 | 581 | 582 | 583 | 584 | 585 | 586 | 587 | 588 | 589 | 590 | 591 | 592 | 593 | 594 | 595 | 596 | 597 | 598 | 599 | 600 | 601 | 602 | 603 | 604 | 605 | 606 | 607 | 608 | 609 | 610 | 611 | 612 | 613 | 614 | 615 | 616 | 617 | 618 | 619 | 620 | 621 | 622 | 623 | 624 | 625 | 626 | 627 | 628 | 629 | 630 | 631 | 632 | 633 | 634 | 635 | 636 | 637 | 638 | 639 | 640 | 641 | 642 | 643 | 644 | 645 | 646 | 647 | 648 | 649 | 650 | 651 | 652 | 653 | 654 | 655 | 656 | 657 | 658 | 659 | 660 | 661 | 662 | 663 | 664 | 665 | 666 | 667 | 668 | 669 | 670 | 671 | 672 | 673 | 674 | 675 | 676 | 677 | 678 | 679 | 680 | 681 | 682 | 683 | 684 | 685 | 686 | 687 | 688 | 689 | 690 | 691 | 692 | 693 | 694 | 695 | 696 | 697 | 698 | 699 | 700 | 701 | 702 | 703 | 704 | 705 | 706 | 707 | 708 | 709 | 710 | 711 | 712 | 713 | 714 | 715 | 716 | 717 | 718 | 719 | 720 | 721 | 722 | 723 | 724 | 725 | 726 | 727 | 728 | 729 | 730 | 731 | 732 | 733 | 734 | 735 | 736 | 737 | 738 | 739 | 740 | 741 | 742 | 743 | 744 | 745 | 746 | 747 | 748 | 749 | 750 | 751 | 752 | 753 | 754 | 755 | 756 | 757 | 758 | 759 | 760 | 761 | 762 | 763 | 764 | 765 | 766 | 767 | 768 | 769 | 770 | 771 | 772 | 773 | 774 | 775 | 776 | 777 | 778 | 779 | 780 | 781 | 782 | 783 | 784 | 785 | 786 | 787 | 788 | 789 | 790 | 791 | 792 | 793 | 794 | 795 | 796 | 797 | 798 | 799 | 800 | 801 | 802 | 803 | 804 | 805 | 806 | 807 | 808 | 809 | 810 | 811 | 812 | 813 | 814 | 815 | 816 | 817 | 818 | 819 | 820 | 821 | 822 | 823 | 824 | 825 | 826 | 827 | 828 | 829 | 830 | 831 | 832 | 833 | 834 | 835 | 836 | 837 | 838 | 839 | 840 | 841 | 842 | 843 | 844 | 845 | 846 | 847 | 848 | 849 | 850 | 851 | 852 | 853 | 854 | 855 | 856 | 857 | 858 | 859 | 860 | 861 | 862 | 863 | 864 | 865 | 866 | 867 | 868 | 869 | 870 | 871 | 872 | 873 | 874 | 875 | 876 | 877 | 878 | 879 | 880 | 881 | 882 | 883 | 884 | 885 | 886 | 887 | 888 | 889 | 890 | 891 | 892 | 893 | 894 | 895 | 896 | 897 | 898 | 899 | 900 | 901 | 902 | 903 | 904 | 905 | 906 | 907 | 908 | 909 | 910 | 911 | 912 | 913 | 914 | 915 | 916 | 917 | 918 | 919 | 920 | 921 | 922 | 923 | 924 | 925 | 926 | 927 | 928 | 929 | 930 | 931 | 932 | 933 | 934 | 935 | 936 | 937 | 938 | 939 | 940 | 941 | 942 | 943 | 944 | 945 | 946 | 947 | 948 | 949 | 950 | 951 | 952 | 953 | 954 | 955 | 956 | 957 | 958 | 959 | 960 | 961 | 962 | 963 | 964 | 965 | 966 | 967 | 968 | 969 | 970 | 971 | 972 | 973 | 974 | 975 | 976 | 977 | 978 | 979 | 980 | 981 | 982 | 983 | 984 | 985 | 986 | 987 | 988 | 989 | 990 | 991 | 992 | 993 | 994 | 995 | 996 | 997 | 998 | 999 | 1000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|------|
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|------|

१२३४५६७८९१०१११२१३१४१५१६१७१८१९२०२१२२२३२४२५२६२७२८२९३०३१३२३३३४३५३६३७३८३९४०४१४२४३४४४५४६४७४८४९५०५१५२५३५४५५५६५७५८५९६०६१६२६३६४६५६६६७६८६९७०७१७२७३७४७५७६७७७८७९८०८१८२८३८४८५८६८७८८८९९०९१९२९३९४९५९६९७९८९९

[illegible]

| نق | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|
| ۲۷۱ | ۲۲۱ | ۱۸۱ | ۱۵۱ | ۱۲۰ | ۹۰ | ۶۰ | ۳۰ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۷۳ | ۲۲۲ | ۱۸۲ | ۱۵۲ | ۱۲۱ | ۹۱ | ۶۱ | ۳۱ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۷۵ | ۲۲۳ | ۱۸۳ | ۱۵۳ | ۱۲۲ | ۹۲ | ۶۲ | ۳۲ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۷۶ | ۲۲۴ | ۱۸۴ | ۱۵۴ | ۱۲۳ | ۹۳ | ۶۳ | ۳۳ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۷۷ | ۲۲۵ | ۱۸۵ | ۱۵۵ | ۱۲۴ | ۹۴ | ۶۴ | ۳۴ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۷۸ | ۲۲۶ | ۱۸۶ | ۱۵۶ | ۱۲۵ | ۹۵ | ۶۵ | ۳۵ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۷۹ | ۲۲۷ | ۱۸۷ | ۱۵۷ | ۱۲۶ | ۹۶ | ۶۶ | ۳۶ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۸۰ | ۲۲۸ | ۱۸۸ | ۱۵۸ | ۱۲۷ | ۹۷ | ۶۷ | ۳۷ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۸۱ | ۲۲۹ | ۱۸۹ | ۱۵۹ | ۱۲۸ | ۹۸ | ۶۸ | ۳۸ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۸۲ | ۲۳۰ | ۱۹۰ | ۱۶۰ | ۱۲۹ | ۹۹ | ۶۹ | ۳۹ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۸۳ | ۲۳۱ | ۱۹۱ | ۱۶۱ | ۱۳۰ | ۱۰۰ | ۷۰ | ۴۰ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۸۴ | ۲۳۲ | ۱۹۲ | ۱۶۲ | ۱۳۱ | ۱۰۱ | ۷۱ | ۴۱ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۸۵ | ۲۳۳ | ۱۹۳ | ۱۶۳ | ۱۳۲ | ۱۰۲ | ۷۲ | ۴۲ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۸۶ | ۲۳۴ | ۱۹۴ | ۱۶۴ | ۱۳۳ | ۱۰۳ | ۷۳ | ۴۳ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۸۷ | ۲۳۵ | ۱۹۵ | ۱۶۵ | ۱۳۴ | ۱۰۴ | ۷۴ | ۴۴ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۸۸ | ۲۳۶ | ۱۹۶ | ۱۶۶ | ۱۳۵ | ۱۰۵ | ۷۵ | ۴۵ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۸۹ | ۲۳۷ | ۱۹۷ | ۱۶۷ | ۱۳۶ | ۱۰۶ | ۷۶ | ۴۶ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۹۰ | ۲۳۸ | ۱۹۸ | ۱۶۸ | ۱۳۷ | ۱۰۷ | ۷۷ | ۴۷ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۹۱ | ۲۳۹ | ۱۹۹ | ۱۶۹ | ۱۳۸ | ۱۰۸ | ۷۸ | ۴۸ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۹۲ | ۲۴۰ | ۲۰۰ | ۱۷۰ | ۱۳۹ | ۱۰۹ | ۷۹ | ۴۹ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۹۳ | ۲۴۱ | ۲۰۱ | ۱۷۱ | ۱۴۰ | ۱۱۰ | ۸۰ | ۵۰ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۹۴ | ۲۴۲ | ۲۰۲ | ۱۷۲ | ۱۴۱ | ۱۱۱ | ۸۱ | ۵۱ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۹۵ | ۲۴۳ | ۲۰۳ | ۱۷۳ | ۱۴۲ | ۱۱۲ | ۸۲ | ۵۲ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۹۶ | ۲۴۴ | ۲۰۴ | ۱۷۴ | ۱۴۳ | ۱۱۳ | ۸۳ | ۵۳ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۹۷ | ۲۴۵ | ۲۰۵ | ۱۷۵ | ۱۴۴ | ۱۱۴ | ۸۴ | ۵۴ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۹۸ | ۲۴۶ | ۲۰۶ | ۱۷۶ | ۱۴۵ | ۱۱۵ | ۸۵ | ۵۵ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۲۹۹ | ۲۴۷ | ۲۰۷ | ۱۷۷ | ۱۴۶ | ۱۱۶ | ۸۶ | ۵۶ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۰۰ | ۲۴۸ | ۲۰۸ | ۱۷۸ | ۱۴۷ | ۱۱۷ | ۸۷ | ۵۷ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۰۱ | ۲۴۹ | ۲۰۹ | ۱۷۹ | ۱۴۸ | ۱۱۸ | ۸۸ | ۵۸ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۰۲ | ۲۵۰ | ۲۱۰ | ۱۸۰ | ۱۴۹ | ۱۱۹ | ۸۹ | ۵۹ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۰۳ | ۲۵۱ | ۲۱۱ | ۱۸۱ | ۱۵۰ | ۱۲۰ | ۹۰ | ۶۰ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۰۴ | ۲۵۲ | ۲۱۲ | ۱۸۲ | ۱۵۱ | ۱۲۱ | ۹۱ | ۶۱ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۰۵ | ۲۵۳ | ۲۱۳ | ۱۸۳ | ۱۵۲ | ۱۲۲ | ۹۲ | ۶۲ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۰۶ | ۲۵۴ | ۲۱۴ | ۱۸۴ | ۱۵۳ | ۱۲۳ | ۹۳ | ۶۳ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۰۷ | ۲۵۵ | ۲۱۵ | ۱۸۵ | ۱۵۴ | ۱۲۴ | ۹۴ | ۶۴ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۰۸ | ۲۵۶ | ۲۱۶ | ۱۸۶ | ۱۵۵ | ۱۲۵ | ۹۵ | ۶۵ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۰۹ | ۲۵۷ | ۲۱۷ | ۱۸۷ | ۱۵۶ | ۱۲۶ | ۹۶ | ۶۶ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۱۰ | ۲۵۸ | ۲۱۸ | ۱۸۸ | ۱۵۷ | ۱۲۷ | ۹۷ | ۶۷ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۱۱ | ۲۵۹ | ۲۱۹ | ۱۸۹ | ۱۵۸ | ۱۲۸ | ۹۸ | ۶۸ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۱۲ | ۲۶۰ | ۲۲۰ | ۱۹۰ | ۱۵۹ | ۱۲۹ | ۹۹ | ۶۹ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۱۳ | ۲۶۱ | ۲۲۱ | ۱۹۱ | ۱۶۰ | ۱۳۰ | ۱۰۰ | ۷۰ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۱۴ | ۲۶۲ | ۲۲۲ | ۱۹۲ | ۱۶۱ | ۱۳۱ | ۱۰۱ | ۷۱ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۱۵ | ۲۶۳ | ۲۲۳ | ۱۹۳ | ۱۶۲ | ۱۳۲ | ۱۰۲ | ۷۲ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۱۶ | ۲۶۴ | ۲۲۴ | ۱۹۴ | ۱۶۳ | ۱۳۳ | ۱۰۳ | ۷۳ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۱۷ | ۲۶۵ | ۲۲۵ | ۱۹۵ | ۱۶۴ | ۱۳۴ | ۱۰۴ | ۷۴ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۱۸ | ۲۶۶ | ۲۲۶ | ۱۹۶ | ۱۶۵ | ۱۳۵ | ۱۰۵ | ۷۵ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۱۹ | ۲۶۷ | ۲۲۷ | ۱۹۷ | ۱۶۶ | ۱۳۶ | ۱۰۶ | ۷۶ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۲۰ | ۲۶۸ | ۲۲۸ | ۱۹۸ | ۱۶۷ | ۱۳۷ | ۱۰۷ | ۷۷ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۲۱ | ۲۶۹ | ۲۲۹ | ۱۹۹ | ۱۶۸ | ۱۳۸ | ۱۰۸ | ۷۸ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۲۲ | ۲۷۰ | ۲۳۰ | ۲۰۰ | ۱۶۹ | ۱۳۹ | ۱۰۹ | ۷۹ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۲۳ | ۲۷۱ | ۲۳۱ | ۲۰۱ | ۱۷۰ | ۱۴۰ | ۱۱۰ | ۸۰ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۲۴ | ۲۷۲ | ۲۳۲ | ۲۰۲ | ۱۷۱ | ۱۴۱ | ۱۱۱ | ۸۱ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۲۵ | ۲۷۳ | ۲۳۳ | ۲۰۳ | ۱۷۲ | ۱۴۲ | ۱۱۲ | ۸۲ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۲۶ | ۲۷۴ | ۲۳۴ | ۲۰۴ | ۱۷۳ | ۱۴۳ | ۱۱۳ | ۸۳ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۲۷ | ۲۷۵ | ۲۳۵ | ۲۰۵ | ۱۷۴ | ۱۴۴ | ۱۱۴ | ۸۴ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۲۸ | ۲۷۶ | ۲۳۶ | ۲۰۶ | ۱۷۵ | ۱۴۵ | ۱۱۵ | ۸۵ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۲۹ | ۲۷۷ | ۲۳۷ | ۲۰۷ | ۱۷۶ | ۱۴۶ | ۱۱۶ | ۸۶ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۳۰ | ۲۷۸ | ۲۳۸ | ۲۰۸ | ۱۷۷ | ۱۴۷ | ۱۱۷ | ۸۷ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۳۱ | ۲۷۹ | ۲۳۹ | ۲۰۹ | ۱۷۸ | ۱۴۸ | ۱۱۸ | ۸۸ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۳۲ | ۲۸۰ | ۲۴۰ | ۲۱۰ | ۱۷۹ | ۱۴۹ | ۱۱۹ | ۸۹ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۳۳ | ۲۸۱ | ۲۴۱ | ۲۱۱ | ۱۸۰ | ۱۵۰ | ۱۲۰ | ۹۰ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۳۴ | ۲۸۲ | ۲۴۲ | ۲۱۲ | ۱۸۱ | ۱۵۱ | ۱۲۱ | ۹۱ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۳۵ | ۲۸۳ | ۲۴۳ | ۲۱۳ | ۱۸۲ | ۱۵۲ | ۱۲۲ | ۹۲ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۳۶ | ۲۸۴ | ۲۴۴ | ۲۱۴ | ۱۸۳ | ۱۵۳ | ۱۲۳ | ۹۳ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۳۷ | ۲۸۵ | ۲۴۵ | ۲۱۵ | ۱۸۴ | ۱۵۴ | ۱۲۴ | ۹۴ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۳۸ | ۲۸۶ | ۲۴۶ | ۲۱۶ | ۱۸۵ | ۱۵۵ | ۱۲۵ | ۹۵ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۳۹ | ۲۸۷ | ۲۴۷ | ۲۱۷ | ۱۸۶ | ۱۵۶ | ۱۲۶ | ۹۶ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۴۰ | ۲۸۸ | ۲۴۸ | ۲۱۸ | ۱۸۷ | ۱۵۷ | ۱۲۷ | ۹۷ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۴۱ | ۲۸۹ | ۲۴۹ | ۲۱۹ | ۱۸۸ | ۱۵۸ | ۱۲۸ | ۹۸ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۴۲ | ۲۹۰ | ۲۵۰ | ۲۲۰ | ۱۸۹ | ۱۵۹ | ۱۲۹ | ۹۹ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۴۳ | ۲۹۱ | ۲۵۱ | ۲۲۱ | ۱۹۰ | ۱۶۰ | ۱۳۰ | ۱۰۰ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۴۴ | ۲۹۲ | ۲۵۲ | ۲۲۲ | ۱۹۱ | ۱۶۱ | ۱۳۱ | ۱۰۱ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۴۵ | ۲۹۳ | ۲۵۳ | ۲۲۳ | ۱۹۲ | ۱۶۲ | ۱۳۲ | ۱۰۲ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۴۶ | ۲۹۴ | ۲۵۴ | ۲۲۴ | ۱۹۳ | ۱۶۳ | ۱۳۳ | ۱۰۳ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۴۷ | ۲۹۵ | ۲۵۵ | ۲۲۵ | ۱۹۴ | ۱۶۴ | ۱۳۴ | ۱۰۴ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۴۸ | ۲۹۶ | ۲۵۶ | ۲۲۶ | ۱۹۵ | ۱۶۵ | ۱۳۵ | ۱۰۵ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۴۹ | ۲۹۷ | ۲۵۷ | ۲۲۷ | ۱۹۶ | ۱۶۶ | ۱۳۶ | ۱۰۶ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۵۰ | ۲۹۸ | ۲۵۸ | ۲۲۸ | ۱۹۷ | ۱۶۷ | ۱۳۷ | ۱۰۷ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۵۱ | ۲۹۹ | ۲۵۹ | ۲۲۹ | ۱۹۸ | ۱۶۸ | ۱۳۸ | ۱۰۸ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۵۲ | ۳۰۰ | ۲۶۰ | ۲۳۰ | ۱۹۹ | ۱۶۹ | ۱۳۹ | ۱۰۹ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۵۳ | ۳۰۱ | ۲۶۱ | ۲۳۱ | ۲۰۰ | ۱۷۰ | ۱۴۰ | ۱۱۰ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۵۴ | ۳۰۲ | ۲۶۲ | ۲۳۲ | ۲۰۱ | ۱۷۱ | ۱۴۱ | ۱۱۱ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۵۵ | ۳۰۳ | ۲۶۳ | ۲۳۳ | ۲۰۲ | ۱۷۲ | ۱۴۲ | ۱۱۲ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۵۶ | ۳۰۴ | ۲۶۴ | ۲۳۴ | ۲۰۳ | ۱۷۳ | ۱۴۳ | ۱۱۳ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۵۷ | ۳۰۵ | ۲۶۵ | ۲۳۵ | ۲۰۴ | ۱۷۴ | ۱۴۴ | ۱۱۴ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۵۸ | ۳۰۶ | ۲۶۶ | ۲۳۶ | ۲۰۵ | ۱۷۵ | ۱۴۵ | ۱۱۵ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۵۹ | ۳۰۷ | ۲۶۷ | ۲۳۷ | ۲۰۶ | ۱۷۶ | ۱۴۶ | ۱۱۶ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۶۰ | ۳۰۸ | ۲۶۸ | ۲۳۸ | ۲۰۷ | ۱۷۷ | ۱۴۷ | ۱۱۷ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۶۱ | ۳۰۹ | ۲۶۹ | ۲۳۹ | ۲۰۸ | ۱۷۸ | ۱۴۸ | ۱۱۸ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۶۲ | ۳۱۰ | ۲۷۰ | ۲۴۰ | ۲۰۹ | ۱۷۹ | ۱۴۹ | ۱۱۹ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۶۳ | ۳۱۱ | ۲۷۱ | ۲۴۱ | ۲۱۰ | ۱۸۰ | ۱۵۰ | ۱۲۰ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۶۴ | ۳۱۲ | ۲۷۲ | ۲۴۲ | ۲۱۱ | ۱۸۱ | ۱۵۱ | ۱۲۱ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۶۵ | ۳۱۳ | ۲۷۳ | ۲۴۳ | ۲۱۲ | ۱۸۲ | ۱۵۲ | ۱۲۲ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۶۶ | ۳۱۴ | ۲۷۴ | ۲۴۴ | ۲۱۳ | ۱۸۳ | ۱۵۳ | ۱۲۳ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۶۷ | ۳۱۵ | ۲۷۵ | ۲۴۵ | ۲۱۴ | ۱۸۴ | ۱۵۴ | ۱۲۴ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۶۸ | ۳۱۶ | ۲۷۶ | ۲۴۶ | ۲۱۵ | ۱۸۵ | ۱۵۵ | ۱۲۵ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۶۹ | ۳۱۷ | ۲۷۷ | ۲۴۷ | ۲۱۶ | ۱۸۶ | ۱۵۶ | ۱۲۶ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۷۰ | ۳۱۸ | ۲۷۸ | ۲۴۸ | ۲۱۷ | ۱۸۷ | ۱۵۷ | ۱۲۷ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۷۱ | ۳۱۹ | ۲۷۹ | ۲۴۹ | ۲۱۸ | ۱۸۸ | ۱۵۸ | ۱۲۸ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۷۲ | ۳۲۰ | ۲۸۰ | ۲۵۰ | ۲۱۹ | ۱۸۹ | ۱۵۹ | ۱۲۹ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۷۳ | ۳۲۱ | ۲۸۱ | ۲۵۱ | ۲۲۰ | ۱۹۰ | ۱۶۰ | ۱۳۰ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۷۴ | ۳۲۲ | ۲۸۲ | ۲۵۲ | ۲۲۱ | ۱۹۱ | ۱۶۱ | ۱۳۱ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۷۵ | ۳۲۳ | ۲۸۳ | ۲۵۳ | ۲۲۲ | ۱۹۲ | ۱۶۲ | ۱۳۲ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۷۶ | ۳۲۴ | ۲۸۴ | ۲۵۴ | ۲۲۳ | ۱۹۳ | ۱۶۳ | ۱۳۳ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۷۷ | ۳۲۵ | ۲۸۵ | ۲۵۵ | ۲۲۴ | ۱۹۴ | ۱۶۴ | ۱۳۴ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۷۸ | ۳۲۶ | ۲۸۶ | ۲۵۶ | ۲۲۵ | ۱۹۵ | ۱۶۵ | ۱۳۵ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۷۹ | ۳۲۷ | ۲۸۷ | ۲۵۷ | ۲۲۶ | ۱۹۶ | ۱۶۶ | ۱۳۶ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۸۰ | ۳۲۸ | ۲۸۸ | ۲۵۸ | ۲۲۷ | ۱۹۷ | ۱۶۷ | ۱۳۷ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۸۱ | ۳۲۹ | ۲۸۹ | ۲۵۹ | ۲۲۸ | ۱۹۸ | ۱۶۸ | ۱۳۸ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۸۲ | ۳۳۰ | ۲۹۰ | ۲۶۰ | ۲۲۹ | ۱۹۹ | ۱۶۹ | ۱۳۹ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۸۳ | ۳۳۱ | ۲۹۱ | ۲۶۱ | ۲۳۰ | ۲۰۰ | ۱۷۰ | ۱۴۰ | ۲۹ | ۲۸ |
| ۳۸۴ | ۳۳ | | | | | | | | |

१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|---------|--------|--------|--------|---------|---------|
| ۲۹۸ | ۲۹۵ | ۲۳۲ | ۱۹۹ | ۱۶۶ | ۱۳۳ | ۱۰۰ | ۶۶ | ۳۳ | ۶۹ | -۵۳۸۰۵۳ | -۳۳۷۲۰ | ۵۳۷۳۸۸ | ۳۳۷۰۷۵ | -۳۳۹۷۲۷ | -۵۳۷۳۸۸ |
| ۲۹۲ | ۲۹۹ | ۲۳۶ | ۲۰۲ | ۱۶۸ | ۱۳۶ | ۱۰۱ | ۶۷ | ۳۴ | ۶۸ | ۵۳۰۰۶۵ | ۳۳۹۷۲۷ | ۵۳۹۳۹۱ | ۳۳۹۰۵۵ | ۳۳۸۷۳۱ | ۵۳۷۳۸۸ |
| ۲۹۰ | ۲۷۳ | ۲۳۹ | ۲۰۵ | ۱۷۰ | ۱۳۹ | ۱۰۲ | ۶۸ | ۳۴ | ۷۷ | ۵۳۲۱۰۵ | ۵۳۱۷۳۳ | ۵۳۱۵۲۱ | ۵۳۱۰۸۱ | ۵۳۰۷۲۷ | ۵۳۰۳۸۸ |
| ۳۱۱ | ۲۷۷ | ۲۴۲ | ۲۰۸ | ۱۷۳ | ۱۳۸ | ۱۰۴ | ۶۹ | ۳۵ | ۷۶ | ۵۳۱۷۷۵ | ۵۳۳۸۲۸ | ۵۳۳۳۸۱ | ۵۳۳۱۳۴ | ۵۳۲۷۷۱ | ۵۳۲۳۸۸ |
| ۳۱۶ | ۲۸۱ | ۲۴۶ | ۲۱۱ | ۱۷۶ | ۱۴۰ | ۱۰۵ | ۷۰ | ۳۵ | ۷۵ | ۵۳۲۷۷۷ | ۵۳۵۹۲۲ | ۵۳۵۵۷۳ | ۵۳۵۳۳۳ | ۵۳۵۷۷۲ | ۵۳۵۳۸۸ |

APF

۷۳۵

| رق | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| ۳۵۳ | ۳۱۳ | ۲۷۴ | ۲۳۵ | ۱۹۶ | ۱۵۷ | ۱۱۸ | ۷۹ | ۴۰ | ۰۰۰ |
| ۳۴۰ | ۳۰۰ | ۲۶۰ | ۲۲۰ | ۱۸۰ | ۱۴۰ | ۱۰۰ | ۶۰ | ۲۰ | ۰۰۰ |
| ۳۲۷ | ۲۸۷ | ۲۴۷ | ۲۰۷ | ۱۶۷ | ۱۲۷ | ۸۷ | ۴۷ | ۰۷ | ۰۰۰ |
| ۳۱۴ | ۲۷۴ | ۲۳۴ | ۱۹۴ | ۱۵۴ | ۱۱۴ | ۷۴ | ۳۴ | ۰۴ | ۰۰۰ |
| ۳۰۱ | ۲۶۱ | ۲۲۱ | ۱۸۱ | ۱۴۱ | ۱۰۱ | ۶۱ | ۲۱ | ۰۱ | ۰۰۰ |
| ۲۸۸ | ۲۴۸ | ۲۰۸ | ۱۶۸ | ۱۲۸ | ۸۸ | ۴۸ | ۰۸ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۲۷۵ | ۲۳۵ | ۱۹۵ | ۱۵۵ | ۱۱۵ | ۷۵ | ۳۵ | ۰۵ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۲۶۲ | ۲۲۲ | ۱۸۲ | ۱۴۲ | ۱۰۲ | ۶۲ | ۲۲ | ۰۲ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۲۴۹ | ۲۰۹ | ۱۶۹ | ۱۲۹ | ۸۹ | ۴۹ | ۰۹ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۲۳۶ | ۱۹۶ | ۱۵۶ | ۱۱۶ | ۷۶ | ۳۶ | ۰۶ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۲۲۳ | ۱۸۳ | ۱۴۳ | ۱۰۳ | ۶۳ | ۲۳ | ۰۳ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۲۱۰ | ۱۷۰ | ۱۳۰ | ۹۰ | ۵۰ | ۱۰ | ۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۱۹۷ | ۱۵۷ | ۱۱۷ | ۷۷ | ۳۷ | ۰۷ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۱۸۴ | ۱۴۴ | ۱۰۴ | ۶۴ | ۲۴ | ۰۴ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۱۷۱ | ۱۳۱ | ۹۱ | ۵۱ | ۱۱ | ۰۱ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۱۵۸ | ۱۱۸ | ۷۸ | ۳۸ | ۰۸ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۱۴۵ | ۱۰۵ | ۶۵ | ۲۵ | ۰۵ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۱۳۲ | ۹۲ | ۵۲ | ۱۲ | ۰۲ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۱۱۹ | ۷۹ | ۳۹ | ۰۹ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۱۰۶ | ۶۶ | ۲۶ | ۰۶ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۰۹۳ | ۵۳ | ۱۳ | ۰۳ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۰۸۰ | ۴۰ | ۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۰۶۷ | ۳۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۰۵۴ | ۲۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۰۴۱ | ۱۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۰۳۸ | ۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۰۲۵ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۰۱۲ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |
| ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ | ۰۰۰ |

طبیعی جاساس

१०५७८९१०१११२१३१४१५१६१७१८१९२०२१२२२३२४२५२६२७२८२९३०३१३२३३३४३५३६३७३८३९४०४१४२४३४४४५४६४७४८४९५०५१५२५३५४५५५६५७५८५९६०६१६२६३६४६५६६६७६८६९७०७१७२७३७४७५७६७७७८७९८०८१८२८३८४८५८६८७८८८९९०९१९२९३९४९५९६९७९८९९

[illegible]

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| ۴۲۷ | ۵۷۵ | ۵۰۲ | ۲۳۱ | ۳۴۰ | ۲۸۸ | ۲۱۹ | ۱۳۲ | ۷۲ | ۳۲۹ | ۱۵۲۷۷۵۸ | ۱۵۲۷۰۳۱ | ۱۵۲۱۲۱۰ | ۱۵۲۰۵۹۳ | ۱۵۱۹۸۸۴ | ۱۵۱۹۱۷ |
| ۴۷۹ | ۴۰۱ | ۵۲۹ | ۴۵۱ | ۳۷۹ | ۳۰۰ | ۲۷۵ | ۱۵ | ۷۵ | ۳۸۰ | ۵۲۷۲۳۰ | ۵۲۷۲۷۱ | ۵۲۷۷۷۱ | ۵۲۷۹۹۹ | ۵۲۷۲۲۷ | ۵۲۳۲۷ |
| ۷۰۷ | ۴۲۸ | ۵۲۹ | ۲۷۱ | ۱۷۹۲ | ۲۱۲ | ۲۲۵ | ۱۵۷ | ۷۸ | ۳۷ | ۵۲۷۹۰۲ | ۵۲۷۱۱۰ | ۵۲۷۲۲۳ | ۵۲۷۵۲۱ | ۵۲۸۰۹۲ | ۵۲۷۷۹ |
| ۷۲۰ | ۴۵۸ | ۵۷۹ | ۲۹۳ | ۲۱۱۰ | ۲۲۹ | ۲۲۷ | ۱۳۲ | ۸۲ | ۳۲۹ | ۵۲۷۸۰۰ | ۵۲۷۵۹۷ | ۵۲۷۵۹۷ | ۵۲۷۳۳۳ | ۵۲۷۳۳۳ | ۵۲۷۳۳۳ |
| ۷۷۹ | ۴۹۰ | ۴۰۳ | ۵۱۷ | ۲۳۱ | ۲۲۵ | ۲۵۹ | ۱۷۲ | ۸۲ | ۳۷ | ۵۲۷۹۳۳ | ۵۲۷۱۰۹ | ۵۲۷۱۰۹ | ۵۲۷۳۳۳ | ۵۲۷۳۳۳ | ۵۲۷۳۳۳ |
| ۸۱۹ | ۷۲۵ | ۴۳۲ | ۵۲۲ | ۲۵۲ | ۲۷۳ | ۲۷۷ | ۱۸۱ | ۹۱ | ۳۲۹ | ۵۲۷۷۳۳ | ۵۲۷۴۱۱ | ۵۲۷۵۷۵ | ۵۲۷۵۹۷ | ۵۲۷۵۹۷ | ۵۲۷۲۸۱ |
| ۸۴۰ | ۷۴۲ | ۴۹۹ | ۵۷۲ | ۲۷۸ | ۲۸۷ | ۲۸۷ | ۱۹۱ | ۹۲ | ۳۲۹ | ۵۲۷۳۰۱۰ | ۵۲۷۲۲۲ | ۵۲۷۱۰۸ | ۵۲۷۱۲۳ | ۵۲۷۱۲۳ | ۵۲۷۲۲۵ |
| ۹۰۷ | ۸۰۹ | ۷۰۵ | ۴۰۲ | ۵۰۲ | ۳۲۳ | ۳۰۲ | ۲۰۱ | ۲۰۱ | ۳۲۲ | ۵۲۷۰۰۰۲ | ۵۲۷۷۷۷ | ۵۲۷۹۹۹ | ۵۲۷۹۹۹ | ۵۲۷۹۹۹ | ۵۲۷۹۹۹ |
| ۹۵۹ | ۸۵۲ | ۷۲۹ | ۵۲۳ | ۲۲۹ | ۲۲۰ | ۲۲۳ | ۱۰۷ | ۱۰۷ | ۳۲۱ | ۵۲۷۳۳۳ | ۵۲۷۲۷۵ | ۵۲۷۳۱۸ | ۵۲۷۲۱۲ | ۵۲۷۱۰۷ | ۵۲۷۰۰۰ |
| ۱۰۱۲ | ۹۰۲ | ۷۷۰ | ۷۷۷ | ۵۹۵ | ۲۵۱ | ۲۲۹ | ۱۱۲ | ۱۱۲ | ۳۲۰ | ۵۲۷۰۰۰ | ۵۲۷۰۰۰ | ۵۲۷۰۰۰ | ۵۲۷۰۰۰ | ۵۲۷۰۰۰ | ۵۲۷۰۰۰ |

۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰ ۱۰ ۲۰ ۳۰ ۴۰ ۵۰ ۶۰

طبیعی سراسر تمام

صنعتی

| ق | ا | ب | ج | د | هـ | و | ز | ح | ط | ي | ك |
|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|
| 101 | 44 | 82 | 42 | 40 | 22 | 23 | 22 | 12 | 24 | 15 | 15 |
| 110 | 44 | 82 | 42 | 40 | 22 | 23 | 22 | 12 | 24 | 15 | 15 |
| 115 | 102 | 89 | 42 | 42 | 25 | 28 | 25 | 12 | 25 | 15 | 15 |
| 122 | 109 | 95 | 82 | 48 | 22 | 21 | 22 | 12 | 22 | 15 | 15 |
| 131 | 112 | 102 | 88 | 42 | 25 | 22 | 22 | 15 | 24 | 15 | 15 |
| 134 | 124 | 110 | 92 | 42 | 22 | 22 | 22 | 12 | 22 | 15 | 15 |
| 137 | 130 | 118 | 101 | 85 | 28 | 21 | 22 | 12 | 22 | 15 | 15 |
| 145 | 134 | 128 | 110 | 92 | 22 | 25 | 22 | 12 | 22 | 15 | 15 |
| 149 | 159 | 134 | 119 | 100 | 20 | 20 | 20 | 10 | 20 | 15 | 15 |
| 195 | 162 | 152 | 130 | 109 | 22 | 22 | 22 | 12 | 22 | 15 | 15 |
| 212 | 190 | 194 | 134 | 119 | 25 | 22 | 22 | 12 | 22 | 15 | 15 |

نہ

| ۲۳۵ | ۲۰۹ | ۱۸۳ | ۱۵۷ | ۱۳۱ | ۱۰۴ | ۷۸ | ۵۲ | ۲۶ | ۱۹ | ۲۳۸۴۷۰ | ۲۳۸۵۰۲ | ۲۳۸۴۳۴ | ۲۳۷۹۸۰ | ۲۳۷۷۴۵ | ۲۳۷۷۰۵ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ۲۳۶ | ۲۳۱ | ۲۰۲ | ۱۷۶ | ۱۴۵ | ۱۱۹ | ۸۷ | ۵۸ | ۲۹ | ۱۸ | ۲۳۰۴۷۵ | ۲۳۰۱۷۸ | ۲۳۰۹۸۸۷ | ۲۳۰۴۷۰۰ | ۲۳۰۴۳۱۹ | ۲۳۰۴۰۲۲ |
| ۲۳۷ | ۲۵۸ | ۲۳۵ | ۱۹۳ | ۱۶۱ | ۱۳۹ | ۹۷ | ۶۴ | ۳۲ | ۱۵ | ۲۳۳۳۷۱ | ۲۳۳۰۴۱ | ۲۳۱۷۱۹ | ۲۳۱۳۹۷ | ۲۳۱۰۸۴ | ۲۳۰۷۷۷۲ |
| ۲۳۸ | ۲۸۹ | ۲۵۳ | ۲۱۹ | ۱۸۱ | ۱۴۴ | ۱۰۸ | ۷۲ | ۳۶ | ۱۹ | ۲۳۴۴۹۵ | ۲۳۴۱۲۴ | ۲۳۳۷۷۵۹ | ۲۳۳۴۰۰۲ | ۲۳۳۰۵۰۲ | ۲۳۲۷۷۰۹ |
| ۲۳۹ | ۳۲۹ | ۲۸۵ | ۲۴۴ | ۲۰۴ | ۱۶۳ | ۱۲۲ | ۸۱ | ۴۱ | ۱۵ | ۲۳۶۸۹۱ | ۲۳۶۴۷۷۰ | ۲۳۶۰۵۰۹ | ۲۳۵۶۷۵۶ | ۲۳۵۲۲۶۱ | ۲۳۴۸۸۷۴ |
| ۲۴۰ | ۳۷۱ | ۳۲۵ | ۲۷۸ | ۲۳۲ | ۱۸۵ | ۱۳۹ | ۹۲ | ۴۶ | ۱۴ | ۲۳۹۹۷۱۷ | ۲۳۹۶۱۳۶ | ۲۳۸۲۷۷۷ | ۲۳۸۸۳۸ | ۲۳۸۷۷۰ | ۲۳۸۴۳۲۱ |
| ۲۴۱ | ۴۱۷ | ۳۷۴ | ۳۲۷ | ۲۸۰ | ۲۴۴ | ۱۹۰ | ۱۰۷ | ۵۳ | ۱۳ | ۲۴۳۷۷۷۷ | ۲۴۳۴۷۷۷ | ۲۴۳۱۷۷۷ | ۲۴۲۷۷۷۷ | ۲۴۲۰۷۷۱ | ۲۴۱۰۷۷۸ |
| ۲۴۲ | ۴۶۷ | ۴۲۵ | ۳۷۷ | ۳۳۱ | ۲۹۸ | ۲۰۶ | ۱۴۲ | ۷۲ | ۱۲ | ۲۴۶۷۷۷۷ | ۲۴۶۷۷۷۷ | ۲۴۶۷۷۷۷ | ۲۴۶۷۷۷۷ | ۲۴۶۷۷۷۷ | ۲۴۶۷۷۷۷ |
| ۲۴۳ | ۵۱۷ | ۴۷۱ | ۴۲۴ | ۳۷۶ | ۳۴۲ | ۲۴۶ | ۱۴۶ | ۷۲ | ۱۱ | ۲۴۹۷۷۷۷ | ۲۴۹۷۷۷۷ | ۲۴۹۷۷۷۷ | ۲۴۹۷۷۷۷ | ۲۴۹۷۷۷۷ | ۲۴۹۷۷۷۷ |
| ۲۴۴ | ۵۶۷ | ۵۲۱ | ۴۷۶ | ۴۲۹ | ۳۹۰ | ۲۹۶ | ۱۴۶ | ۷۲ | ۱۰ | ۲۵۲۷۷۷۷ | ۲۵۲۷۷۷۷ | ۲۵۲۷۷۷۷ | ۲۵۲۷۷۷۷ | ۲۵۲۷۷۷۷ | ۲۵۲۷۷۷۷ |
| ۲۴۵ | ۶۱۷ | ۵۷۱ | ۵۲۶ | ۴۸۸ | ۴۵۰ | ۳۵۴ | ۱۷۵ | ۸۸ | ۱۰ | ۲۵۵۷۷۷۷ | ۲۵۵۷۷۷۷ | ۲۵۵۷۷۷۷ | ۲۵۵۷۷۷۷ | ۲۵۵۷۷۷۷ | ۲۵۵۷۷۷۷ |
| ۹ | ۸ | ۷ | ۶ | ۵ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ | ۰ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ |

طبیعی حساب

طبیعی طاس

| ۰ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| ۰ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۱ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۲ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۳ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۴ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۵ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۶ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۷ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۸ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۹ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |

کے جا سکتے

فرق یہاں اس قدر جلدی پڑتے ہیں کہ درج نہیں

۲۵

صغیر زائیدت کا طاس انعام یا

$$\frac{۳۲۳۴۵۶}{۱۰} = ۳۲۳۴۵.۶$$

| | | | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| ۰ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۱ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۲ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۳ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۴ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۵ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۶ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۷ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۸ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۹ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |

طبیعی طاس انعام

| ۰ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| ۰ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۱ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۲ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۳ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۴ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۵ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۶ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۷ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۸ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |
| ۹ | ۱۰ | ۲۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۵۰ | ۶۰ | ۷۰ | ۸۰ | ۹۰ | ۱۰۰ |

۱۹۶۳

| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

۵۷۵

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| ۲۳۴ | ۲۶۰ | ۲۳۷ | ۲۰۳ | ۱۶۹ | ۱۳۵ | ۱۰۱ | ۶۸ | ۳۴ | ۹۶ | ۹۵۵۱۰۲ | ۹۵۵۴۷۹ | ۹۵۵۴۳۳ | ۹۵۵۴۰۹۳ | ۹۵۵۳۷۵۱ | ۹۵۵۳۴۰۵ | ۹۵۵۳۰۵۰ |
| ۲۳۵ | ۲۵۷ | ۲۳۵ | ۱۹۳ | ۱۶۱ | ۱۲۸ | ۹۶ | ۶۴ | ۳۲ | ۹۸ | ۵۵۷۰۴۴ | ۵۵۶۷۲۷ | ۵۵۶۴۰۰۸ | ۵۵۶۰۸۰۵ | ۵۵۵۷۰۶۱ | ۵۵۵۳۳۳۳ | ۵۵۴۹۶۰۱ |
| ۲۳۶ | ۲۴۴ | ۲۱۴ | ۱۸۳ | ۱۵۳ | ۱۲۲ | ۹۲ | ۶۱ | ۳۱ | ۹۷ | ۵۵۸۸۸۹ | ۵۵۸۵۵۸۸ | ۵۵۸۲۸۸۴ | ۵۵۷۹۷۷۸ | ۵۵۷۶۶۶۹ | ۵۵۷۳۵۵۰ | ۵۵۷۰۴۴۰ |
| ۲۳۷ | ۲۳۳ | ۲۰۴ | ۱۷۴ | ۱۴۶ | ۱۱۶ | ۸۷ | ۵۸ | ۲۹ | ۹۹ | ۵۶۰۶۴۶ | ۵۶۰۶۵۵۹ | ۵۶۰۰۰۰۰ | ۵۵۹۷۷۷۸ | ۵۵۹۴۴۴۸ | ۵۵۹۱۱۱۱ | ۵۵۸۷۷۷۷ |
| ۲۳۸ | ۲۲۲ | ۱۹۵ | ۱۶۶ | ۱۳۹ | ۱۱۱ | ۸۳ | ۵۶ | ۲۸ | ۹۵ | ۵۶۲۳۲۳ | ۵۶۲۰۴۴۹ | ۵۶۱۷۷۷۲ | ۵۶۱۴۴۴۴ | ۵۶۱۱۱۱۲ | ۵۶۰۷۷۷۱ | ۵۶۰۴۴۴۰ |
| ۲۳۹ | ۲۱۲ | ۱۸۶ | ۱۵۹ | ۱۳۲ | ۱۰۶ | ۸۰ | ۵۲ | ۲۷ | ۹۴ | ۹۶۳۴۹۴۴ | ۹۶۳۳۳۳۳ | ۹۶۳۰۰۰۹ | ۹۶۲۶۶۶۸ | ۹۶۲۳۳۳۵ | ۹۶۲۰۰۰۵ | ۹۶۱۶۶۶۵ |
| ۲۴۰ | ۲۰۳ | ۱۷۸ | ۱۵۴ | ۱۲۷ | ۱۰۲ | ۷۶ | ۵۱ | ۲۵ | ۹۳ | ۹۶۵۴۵۶ | ۹۶۵۲۰۰۵ | ۹۶۴۹۵۳۳ | ۹۶۴۶۶۶۸ | ۹۶۴۳۳۳۲ | ۹۶۴۰۰۰۸ | ۹۶۳۶۶۶۵ |
| ۲۴۱ | ۱۹۴ | ۱۷۰ | ۱۴۶ | ۱۲۲ | ۹۷ | ۷۳ | ۴۹ | ۲۴ | ۹۲ | ۹۶۷۹۶۲ | ۹۶۷۹۸۰۲ | ۹۶۷۶۶۶۱ | ۹۶۷۳۳۳۷ | ۹۶۷۰۰۰۵ | ۹۶۶۶۶۶۰ | ۹۶۶۳۳۳۰ |
| ۲۴۲ | ۱۸۶ | ۱۶۳ | ۱۴۰ | ۱۱۷ | ۹۳ | ۷۰ | ۴۷ | ۲۳ | ۹۱ | ۹۶۸۳۲۸ | ۹۶۸۰۹۸ | ۹۶۷۷۷۶۶ | ۹۶۷۴۴۴۲ | ۹۶۷۱۱۱۰ | ۹۶۶۷۷۷۰ | ۹۶۶۴۴۴۰ |
| ۲۴۳ | ۱۷۷ | ۱۵۶ | ۱۳۴ | ۱۱۲ | ۸۹ | ۶۷ | ۴۵ | ۲۲ | ۹۰ | ۹۶۹۶۷۷ | ۹۶۹۴۵۶ | ۹۶۹۲۳۳۴ | ۹۶۸۹۰۰۰ | ۹۶۸۵۷۷۴ | ۹۶۸۲۴۴۰ | ۹۶۷۹۱۱۰ |
| ۲۴۴ | ۱۶۸ | ۱۴۷ | ۱۲۵ | ۱۰۴ | ۸۰ | ۶۰ | ۴۰ | ۲۰ | ۸۰ | ۹۷۰۹۹۹ | ۹۷۰۷۷۷ | ۹۷۰۵۵۵ | ۹۷۰۳۳۳ | ۹۷۰۱۱۱ | ۹۷۰۰۰۰ | ۹۷۰۰۰۰ |

لوگاریتمی جدول

لوکارتی جیوب

| ۹ | ۸ | ۷ | ۶ | ۵ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ | ۰ | ۹ | ۸ | ۷ | ۶ | ۵ | ۴ | ۳ | ۲ | ۱ | ۰ |
|--------|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ۱۹۳۱۴۲ | ۱۵۰ | ۱۲۹ | ۱۰۰ | ۸۶ | ۶۵ | ۴۳ | ۲۲ | ۰۹ | ۰۹ | ۰۹ | ۰۹ | ۰۹ | ۰۹ | ۰۹ | ۰۹ | ۰۹ | ۰۹ | ۰۹ | ۰۹ |
| ۱۸۵۱۶۵ | ۱۴۲ | ۱۲۲ | ۱۰۳ | ۸۲ | ۶۲ | ۴۱ | ۲۱ | ۰۸ | ۰۸ | ۰۸ | ۰۸ | ۰۸ | ۰۸ | ۰۸ | ۰۸ | ۰۸ | ۰۸ | ۰۸ | ۰۸ |
| ۱۷۸۱۵۹ | ۱۳۹ | ۱۱۹ | ۹۹ | ۷۹ | ۵۹ | ۳۰ | ۱۰ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ |
| ۱۷۲۱۵۳ | ۱۳۲ | ۱۱۵ | ۹۶ | ۷۶ | ۵۷ | ۳۸ | ۱۹ | ۰۶ | ۰۶ | ۰۶ | ۰۶ | ۰۶ | ۰۶ | ۰۶ | ۰۶ | ۰۶ | ۰۶ | ۰۶ | ۰۶ |
| ۱۶۵۱۴۷ | ۱۲۹ | ۱۱۰ | ۹۲ | ۷۲ | ۵۵ | ۳۷ | ۱۸ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ | ۰۵ |
| ۱۵۹۱۴۲ | ۱۲۲ | ۱۰۶ | ۸۹ | ۷۱ | ۵۳ | ۳۵ | ۱۸ | ۰۴ | ۰۴ | ۰۴ | ۰۴ | ۰۴ | ۰۴ | ۰۴ | ۰۴ | ۰۴ | ۰۴ | ۰۴ | ۰۴ |
| ۱۵۴۱۳۷ | ۱۲۰ | ۱۰۴ | ۸۶ | ۶۸ | ۵۱ | ۳۴ | ۱۷ | ۰۳ | ۰۳ | ۰۳ | ۰۳ | ۰۳ | ۰۳ | ۰۳ | ۰۳ | ۰۳ | ۰۳ | ۰۳ | ۰۳ |
| ۱۴۹۱۳۲ | ۱۱۶ | ۹۹ | ۸۳ | ۶۶ | ۵۰ | ۳۳ | ۱۷ | ۰۲ | ۰۲ | ۰۲ | ۰۲ | ۰۲ | ۰۲ | ۰۲ | ۰۲ | ۰۲ | ۰۲ | ۰۲ | ۰۲ |
| ۱۴۲۱۲۷ | ۱۱۲ | ۹۵ | ۸۰ | ۶۴ | ۴۸ | ۳۲ | ۱۶ | ۰۱ | ۰۱ | ۰۱ | ۰۱ | ۰۱ | ۰۱ | ۰۱ | ۰۱ | ۰۱ | ۰۱ | ۰۱ | ۰۱ |
| ۱۳۸۱۲۳ | ۱۰۸ | ۹۲ | ۷۷ | ۶۲ | ۴۶ | ۳۱ | ۱۵ | ۰۰ | ۰۰ | ۰۰ | ۰۰ | ۰۰ | ۰۰ | ۰۰ | ۰۰ | ۰۰ | ۰۰ | ۰۰ | ۰۰ |

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| ۱۳۳ | ۱۱۸ | ۱۰۲ | ۸۹ | ۷۴ | ۵۹ | ۴۴ | ۳۰ | ۱۵ | ۰۹ | ۹۸۱۵۴۹ | ۹۸۱۴۰۲ | ۹۸۱۳۵۲ | ۹۸۱۱۰۹ | ۹۸۰۹۵۷ | ۹۸۰۸۰۷ |
| ۱۳۹ | ۱۱۴ | ۱۰۰ | ۸۶ | ۷۲ | ۵۷ | ۴۳ | ۲۹ | ۱۴ | ۰۸ | ۹۸۲۱۰ | ۹۸۲۰۶ | ۹۸۱۲۶ | ۹۸۱۱۰۳ | ۹۸۰۹۵۰ | ۹۸۰۸۰۰ |
| ۱۴۴ | ۱۱۰ | ۹۷ | ۸۳ | ۶۹ | ۵۵ | ۴۱ | ۲۸ | ۱۴ | ۰۷ | ۹۸۳۴۴ | ۹۸۳۰۶ | ۹۸۲۹۶ | ۹۸۲۸۰ | ۹۸۲۶۴ | ۹۸۲۵۰ |
| ۱۴۰ | ۱۰۶ | ۹۳ | ۸۰ | ۶۷ | ۵۳ | ۴۰ | ۲۷ | ۱۳ | ۰۶ | ۹۸۴۴۶ | ۹۸۴۰۸ | ۹۸۳۹۸ | ۹۸۳۸۲ | ۹۸۳۶۶ | ۹۸۳۵۰ |
| ۱۱۵ | ۱۰۲ | ۹۰ | ۷۷ | ۶۴ | ۵۱ | ۳۸ | ۲۶ | ۱۳ | ۰۵ | ۹۸۶۸۲ | ۹۸۶۴۴ | ۹۸۶۳۴ | ۹۸۶۱۸ | ۹۸۶۰۲ | ۹۸۵۸۶ |
| ۱۱۲ | ۹۹ | ۸۷ | ۷۴ | ۶۲ | ۵۰ | ۳۷ | ۲۵ | ۱۲ | ۰۴ | ۹۸۸۵۷ | ۹۸۸۱۹ | ۹۸۸۰۹ | ۹۸۷۹۳ | ۹۸۷۷۷ | ۹۸۷۶۱ |
| ۱۰۸ | ۹۶ | ۸۴ | ۷۲ | ۶۰ | ۴۸ | ۳۶ | ۲۴ | ۱۲ | ۰۳ | ۹۸۹۹۵ | ۹۸۹۵۷ | ۹۸۹۴۷ | ۹۸۹۳۱ | ۹۸۹۱۵ | ۹۸۹۰۰ |
| ۱۰۴ | ۹۳ | ۸۱ | ۷۰ | ۵۸ | ۴۶ | ۳۵ | ۲۳ | ۱۲ | ۰۲ | ۹۹۱۳۳ | ۹۹۰۹۵ | ۹۹۰۸۵ | ۹۹۰۶۹ | ۹۹۰۵۳ | ۹۹۰۳۷ |
| ۱۰۰ | ۸۹ | ۷۸ | ۶۷ | ۵۶ | ۴۵ | ۳۴ | ۲۲ | ۱۱ | ۰۱ | ۹۹۲۷۱ | ۹۹۲۳۳ | ۹۹۲۲۳ | ۹۹۲۰۷ | ۹۹۱۹۱ | ۹۹۱۷۵ |
| ۹۷ | ۸۶ | ۷۵ | ۶۵ | ۵۴ | ۴۳ | ۳۲ | ۲۱ | ۱۱ | ۰۰ | ۹۹۴۱۹ | ۹۹۳۸۱ | ۹۹۳۷۱ | ۹۹۳۵۵ | ۹۹۳۳۹ | ۹۹۳۲۳ |
| ۹۴ | ۸۳ | ۷۲ | ۶۲ | ۵۲ | ۴۱ | ۳۱ | ۲۰ | ۱۰ | ۰۰ | ۹۹۵۵۷ | ۹۹۵۱۹ | ۹۹۵۰۹ | ۹۹۴۹۳ | ۹۹۴۷۷ | ۹۹۴۶۱ |
| ۹۱ | ۸۰ | ۷۰ | ۶۰ | ۵۰ | ۴۰ | ۳۰ | ۲۰ | ۱۰ | ۰۰ | ۹۹۷۰۰ | ۹۹۶۶۲ | ۹۹۶۵۲ | ۹۹۶۳۶ | ۹۹۶۲۰ | ۹۹۶۰۴ |

درستی نتیجه ایستادم

١٩ ٢٠ ٢١ ٢٢ ٢٣ ٢٤ ٢٥ ٢٦ ٢٧ ٢٨ ٢٩ ٣٠ ٣١ ٣٢ ٣٣ ٣٤ ٣٥ ٣٦ ٣٧ ٣٨ ٣٩ ٤٠ ٤١ ٤٢ ٤٣ ٤٤ ٤٥ ٤٦ ٤٧ ٤٨ ٤٩ ٥٠ ٥١ ٥٢ ٥٣ ٥٤ ٥٥ ٥٦ ٥٧ ٥٨ ٥٩ ٦٠ ٦١ ٦٢ ٦٣ ٦٤ ٦٥ ٦٦ ٦٧ ٦٨ ٦٩ ٧٠ ٧١ ٧٢ ٧٣ ٧٤ ٧٥ ٧٦ ٧٧ ٧٨ ٧٩ ٨٠ ٨١ ٨٢ ٨٣ ٨٤ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٨٨ ٨٩ ٩٠ ٩١ ٩٢ ٩٣ ٩٤ ٩٥ ٩٦ ٩٧ ٩٨ ٩٩ ١٠٠

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|------|
| 96 | AP | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 | 129 | 130 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 138 | 139 | 140 | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 150 | 151 | 152 | 153 | 154 | 155 | 156 | 157 | 158 | 159 | 160 | 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 170 | 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 | 181 | 182 | 183 | 184 | 185 | 186 | 187 | 188 | 189 | 190 | 191 | 192 | 193 | 194 | 195 | 196 | 197 | 198 | 199 | 200 | 201 | 202 | 203 | 204 | 205 | 206 | 207 | 208 | 209 | 210 | 211 | 212 | 213 | 214 | 215 | 216 | 217 | 218 | 219 | 220 | 221 | 222 | 223 | 224 | 225 | 226 | 227 | 228 | 229 | 230 | 231 | 232 | 233 | 234 | 235 | 236 | 237 | 238 | 239 | 240 | 241 | 242 | 243 | 244 | 245 | 246 | 247 | 248 | 249 | 250 | 251 | 252 | 253 | 254 | 255 | 256 | 257 | 258 | 259 | 260 | 261 | 262 | 263 | 264 | 265 | 266 | 267 | 268 | 269 | 270 | 271 | 272 | 273 | 274 | 275 | 276 | 277 | 278 | 279 | 280 | 281 | 282 | 283 | 284 | 285 | 286 | 287 | 288 | 289 | 290 | 291 | 292 | 293 | 294 | 295 | 296 | 297 | 298 | 299 | 300 | 301 | 302 | 303 | 304 | 305 | 306 | 307 | 308 | 309 | 310 | 311 | 312 | 313 | 314 | 315 | 316 | 317 | 318 | 319 | 320 | 321 | 322 | 323 | 324 | 325 | 326 | 327 | 328 | 329 | 330 | 331 | 332 | 333 | 334 | 335 | 336 | 337 | 338 | 339 | 340 | 341 | 342 | 343 | 344 | 345 | 346 | 347 | 348 | 349 | 350 | 351 | 352 | 353 | 354 | 355 | 356 | 357 | 358 | 359 | 360 | 361 | 362 | 363 | 364 | 365 | 366 | 367 | 368 | 369 | 370 | 371 | 372 | 373 | 374 | 375 | 376 | 377 | 378 | 379 | 380 | 381 | 382 | 383 | 384 | 385 | 386 | 387 | 388 | 389 | 390 | 391 | 392 | 393 | 394 | 395 | 396 | 397 | 398 | 399 | 400 | 401 | 402 | 403 | 404 | 405 | 406 | 407 | 408 | 409 | 410 | 411 | 412 | 413 | 414 | 415 | 416 | 417 | 418 | 419 | 420 | 421 | 422 | 423 | 424 | 425 | 426 | 427 | 428 | 429 | 430 | 431 | 432 | 433 | 434 | 435 | 436 | 437 | 438 | 439 | 440 | 441 | 442 | 443 | 444 | 445 | 446 | 447 | 448 | 449 | 450 | 451 | 452 | 453 | 454 | 455 | 456 | 457 | 458 | 459 | 460 | 461 | 462 | 463 | 464 | 465 | 466 | 467 | 468 | 469 | 470 | 471 | 472 | 473 | 474 | 475 | 476 | 477 | 478 | 479 | 480 | 481 | 482 | 483 | 484 | 485 | 486 | 487 | 488 | 489 | 490 | 491 | 492 | 493 | 494 | 495 | 496 | 497 | 498 | 499 | 500 | 501 | 502 | 503 | 504 | 505 | 506 | 507 | 508 | 509 | 510 | 511 | 512 | 513 | 514 | 515 | 516 | 517 | 518 | 519 | 520 | 521 | 522 | 523 | 524 | 525 | 526 | 527 | 528 | 529 | 530 | 531 | 532 | 533 | 534 | 535 | 536 | 537 | 538 | 539 | 540 | 541 | 542 | 543 | 544 | 545 | 546 | 547 | 548 | 549 | 550 | 551 | 552 | 553 | 554 | 555 | 556 | 557 | 558 | 559 | 560 | 561 | 562 | 563 | 564 | 565 | 566 | 567 | 568 | 569 | 570 | 571 | 572 | 573 | 574 | 575 | 576 | 577 | 578 | 579 | 580 | 581 | 582 | 583 | 584 | 585 | 586 | 587 | 588 | 589 | 590 | 591 | 592 | 593 | 594 | 595 | 596 | 597 | 598 | 599 | 600 | 601 | 602 | 603 | 604 | 605 | 606 | 607 | 608 | 609 | 610 | 611 | 612 | 613 | 614 | 615 | 616 | 617 | 618 | 619 | 620 | 621 | 622 | 623 | 624 | 625 | 626 | 627 | 628 | 629 | 630 | 631 | 632 | 633 | 634 | 635 | 636 | 637 | 638 | 639 | 640 | 641 | 642 | 643 | 644 | 645 | 646 | 647 | 648 | 649 | 650 | 651 | 652 | 653 | 654 | 655 | 656 | 657 | 658 | 659 | 660 | 661 | 662 | 663 | 664 | 665 | 666 | 667 | 668 | 669 | 670 | 671 | 672 | 673 | 674 | 675 | 676 | 677 | 678 | 679 | 680 | 681 | 682 | 683 | 684 | 685 | 686 | 687 | 688 | 689 | 690 | 691 | 692 | 693 | 694 | 695 | 696 | 697 | 698 | 699 | 700 | 701 | 702 | 703 | 704 | 705 | 706 | 707 | 708 | 709 | 710 | 711 | 712 | 713 | 714 | 715 | 716 | 717 | 718 | 719 | 720 | 721 | 722 | 723 | 724 | 725 | 726 | 727 | 728 | 729 | 730 | 731 | 732 | 733 | 734 | 735 | 736 | 737 | 738 | 739 | 740 | 741 | 742 | 743 | 744 | 745 | 746 | 747 | 748 | 749 | 750 | 751 | 752 | 753 | 754 | 755 | 756 | 757 | 758 | 759 | 760 | 761 | 762 | 763 | 764 | 765 | 766 | 767 | 768 | 769 | 770 | 771 | 772 | 773 | 774 | 775 | 776 | 777 | 778 | 779 | 780 | 781 | 782 | 783 | 784 | 785 | 786 | 787 | 788 | 789 | 790 | 791 | 792 | 793 | 794 | 795 | 796 | 797 | 798 | 799 | 800 | 801 | 802 | 803 | 804 | 805 | 806 | 807 | 808 | 809 | 810 | 811 | 812 | 813 | 814 | 815 | 816 | 817 | 818 | 819 | 820 | 821 | 822 | 823 | 824 | 825 | 826 | 827 | 828 | 829 | 830 | 831 | 832 | 833 | 834 | 835 | 836 | 837 | 838 | 839 | 840 | 841 | 842 | 843 | 844 | 845 | 846 | 847 | 848 | 849 | 850 | 851 | 852 | 853 | 854 | 855 | 856 | 857 | 858 | 859 | 860 | 861 | 862 | 863 | 864 | 865 | 866 | 867 | 868 | 869 | 870 | 871 | 872 | 873 | 874 | 875 | 876 | 877 | 878 | 879 | 880 | 881 | 882 | 883 | 884 | 885 | 886 | 887 | 888 | 889 | 890 | 891 | 892 | 893 | 894 | 895 | 896 | 897 | 898 | 899 | 900 | 901 | 902 | 903 | 904 | 905 | 906 | 907 | 908 | 909 | 910 | 911 | 912 | 913 | 914 | 915 | 916 | 917 | 918 | 919 | 920 | 921 | 922 | 923 | 924 | 925 | 926 | 927 | 928 | 929 | 930 | 931 | 932 | 933 | 934 | 935 | 936 | 937 | 938 | 939 | 940 | 941 | 942 | 943 | 944 | 945 | 946 | 947 | 948 | 949 | 950 | 951 | 952 | 953 | 954 | 955 | 956 | 957 | 958 | 959 | 960 | 961 | 962 | 963 | 964 | 965 | 966 | 967 | 968 | 969 | 970 | 971 | 972 | 973 | 974 | 975 | 976 | 977 | 978 | 979 | 980 | 981 | 982 | 983 | 984 | 985 | 986 | 987 | 988 | 989 | 990 | 991 | 992 | 993 | 994 | 995 | 996 | 997 | 998 | 999 | 1000 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|------|

[illegible]

لوکارچی بہار نام

وہابیہ

| q | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | |

10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30

21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855

فرق میان دستور جلدی بدلتے ہیں کہ انکا معنی کرنا
نامکن ہے قبل از ادوئے تکینہ لوک مسنات ایک کرم درجۃ

$\frac{7}{\sqrt{\pi}} = \log_{\pi} e^{\frac{1}{e}}$

۶۲۵ ۵۶۴ ۴۹۴ ۴۲۰ ۳۵۴ ۲۸۷ ۲۱۲ ۱۴۱ ۷۱ ۲۹ ۹۳۲۸۱۸۷ ۹۳۲۴۴۹۷ ۹۳۲۷۴۹۷ ۹۳۲۷۰۸۷ ۹۳۲۵۳۷۵ ۹۳۲۴۷۳۷
 ۵۸۲ ۵۱۸ ۴۵۴ ۳۸۸ ۳۲۲ ۲۵۹ ۱۹۴ ۱۲۹ ۶۵ ۲۹ ۳۳۲۱۲۲ ۳۳۲۴۸۹ ۳۳۰۸۴۷ ۳۳۰۱۹۵ ۳۲۹۵۲۵ ۳۲۸۸۷۵ ۱۱
 ۵۲۸ ۴۷۸ ۴۱۹ ۳۵۹ ۲۹۹ ۲۳۹ ۱۷۹ ۱۲۰ ۶۰ ۲۷ ۳۲۵۷۵۷ ۳۲۵۷۷۰ ۳۲۵۷۷۷ ۳۲۳۹۷۴ ۳۳۳۳۷۵ ۳۳۳۷۷۵ ۱۲
 ۵۰۰ ۴۴۵ ۳۸۹ ۳۲۴ ۲۷۸ ۲۲۲ ۱۶۷ ۱۱۱ ۵۷ ۲۷ ۳۳۹۱۳۷ ۳۳۸۵۸۹ ۳۳۸۰۲۵ ۳۳۷۴۷۷ ۳۳۷۳۷۰۹ ۳۳۷۳۳۷۷ ۱۳
 ۴۹۹ ۴۱۷ ۳۶۵ ۳۱۳ ۲۶۱ ۲۰۸ ۱۵۷ ۱۰۴ ۵۲ ۲۵ ۳۴۲۲۹۷ ۳۴۱۷۸۴ ۳۴۱۳۷۷ ۳۴۰۷۴۲ ۳۴۰۲۰۱۲ ۳۳۹۷۷۷ ۱۴

۲۵

۴۴۲ ۳۹۲ ۳۴۲ ۲۹۲ ۲۴۵ ۱۹۷ ۱۴۷ ۹۷ ۴۹ ۲۹ ۹۳۴۵۲۷۷ ۹۳۴۴۷۷ ۹۳۴۴۲۹۹ ۹۳۴۳۸۰۷ ۹۳۴۳۳۰۸ ۹۳۴۲۸۰۹ ۱۵
 ۴۱۸ ۳۷۱ ۳۲۵ ۲۷۸ ۲۳۲ ۱۸۷ ۱۳۷ ۹۳ ۴۷ ۲۷ ۳۴۸۰۸۰ ۳۴۷۴۲۲ ۳۴۷۷۹۰ ۳۴۷۳۹۴ ۳۴۷۲۲۲ ۳۴۷۰۷۰۱۷ ۱۶
 ۳۹۷ ۳۵۲ ۳۰۸ ۲۶۲ ۲۲۰ ۱۷۷ ۱۲۲ ۸۸ ۴۴ ۲۴ ۳۵۰۷۴۷ ۳۵۰۳۱۱ ۳۴۹۸۷۲ ۳۴۹۴۴۳۰ ۳۴۸۹۳۸۴ ۳۴۸۵۱۴۷ ۱۷
 ۳۷۸ ۳۲۷ ۲۹۴ ۲۵۲ ۲۱۰ ۱۶۸ ۱۲۷ ۸۷ ۴۲ ۲۱ ۳۵۲۲۸۵ ۳۵۲۲۸۷۰ ۳۵۲۲۵۲ ۳۵۲۰۳۱ ۳۵۱۷۰۷ ۳۵۱۷۰۱۸ ۱۸
 ۳۶۲ ۳۲۱ ۲۸۱ ۲۴۱ ۲۰۱ ۱۶۰ ۱۲۱ ۸۰ ۴۰ ۱۰ ۳۵۵۷۱۲ ۳۵۵۳۱۵ ۳۵۴۹۱۵ ۳۵۴۵۱۲ ۳۵۴۱۰۷ ۳۵۳۷۹۰۹ ۱۹

۹ ۸ ۷ ۶ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰ ۱۰ ۲۰ ۳۰ ۴۰ ۵۰ ۶۰

دکارتی فضا

DAY

| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ | ۱۹ | ۲۰ | ۲۱ | ۲۲ | ۲۳ | ۲۴ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ | ۳۰ | ۳۱ | ۳۲ | ۳۳ | ۳۴ | ۳۵ | ۳۶ | ۳۷ | ۳۸ | ۳۹ | ۴۰ | ۴۱ | ۴۲ | ۴۳ | ۴۴ | ۴۵ | ۴۶ | ۴۷ | ۴۸ | ۴۹ | ۵۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ | ۱۹ | ۲۰ | ۲۱ | ۲۲ | ۲۳ | ۲۴ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ | ۳۰ | ۳۱ | ۳۲ | ۳۳ | ۳۴ | ۳۵ | ۳۶ | ۳۷ | ۳۸ | ۳۹ | ۴۰ | ۴۱ | ۴۲ | ۴۳ | ۴۴ | ۴۵ | ۴۶ | ۴۷ | ۴۸ | ۴۹ | ۵۰ |

٧٢٥ ٥٢٢ ٢٩٢ ٢٢٠ ٢٥٢ ٢٢٢ ٢١٢ ١٢١ ٤١ ٤٢ ٩٣١١٨٩ ٩٣٤٢٩٩ ٩٣٧٤٩٤ ٩٣٢٧٠٨٩ ٩٣٧٥٢٣٧٥ ٩٣٢٣٧٣١٧
 ٥٢٢ ٥١٨ ٢٥٢ ٢٢٨ ٢٢٢ ٢٥٩ ١٩٢ ١٢٩ ٧٥ ٤٢ ٥٢٢٢٢ ٥٢٢٢٢٢ ٥٢٠٨٢٢ ٥٢٠١٩٥ ٥٢٩٥٢٥ ٥٢٨٨٧٥ ١١
 ٥٢٢ ٢٤٨ ٢١٩ ٢٥٩ ١٩٩ ٢٢٩ ١٤٩ ١٢٠ ٧٠ ٤٤ ٥٢٥٤٥ ٥٢٥١٤٠ ٥٢٢٥٤٢ ٥٢٢٩٤٢ ٥٢٢٢٣٧٥ ٥٢٢٤٢٤ ١٢
 ٥٠٠ ٥٢٥ ٢٢٩ ٢٢٢ ٢٤٨ ٢٢٢ ١٢٤ ١١١ ٥٢ ٤٢ ٥٢٢٢٢٢ ٥٢٢٥٥٩ ٥٢٢٠٢٥ ٥٢٤٢٤٢ ٥٢٢٣٠٩ ٥٢٢٢٢٢٢ ١٢
 ٥٢٩ ٢١٤ ٢٢٥ ٢١٢ ٢٢١ ٢٠٨ ١٥٢ ١٠٢ ٥٢ ٤٥ ٥٢٢٢٢٩٤ ٥٢١٤٨٢ ٥٢١٢٢٢٢ ٥٢٠٤٢٢ ٥٢٠٢٠١٧ ٥٢٢٢٢٢٢ ١٢

٢٥

٢٢٢ ٢٩٢ ٢٢٢ ٢٩٢ ٢٢٥ ١٩٢ ١٢٤ ٩٢ ٢٩ ٤٢ ٩٣٥٢٢٤١ ٩٣٢٢٤٨٤ ٩٣٢٢٢٩٩ ٩٣٢٢٨٠٢ ٩٣٢٢٢٠٨ ٩٣٢٢٨٠٥ ١٥
 ٢١٨ ٢٤١ ٢٢٥ ٢٤٨ ٢٢٢ ١٨٢ ١٢٩ ٩٢ ٥٢ ٤٢ ٥٢٨٠٨٠ ٥٢٤٢٢٢ ٥٢٤١٢٠ ٥٢٢٢٩٢ ٥٢٢٢٢٢ ٥٢٥٤٥٠ ١٢
 ٢٩٢ ٢٥٢ ٢٠٨ ٢٢٢ ٢٢٠ ١٤٢ ١٢٢ ٨٨ ٢٢ ٤٢ ٥٥٠٤٢٢ ٥٥٠٢١١ ٥٢٢٩٨٤٢ ٥٢٢٩٢٢٠ ٥٢٢٩٨٢ ٥٢٢٥٢٢ ١٤
 ٢٤٨ ٢٢٢ ٢٩٢ ٢٥٢ ٢١٠ ١٢٨ ١٢٢ ٨٥ ٢٢ ٤١ ٥٥٢٢٨٥ ٥٥٢٢٨٤ ٥٥٢٢٥٢ ٥٥٢٢٠٢١ ٥٥١٢٠٢ ٥٥١١٤٠ ١٨
 ٢٢٢ ٢٢١ ٢٢١ ٢٢١ ٢٠١ ١٢٠ ١٢١ ٨٠ ٢٠ ٤٠ ٥٥٥٤١٢ ٥٥٥٢١٥ ٥٥٢٢٩١٥ ٥٥٢٥١٢ ٥٥٢١٠٢ ٥٥٢٢٢٢ ١٩

٩ ٨ ٤ ٢ ٥ ٢ ٢ ٢ ١ ١ ١٠ ٢٠ ٢٠ ٢٠ ٥٠ ٢٠

دہائی کا تمام

[illegible]

لوکار تہی س

| ق | ا | ب | پ | ت | ث | ج | ح | خ | د | ذ | ر | ز | س | ش | ص | ط | ظ | ع | غ | ف | ق | ک | گ | ن | ی | پ | ت | ث | ج | ح | خ | د | ذ | ر | ز | س | ش | ص | ط | ظ | ع | غ | ف | ق | ک | گ | ن | ی | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------|-----|
| ۲۲۰ | ۲۰۵ | ۱۷۹ | ۱۵۴ | ۱۲۸ | ۱۰۲ | ۷۷ | ۵۱ | ۲۵ | ۱۲۹ | ۱۹۳ | ۲۵۷ | ۳۲۱ | ۳۸۵ | ۴۴۹ | ۵۱۳ | ۵۷۷ | ۶۴۱ | ۷۰۵ | ۷۶۹ | ۸۳۳ | ۸۹۷ | ۹۶۱ | ۱۰۲۵ | ۱۰۸۹ | ۱۱۵۳ | ۱۲۱۷ | ۱۲۸۱ | ۱۳۴۵ | ۱۴۰۹ | ۱۴۷۳ | ۱۵۳۷ | ۱۶۰۱ | ۱۶۶۵ | ۱۷۲۹ | ۱۷۹۳ | ۱۸۵۷ | ۱۹۲۱ | ۱۹۸۵ | ۲۰۴۹ | ۲۱۱۳ | ۲۱۷۷ | ۲۲۴۱ | ۲۳۰۵ | ۲۳۶۹ | ۲۴۳۳ | ۲۴۹۷ | ۲۵۶۱ | ۲۶۲۵ | ۲۶۸۹ | ۲۷۵۳ | ۲۸۱۷ | ۲۸۸۱ | ۲۹۴۵ | ۳۰۰۹ | ۳۰۷۳ | ۳۱۳۷ | ۳۲۰۱ | ۳۲۶۵ | ۳۳۲۹ | ۳۳۹۳ | ۳۴۵۷ | ۳۵۲۱ | ۳۵۸۵ | ۳۶۴۹ | ۳۷۱۳ | ۳۷۷۷ | ۳۸۴۱ | ۳۹۰۵ | ۳۹۶۹ | ۴۰۳۳ | ۴۰۹۷ | ۴۱۶۱ | ۴۲۲۵ | ۴۲۸۹ | ۴۳۵۳ | ۴۴۱۷ | ۴۴۸۱ | ۴۵۴۵ | ۴۶۰۹ | ۴۶۷۳ | ۴۷۳۷ | ۴۸۰۱ | ۴۸۶۵ | ۴۹۲۹ | ۴۹۹۳ | ۵۰۵۷ | ۵۱۲۱ | ۵۱۸۵ | ۵۲۴۹ | ۵۳۱۳ | ۵۳۷۷ | ۵۴۴۱ | ۵۵۰۵ | ۵۵۶۹ | ۵۶۳۳ | ۵۶۹۷ | ۵۷۶۱ | ۵۸۲۵ | ۵۸۸۹ | ۵۹۵۳ | ۶۰۱۷ | ۶۰۸۱ | ۶۱۴۵ | ۶۲۰۹ | ۶۲۷۳ | ۶۳۳۷ | ۶۴۰۱ | ۶۴۶۵ | ۶۵۲۹ | ۶۵۹۳ | ۶۶۵۷ | ۶۷۲۱ | ۶۷۸۵ | ۶۸۴۹ | ۶۹۱۳ | ۶۹۷۷ | ۷۰۴۱ | ۷۱۰۵ | ۷۱۶۹ | ۷۲۳۳ | ۷۲۹۷ | ۷۳۶۱ | ۷۴۲۵ | ۷۴۸۹ | ۷۵۵۳ | ۷۶۱۷ | ۷۶۸۱ | ۷۷۴۵ | ۷۸۰۹ | ۷۸۷۳ | ۷۹۳۷ | ۸۰۰۱ | ۸۰۶۵ | ۸۱۲۹ | ۸۱۹۳ | ۸۲۵۷ | ۸۳۲۱ | ۸۳۸۵ | ۸۴۴۹ | ۸۵۱۳ | ۸۵۷۷ | ۸۶۴۱ | ۸۷۰۵ | ۸۷۶۹ | ۸۸۳۳ | ۸۸۹۷ | ۸۹۶۱ | ۹۰۲۵ | ۹۰۸۹ | ۹۱۵۳ | ۹۲۱۷ | ۹۲۸۱ | ۹۳۴۵ | ۹۴۰۹ | ۹۴۷۳ | ۹۵۳۷ | ۹۶۰۱ | ۹۶۶۵ | ۹۷۲۹ | ۹۷۹۳ | ۹۸۵۷ | ۹۹۲۱ | ۹۹۸۵ | ۱۰۰۴۹ | ۱۰۱۱۳ | ۱۰۱۷۷ | ۱۰۲۴۱ | ۱۰۳۰۵ | ۱۰۳۷۰ | ۱۰۴۳۴ | ۱۰۴۹۸ | ۱۰۵۶۲ | ۱۰۶۲۶ | ۱۰۶۹۰ | ۱۰۷۵۴ | ۱۰۸۱۸ | ۱۰۸۸۲ | ۱۰۹۴۶ | ۱۱۰۱۰ | ۱۱۰۷۴ | ۱۱۱۳۸ | ۱۱۲۰۲ | ۱۱۲۶۶ | ۱۱۳۳۰ | ۱۱۳۹۴ | ۱۱۴۵۸ | ۱۱۵۲۲ | ۱۱۵۸۶ | ۱۱۶۵۰ | ۱۱۷۱۴ | ۱۱۷۷۸ | ۱۱۸۴۲ | ۱۱۹۰۶ | ۱۱۹۷۰ | ۱۲۰۳۴ | ۱۲۰۹۸ | ۱۲۱۶۲ | ۱۲۲۲۶ | ۱۲۲۹۰ | ۱۲۳۵۴ | ۱۲۴۱۸ | ۱۲۴۸۲ | ۱۲۵۴۶ | ۱۲۶۱۰ | ۱۲۶۷۴ | ۱۲۷۳۸ | ۱۲۸۰۲ | ۱۲۸۶۶ | ۱۲۹۳۰ | ۱۲۹۹۴ | ۱۳۰۵۸ | ۱۳۱۲۲ | ۱۳۱۸۶ | ۱۳۲۵۰ | ۱۳۳۱۴ | ۱۳۳۷۸ | ۱۳۴۴۲ | ۱۳۵۰۶ | ۱۳۵۷۰ | ۱۳۶۳۴ | ۱۳۶۹۸ | ۱۳۷۶۲ | ۱۳۸۲۶ | ۱۳۸۹۰ | ۱۳۹۵۴ | ۱۴۰۱۸ | ۱۴۰۸۲ | ۱۴۱۴۶ | ۱۴۲۱۰ | ۱۴۲۷۴ | ۱۴۳۳۸ | ۱۴۴۰۲ | ۱۴۴۶۶ | ۱۴۵۳۰ | ۱۴۵۹۴ | ۱۴۶۵۸ | ۱۴۷۲۲ | ۱۴۷۸۶ | ۱۴۸۵۰ | ۱۴۹۱۴ | ۱۴۹۷۸ | ۱۵۰۴۲ | ۱۵۱۰۶ | ۱۵۱۷۰ | ۱۵۲۳۴ | ۱۵۲۹۸ | ۱۵۳۶۲ | ۱۵۴۲۶ | ۱۵۴۹۰ | ۱۵۵۵۴ | ۱۵۶۱۸ | ۱۵۶۸۲ | ۱۵۷۴۶ | ۱۵۸۱۰ | ۱۵۸۷۴ | ۱۵۹۳۸ | ۱۶۰۰۲ | ۱۶۰۶۶ | ۱۶۱۳۰ | ۱۶۱۹۴ | ۱۶۲۵۸ | ۱۶۳۲۲ | ۱۶۳۸۶ | ۱۶۴۵۰ | ۱۶۵۱۴ | ۱۶۵۷۸ | ۱۶۶۴۲ | ۱۶۷۰۶ | ۱۶۷۷۰ | ۱۶۸۳۴ | ۱۶۸۹۸ | ۱۶۹۶۲ | ۱۷۰۲۶ | ۱۷۰۹۰ | ۱۷۱۵۴ | ۱۷۲۱۸ | ۱۷۲۸۲ | ۱۷۳۴۶ | ۱۷۴۱۰ | ۱۷۴۷۴ | ۱۷۵۳۸ | ۱۷۶۰۲ | ۱۷۶۶۶ | ۱۷۷۳۰ | ۱۷۷۹۴ | ۱۷۸۵۸ | ۱۷۹۲۲ | ۱۷۹۸۶ | ۱۸۰۵۰ | ۱۸۱۱۴ | ۱۸۱۷۸ | ۱۸۲۴۲ | ۱۸۳۰۶ | ۱۸۳۷۰ | ۱۸۴۳۴ | ۱۸۴۹۸ | ۱۸۵۶۲ | ۱۸۶۲۶ | ۱۸۶۹۰ | ۱۸۷۵۴ | ۱۸۸۱۸ | ۱۸۸۸۲ | ۱۸۹۴۶ | ۱۹۰۱۰ | ۱۹۰۷۴ | ۱۹۱۳۸ | ۱۹۲۰۲ | ۱۹۲۶۶ | ۱۹۳۳۰ | ۱۹۳۹۴ | ۱۹۴۵۸ | ۱۹۵۲۲ | ۱۹۵۸۶ | ۱۹۶۵۰ | ۱۹۷۱۴ | ۱۹۷۷۸ | ۱۹۸۴۲ | ۱۹۹۰۶ | ۱۹۹۷۰ | ۲۰۰۳۴ | ۲۰۰۹۸ | ۲۰۱۶۲ | ۲۰۲۲۶ | ۲۰۲۹۰ | ۲۰۳۵۴ | ۲۰۴۱۸ | ۲۰۴۸۲ | ۲۰۵۴۶ | ۲۰۶۱۰ | ۲۰۶۷۴ | ۲۰۷۳۸ | ۲۰۸۰۲ | ۲۰۸۶۶ | ۲۰۹۳۰ | ۲۰۹۹۴ | ۲۱۰۵۸ | ۲۱۱۲۲ | ۲۱۱۸۶ | ۲۱۲۵۰ | ۲۱۳۱۴ | ۲۱۳۷۸ | ۲۱۴۴۲ | ۲۱۵۰۶ | ۲۱۵۷۰ | ۲۱۶۳۴ | ۲۱۶۹۸ | ۲۱۷۶۲ | ۲۱۸۲۶ | ۲۱۸۹۰ | ۲۱۹۵۴ | ۲۲۰۱۸ | ۲۲۰۸۲ | ۲۲۱۴۶ | ۲۲۲۱۰ | ۲۲۲۷۴ | ۲۲۳۳۸ | ۲۲۴۰۲ | ۲۲۴۶۶ | ۲۲۵۳۰ | ۲۲۵۹۴ | ۲۲۶۵۸ | ۲۲۷۲۲ | ۲۲۷۸۶ | ۲۲۸۵۰ | ۲۲۹۱۴ | ۲۲۹۷۸ | ۲۳۰۴۲ | ۲۳۱۰۶ | ۲۳۱۷۰ | ۲۳۲۳۴ | ۲۳۲۹۸ | ۲۳۳۶۲ | ۲۳۴۲۶ | ۲۳۴۹۰ | ۲۳۵۵۴ | ۲۳۶۱۸ | ۲۳۶۸۲ | ۲۳۷۴۶ | ۲۳۸۱۰ | ۲۳۸۷۴ | ۲۳۹۳۸ | ۲۴۰۰۲ | ۲۴۰۶۶ | ۲۴۱۳۰ | ۲۴۱۹۴ | ۲۴۲۵۸ | ۲۴۳۲۲ | ۲۴۳۸۶ | ۲۴۴۵۰ | ۲۴۵۱۴ | ۲۴۵۷۸ | ۲۴۶۴۲ | ۲۴۷۰۶ | ۲۴۷۷۰ | ۲۴۸۳۴ | ۲۴۸۹۸ | ۲۴۹۶۲ | ۲۵۰۲۶ | ۲۵۰۹۰ | ۲۵۱۵۴ | ۲۵۲۱۸ | ۲۵۲۸۲ | ۲۵۳۴۶ | ۲۵۴۱۰ | ۲۵۴۷۴ | ۲۵۵۳۸ | ۲۵۶۰۲ | ۲۵۶۶۶ | ۲۵۷۳۰ | ۲۵۷۹۴ | ۲۵۸۵۸ | ۲۵۹۲۲ | ۲۵۹۸۶ | ۲۶۰۵۰ | ۲۶۱۱۴ | ۲۶۱۷۸ | ۲۶۲۴۲ | ۲۶۳۰۶ | ۲۶۳۷۰ | ۲۶۴۳۴ | ۲۶۴۹۸ | ۲۶۵۶۲ | ۲۶۶۲۶ | ۲۶۶۹۰ | ۲۶۷۵۴ | ۲۶۸۱۸ | ۲۶۸۸۲ | ۲۶۹۴۶ | ۲۷۰۱۰ | ۲۷۰۷۴ | ۲۷۱۳۸ | ۲۷۲۰۲ | ۲۷۲۶۶ | ۲۷۳۳۰ | ۲۷۳۹۴ | ۲۷۴۵۸ | ۲۷۵۲۲ | ۲۷۵۸۶ | ۲۷۶۵۰ | ۲۷۷۱۴ | ۲۷۷۷۸ | ۲۷۸۴۲ | ۲۷۹۰۶ | ۲۷۹۷۰ | ۲۸۰۳۴ | ۲۸۰۹۸ | ۲۸۱۶۲ | ۲۸۲۲۶ | ۲۸۲۹۰ | ۲۸۳۵۴ | ۲۸۴۱۸ | ۲۸۴۸۲ | ۲۸۵۴۶ | ۲۸۶۱۰ | ۲۸۶۷۴ | ۲۸۷۳۸ | ۲۸۸۰۲ | ۲۸۸۶۶ | ۲۸۹۳۰ | ۲۸۹۹۴ | ۲۹۰۵۸ | ۲۹۱۲۲ | ۲۹۱۸۶ | ۲۹۲۵۰ | ۲۹۳۱۴ | ۲۹۳۷۸ | ۲۹۴۴۲ | ۲۹۵۰۶ | ۲۹۵۷۰ | ۲۹۶۳۴ | ۲۹۶۹۸ | ۲۹۷۶۲ | ۲۹۸۲۶ | ۲۹۸۹۰ | ۲۹۹۵۴ | ۳۰۰۱۸ | ۳۰۰۸۲ | ۳۰۱۴۶ | ۳۰۲۱۰ | ۳۰۲۷۴ | ۳۰۳۳۸ | ۳۰۴۰۲ | ۳۰۴۶۶ | ۳۰۵۳۰ | ۳۰۵۹۴ | ۳۰۶۵۸ | ۳۰۷۲۲ | ۳۰۷۸۶ | ۳۰۸۵۰ | ۳۰۹۱۴ | ۳۰۹۷۸ | ۳۱۰۴۲ | ۳۱۱۰۶ | ۳۱۱۷۰ | ۳۱۲۳۴ | ۳۱۲۹۸ | ۳۱۳۶۲ | ۳۱۴۲۶ | ۳۱۴۹۰ | ۳۱۵۵۴ | ۳۱۶۱۸ | ۳۱۶۸۲ | ۳۱۷۴۶ | ۳۱۸۱۰ | ۳۱۸۷۴ | ۳۱۹۳۸ | ۳۲۰۰۲ | ۳۲۰۶۶ | ۳۲۱۳۰ | ۳۲۱۹۴ | ۳۲۲۵۸ | ۳۲۳۲۲ | ۳۲۳۸۶ | ۳۲۴۵۰ | ۳۲۵۱۴ | ۳۲۵۷۸ | ۳۲۶۴۲ | ۳۲۷۰۶ | ۳۲۷۷۰ | ۳۲۸۳۴ | ۳۲۸۹۸ | ۳۲۹۶۲ | ۳۳۰۲۶ | ۳۳۰۹۰ | ۳۳۱۵۴ | ۳۳۲۱۸ | ۳۳۲۸۲ | ۳۳۳۴۶ | ۳۳۴۱۰ | ۳۳۴۷۴ | ۳۳۵۳۸ | ۳۳۶۰۲ | ۳۳۶۶۶ | ۳۳۷۳۰ | ۳۳۷۹۴ | ۳۳۸۵۸ | ۳۳۹۲۲ | ۳۳۹۸۶ | ۳۴۰۵۰ | ۳۴۱۱۴ | ۳۴۱۷۸ | ۳۴۲۴۲ | ۳۴۳۰۶ | ۳۴۳۷۰ | ۳۴۴۳۴ | ۳۴۴۹۸ | ۳۴۵۶۲ | ۳۴۶۲۶ | ۳۴۶۹۰ | ۳۴۷۵۴ | ۳۴۸۱۸ | ۳۴۸۸۲ | ۳۴۹۴۶ | ۳۵۰۱۰ | ۳۵۰۷۴ | ۳۵۱۳۸ | ۳۵۲۰۲ | ۳۵۲۶۶ | ۳۵۳۳۰ | ۳۵۳۹۴ | ۳۵۴۵۸ | ۳۵۵۲۲ | ۳۵۵۸۶ | ۳۵۶۵۰ | ۳۵۷۱۴ | ۳۵۷۷۸ | ۳۵۸۴۲ | ۳۵۹۰۶ | ۳۵۹۷۰ | ۳۶۰۳۴ | ۳۶۰۹۸ | ۳۶۱۶۲ | ۳۶۲۲۶ | ۳۶۲۹۰ | ۳۶۳۵۴ | ۳۶۴۱۸ | ۳۶۴۸۲ | ۳۶۵۴۶ | ۳۶۶۱۰ | ۳۶۶۷۴ | ۳۶۷۳۸ | ۳۶۸۰۲ | ۳۶۸۶۶ | ۳۶۹۳۰ | ۳۶۹۹۴ | ۳۷۰۵۸ | ۳۷۱۲۲ | ۳۷۱۸۶ | ۳۷۲۵۰ | ۳۷۳۱۴ | ۳۷۳۷۸ | ۳۷۴۴۲ | ۳۷۵۰۶ | ۳۷۵۷۰ | ۳۷۶۳۴ | ۳۷۶۹۸ | ۳۷۷۶۲ | ۳۷۸۲۶ | ۳۷۸۹۰ | ۳۷۹۵۴ | ۳۸۰۱۸ | ۳۸۰۸۲ | ۳۸۱۴۶ | ۳۸۲۱۰ | ۳۸۲۷۴ | ۳۸۳۳۸ | ۳۸۴۰۲ | ۳۸۴۶۶ | ۳۸۵۳۰ | ۳۸۵۹۴ | ۳۸۶۵۸ | ۳۸۷۲۲ | ۳۸۷۸۶ | ۳۸۸۵۰ | ۳۸۹۱۴ | ۳۸۹۷۸ | ۳۹۰۴۲ | ۳۹۱۰۶ | ۳۹۱۷۰ | ۳۹۲۳۴ | ۳۹۲۹۸ | ۳۹۳۶۲ | ۳۹۴۲۶ | ۳۹۴۹۰ | ۳۹۵۵۴ | ۳۹۶۱۸ | ۳۹۶۸۲ | ۳۹۷۴۶ | ۳۹۸۱۰ | ۳۹۸۷۴ | ۳۹۹۳۸ | ۴۰۰۰۲ | ۴۰۰۶۶ | ۴۰۱۳۰ | ۴۰۱۹۴ | ۴۰۲۵۸ | ۴۰۳۲۲ | ۴۰۳۸۶ | ۴۰۴۵۰ | ۴۰۵۱۴ | ۴۰۵۷۸ | ۴۰۶۴۲ | ۴۰۷۰۶ | ۴۰۷۷۰ | ۴۰۸۳۴ | ۴۰۸۹۸ | ۴۰۹۶۲ | ۴۱۰۲۶ | ۴۱۰۹۰ | ۴۱۱۵۴ | ۴۱۲۱۸ | ۴۱۲۸۲ | ۴۱۳۴۶ | ۴۱۴۱۰ | ۴۱۴۷۴ | ۴۱۵۳۸ | ۴۱۶۰۲ | ۴۱۶۶۶ | ۴۱۷۳۰ | ۴۱۷۹۴ | ۴۱۸۵۸ | ۴۱۹۲۲ | ۴۱۹۸۶ | ۴۲۰۵۰ | ۴۲۱۱۴ | ۴۲۱۷۸ | ۴۲۲۴۲ | ۴۲۳۰۶ | ۴۲۳۷۰ | ۴۲۴۳۴ | ۴۲۴۹۸ | ۴۲۵۶۲ | ۴۲۶۲۶ | ۴۲۶۹۰ | ۴۲۷۵۴ | ۴۲۸۱۸ | ۴۲۸۸۲ | ۴۲۹۴۶ | ۴۳۰۱۰ | ۴۳۰۷۴ | ۴۳۱۳۸ | ۴۳۲۰۲ | ۴۳۲۶۶ | ۴۳۳۳۰ | ۴۳۳۹۴ | ۴۳۴۵۸ | ۴۳۵۲۲ | ۴۳۵۸۶ | ۴۳۶۵۰ | ۴۳۷۱۴ | ۴۳۷۷۸ | ۴۳۸۴۲ | ۴۳۹۰۶ | ۴۳۹۷۰ | ۴۴۰۳۴ | ۴۴۰۹۸ | ۴۴۱۶۲ | ۴۴۲۲۶ | ۴۴۲۹۰ | ۴۴۳۵۴ | ۴۴۴۱۸ | ۴۴۴۸۲ | ۴۴۵۴۶ | ۴۴۶۱۰ | ۴۴۶۷۴ | ۴۴۷۳۸ | ۴۴۸۰۲ | ۴۴۸۶۶ | ۴۴۹۳۰ | ۴۴۹۹۴ | ۴۵۰۵۸ | ۴۵۱۲۲ | ۴۵۱۸۶ | ۴۵۲۵۰ | ۴۵۳۱۴ | ۴۵۳۷۸ | ۴۵۴۴۲ | ۴۵۵۰۶ | ۴۵۵۷۰ | ۴۵۶۳۴ | ۴۵۶۹۸ | ۴۵۷۶۲ | ۴۵۸۲۶ | ۴۵۸۹۰ | ۴۵۹۵۴ | ۴۶۰۱۸ | ۴۶۰۸۲ | ۴۶۱۴۶ | ۴۶۲۱۰ | ۴۶۲۷۴ | ۴۶۳۳۸ | ۴۶۴۰۲ | ۴۶۴۶۶ | ۴۶۵۳۰ | ۴۶۵۹۴ | ۴۶۶۵۸ | ۴۶۷۲۲ | ۴۶۷۸۶ | ۴۶۸۵۰ | ۴۶۹۱۴ | ۴۶۹۷۸ | ۴۷۰۴۲ | ۴۷۱۰۶ | ۴۷۱۷۰ | ۴۷۲۳۴ | ۴۷۲۹۸ | ۴۷۳۶۲ | ۴۷۴۲۶ | ۴۷۴۹۰ | ۴۷۵۵۴ | ۴۷۶۱۸ | ۴۷۶۸۲ | ۴۷۷۴۶ | ۴۷۸۱۰ | ۴۷۸۷۴ | ۴۷۹۳۸ | ۴۸۰۰۲ | ۴۸۰۶۶ | ۴۸۱۳۰ | ۴۸۱۹۴ | ۴۸۲۵۸ | ۴۸۳۲۲ | ۴۸۳۸۶ | ۴۸۴۵۰ | ۴۸۵۱۴ | ۴۸۵۷۸ | ۴۸۶۴۲ | ۴۸۷۰۶ | ۴۸۷۷۰ | ۴۸۸۳۴ | ۴۸۸۹۸ | ۴۸۹۶۲ | ۴۹۰۲۶ | ۴۹۰۹۰ | ۴۹۱۵۴ | ۴۹۲۱۸ | ۴۹۲۸۲ | ۴۹۳۴۶ | ۴۹۴۱۰ | ۴۹۴۷۴ | ۴۹۵۳۸ | ۴۹۶۰۲ | ۴۹۶۶۶ | ۴۹۷۳۰ | ۴۹۷۹۴ | ۴۹۸۵۸ | ۴۹۹۲۲ | ۵۰۰۰۰ | ۵۰۰۶۴ | ۵۰۱۲۸ | ۵۰۱۹۲ | ۵۰۲۵۶ | ۵۰۳۲۰ | ۵۰۳۸۴ | ۵۰۴۴۸ | ۵۰۵۱۲ | ۵۰۵۷۶ | ۵۰۶۴۰ | ۵۰۷۰۴ | ۵۰۷۶۸ | ۵۰۸۳۲ | ۵۰۸۹۶ | ۵۰۹۶۰ | ۵۱۰۲۴ | ۵۱۰۸۸ | ۵۱۱۵۲ | ۵۱۲۱۶ | ۵۱۲۸۰ | ۵۱۳۴۴ | ۵۱۴۰۸ | ۵۱۴۷۲ | ۵۱۵۳۶ | ۵۱۶۰۰ | ۵۱۶۶۴ | ۵۱۷۲۸ | ۵۱۷۹۲ | ۵۱۸۵۶ | ۵۱۹۲۰ | ۵۱۹۸۴ | ۵۲۰۴۸ | ۵۲۱۱۲ | ۵۲۱۷۶ | ۵۲۲۴۰ | ۵۲۳۰۴ | ۵۲۳ |

[illegible]

نور محمدی

وہی ہے

[illegible]

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|------|
| 19 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 | 129 | 130 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 138 | 139 | 140 | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 150 | 151 | 152 | 153 | 154 | 155 | 156 | 157 | 158 | 159 | 160 | 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 170 | 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 | 181 | 182 | 183 | 184 | 185 | 186 | 187 | 188 | 189 | 190 | 191 | 192 | 193 | 194 | 195 | 196 | 197 | 198 | 199 | 200 | 201 | 202 | 203 | 204 | 205 | 206 | 207 | 208 | 209 | 210 | 211 | 212 | 213 | 214 | 215 | 216 | 217 | 218 | 219 | 220 | 221 | 222 | 223 | 224 | 225 | 226 | 227 | 228 | 229 | 230 | 231 | 232 | 233 | 234 | 235 | 236 | 237 | 238 | 239 | 240 | 241 | 242 | 243 | 244 | 245 | 246 | 247 | 248 | 249 | 250 | 251 | 252 | 253 | 254 | 255 | 256 | 257 | 258 | 259 | 260 | 261 | 262 | 263 | 264 | 265 | 266 | 267 | 268 | 269 | 270 | 271 | 272 | 273 | 274 | 275 | 276 | 277 | 278 | 279 | 280 | 281 | 282 | 283 | 284 | 285 | 286 | 287 | 288 | 289 | 290 | 291 | 292 | 293 | 294 | 295 | 296 | 297 | 298 | 299 | 300 | 301 | 302 | 303 | 304 | 305 | 306 | 307 | 308 | 309 | 310 | 311 | 312 | 313 | 314 | 315 | 316 | 317 | 318 | 319 | 320 | 321 | 322 | 323 | 324 | 325 | 326 | 327 | 328 | 329 | 330 | 331 | 332 | 333 | 334 | 335 | 336 | 337 | 338 | 339 | 340 | 341 | 342 | 343 | 344 | 345 | 346 | 347 | 348 | 349 | 350 | 351 | 352 | 353 | 354 | 355 | 356 | 357 | 358 | 359 | 360 | 361 | 362 | 363 | 364 | 365 | 366 | 367 | 368 | 369 | 370 | 371 | 372 | 373 | 374 | 375 | 376 | 377 | 378 | 379 | 380 | 381 | 382 | 383 | 384 | 385 | 386 | 387 | 388 | 389 | 390 | 391 | 392 | 393 | 394 | 395 | 396 | 397 | 398 | 399 | 400 | 401 | 402 | 403 | 404 | 405 | 406 | 407 | 408 | 409 | 410 | 411 | 412 | 413 | 414 | 415 | 416 | 417 | 418 | 419 | 420 | 421 | 422 | 423 | 424 | 425 | 426 | 427 | 428 | 429 | 430 | 431 | 432 | 433 | 434 | 435 | 436 | 437 | 438 | 439 | 440 | 441 | 442 | 443 | 444 | 445 | 446 | 447 | 448 | 449 | 450 | 451 | 452 | 453 | 454 | 455 | 456 | 457 | 458 | 459 | 460 | 461 | 462 | 463 | 464 | 465 | 466 | 467 | 468 | 469 | 470 | 471 | 472 | 473 | 474 | 475 | 476 | 477 | 478 | 479 | 480 | 481 | 482 | 483 | 484 | 485 | 486 | 487 | 488 | 489 | 490 | 491 | 492 | 493 | 494 | 495 | 496 | 497 | 498 | 499 | 500 | 501 | 502 | 503 | 504 | 505 | 506 | 507 | 508 | 509 | 510 | 511 | 512 | 513 | 514 | 515 | 516 | 517 | 518 | 519 | 520 | 521 | 522 | 523 | 524 | 525 | 526 | 527 | 528 | 529 | 530 | 531 | 532 | 533 | 534 | 535 | 536 | 537 | 538 | 539 | 540 | 541 | 542 | 543 | 544 | 545 | 546 | 547 | 548 | 549 | 550 | 551 | 552 | 553 | 554 | 555 | 556 | 557 | 558 | 559 | 560 | 561 | 562 | 563 | 564 | 565 | 566 | 567 | 568 | 569 | 570 | 571 | 572 | 573 | 574 | 575 | 576 | 577 | 578 | 579 | 580 | 581 | 582 | 583 | 584 | 585 | 586 | 587 | 588 | 589 | 590 | 591 | 592 | 593 | 594 | 595 | 596 | 597 | 598 | 599 | 600 | 601 | 602 | 603 | 604 | 605 | 606 | 607 | 608 | 609 | 610 | 611 | 612 | 613 | 614 | 615 | 616 | 617 | 618 | 619 | 620 | 621 | 622 | 623 | 624 | 625 | 626 | 627 | 628 | 629 | 630 | 631 | 632 | 633 | 634 | 635 | 636 | 637 | 638 | 639 | 640 | 641 | 642 | 643 | 644 | 645 | 646 | 647 | 648 | 649 | 650 | 651 | 652 | 653 | 654 | 655 | 656 | 657 | 658 | 659 | 660 | 661 | 662 | 663 | 664 | 665 | 666 | 667 | 668 | 669 | 670 | 671 | 672 | 673 | 674 | 675 | 676 | 677 | 678 | 679 | 680 | 681 | 682 | 683 | 684 | 685 | 686 | 687 | 688 | 689 | 690 | 691 | 692 | 693 | 694 | 695 | 696 | 697 | 698 | 699 | 700 | 701 | 702 | 703 | 704 | 705 | 706 | 707 | 708 | 709 | 710 | 711 | 712 | 713 | 714 | 715 | 716 | 717 | 718 | 719 | 720 | 721 | 722 | 723 | 724 | 725 | 726 | 727 | 728 | 729 | 730 | 731 | 732 | 733 | 734 | 735 | 736 | 737 | 738 | 739 | 740 | 741 | 742 | 743 | 744 | 745 | 746 | 747 | 748 | 749 | 750 | 751 | 752 | 753 | 754 | 755 | 756 | 757 | 758 | 759 | 760 | 761 | 762 | 763 | 764 | 765 | 766 | 767 | 768 | 769 | 770 | 771 | 772 | 773 | 774 | 775 | 776 | 777 | 778 | 779 | 780 | 781 | 782 | 783 | 784 | 785 | 786 | 787 | 788 | 789 | 790 | 791 | 792 | 793 | 794 | 795 | 796 | 797 | 798 | 799 | 800 | 801 | 802 | 803 | 804 | 805 | 806 | 807 | 808 | 809 | 810 | 811 | 812 | 813 | 814 | 815 | 816 | 817 | 818 | 819 | 820 | 821 | 822 | 823 | 824 | 825 | 826 | 827 | 828 | 829 | 830 | 831 | 832 | 833 | 834 | 835 | 836 | 837 | 838 | 839 | 840 | 841 | 842 | 843 | 844 | 845 | 846 | 847 | 848 | 849 | 850 | 851 | 852 | 853 | 854 | 855 | 856 | 857 | 858 | 859 | 860 | 861 | 862 | 863 | 864 | 865 | 866 | 867 | 868 | 869 | 870 | 871 | 872 | 873 | 874 | 875 | 876 | 877 | 878 | 879 | 880 | 881 | 882 | 883 | 884 | 885 | 886 | 887 | 888 | 889 | 890 | 891 | 892 | 893 | 894 | 895 | 896 | 897 | 898 | 899 | 900 | 901 | 902 | 903 | 904 | 905 | 906 | 907 | 908 | 909 | 910 | 911 | 912 | 913 | 914 | 915 | 916 | 917 | 918 | 919 | 920 | 921 | 922 | 923 | 924 | 925 | 926 | 927 | 928 | 929 | 930 | 931 | 932 | 933 | 934 | 935 | 936 | 937 | 938 | 939 | 940 | 941 | 942 | 943 | 944 | 945 | 946 | 947 | 948 | 949 | 950 | 951 | 952 | 953 | 954 | 955 | 956 | 957 | 958 | 959 | 960 | 961 | 962 | 963 | 964 | 965 | 966 | 967 | 968 | 969 | 970 | 971 | 972 | 973 | 974 | 975 | 976 | 977 | 978 | 979 | 980 | 981 | 982 | 983 | 984 | 985 | 986 | 987 | 988 | 989 | 990 | 991 | 992 | 993 | 994 | 995 | 996 | 997 | 998 | 999 | 1000 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|------|

۱۰۰

لوہا ریتی کا نام

| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ | ۱۹ | ۲۰ | ۲۱ | ۲۲ | ۲۳ | ۲۴ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ | ۳۰ | ۳۱ | ۳۲ | ۳۳ | ۳۴ | ۳۵ | ۳۶ | ۳۷ | ۳۸ | ۳۹ | ۴۰ | ۴۱ | ۴۲ | ۴۳ | ۴۴ | ۴۵ | ۴۶ | ۴۷ | ۴۸ | ۴۹ | ۵۰ | ۵۱ | ۵۲ | ۵۳ | ۵۴ | ۵۵ | ۵۶ | ۵۷ | ۵۸ | ۵۹ | ۶۰ | ۶۱ | ۶۲ | ۶۳ | ۶۴ | ۶۵ | ۶۶ | ۶۷ | ۶۸ | ۶۹ | ۷۰ | ۷۱ | ۷۲ | ۷۳ | ۷۴ | ۷۵ | ۷۶ | ۷۷ | ۷۸ | ۷۹ | ۸۰ | ۸۱ | ۸۲ | ۸۳ | ۸۴ | ۸۵ | ۸۶ | ۸۷ | ۸۸ | ۸۹ | ۹۰ | ۹۱ | ۹۲ | ۹۳ | ۹۴ | ۹۵ | ۹۶ | ۹۷ | ۹۸ | ۹۹ | ۱۰۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ | ۱۲ | ۱۳ | ۱۴ | ۱۵ | ۱۶ | ۱۷ | ۱۸ | ۱۹ | ۲۰ | ۲۱ | ۲۲ | ۲۳ | ۲۴ | ۲۵ | ۲۶ | ۲۷ | ۲۸ | ۲۹ | ۳۰ | ۳۱ | ۳۲ | ۳۳ | ۳۴ | ۳۵ | ۳۶ | ۳۷ | ۳۸ | ۳۹ | ۴۰ | ۴۱ | ۴۲ | ۴۳ | ۴۴ | ۴۵ | ۴۶ | ۴۷ | ۴۸ | ۴۹ | ۵۰ | ۵۱ | ۵۲ | ۵۳ | ۵۴ | ۵۵ | ۵۶ | ۵۷ | ۵۸ | ۵۹ | ۶۰ | ۶۱ | ۶۲ | ۶۳ | ۶۴ | ۶۵ | ۶۶ | ۶۷ | ۶۸ | ۶۹ | ۷۰ | ۷۱ | ۷۲ | ۷۳ | ۷۴ | ۷۵ | ۷۶ | ۷۷ | ۷۸ | ۷۹ | ۸۰ | ۸۱ | ۸۲ | ۸۳ | ۸۴ | ۸۵ | ۸۶ | ۸۷ | ۸۸ | ۸۹ | ۹۰ | ۹۱ | ۹۲ | ۹۳ | ۹۴ | ۹۵ | ۹۶ | ۹۷ | ۹۸ | ۹۹ | ۱۰۰ |

فرق اس قدر جلدی بدلتے ہیں کہ دیکھ نہیں ہو سکتے

لوہا ریتی کا نام

مقاویر مستقله

ایک زاویہ نیمقطری = $۱۴^{\circ}۵۷'$ ۳۵ تقریباً = ۲۰۶۲۶۵

لوک $۵۵۳۱۴۴۲۵۵ = ۲۰۶۲۶۵$

لوک $۰.۵۴۹۷۱۳۹۹ = \pi$

$۳۶۱۳۱۵۹۲۶۵ = \pi$

لوک $۲۶۵۰۲۸۵۰۱ = \frac{1}{\pi}$

$۰.۵۳۱۸۳۰۹۸۹ = \frac{1}{\pi}$

لوک $۶۶۲۴۱۸۷۷۴ = \frac{\pi}{180}$

$۰.۰۱۷۴۵۳۲۹ = \frac{\pi}{180}$

لوک $۱۶۷۵۸۱۲۲۶ = \frac{180}{\pi}$

$۵۷۶۲۹۵۷۷۹۵ = \frac{180}{\pi}$

لوک $۰.۵۹۹۵۲۹۹۷ = \frac{1}{\pi^2}$

$۹.۸۶۹۶۰۴۴۰ = \frac{1}{\pi^2}$

لوک $۱۶۰۰۵۷۰۰۳ = \frac{1}{\pi^2}$

$۰.۵۱۰۱۳۲۱۱۸ = \frac{1}{\pi^2}$

لوک $۰.۶۴۸۵۷۴۹ = \frac{1}{\pi^3}$

$۱.۷۷۲۴۵۳۸۵ = \frac{1}{\pi^3}$

لوک $۱۶۷۵۱۲۲۵۱ = \frac{1}{\pi^3}$

$۰.۵۵۶۴۱۸۹۵۸ = \frac{1}{\pi^3}$

لوک $۰.۵۱۷۵۷۱۹۶ = \frac{1}{\pi^4}$

$۱.۶۴۴۵۹۱۸۹ = \frac{1}{\pi^4}$

لوک $۱۶۸۳۴۲۸۳۴ = \frac{1}{\pi^4}$

$۰.۵۶۸۲۷۸۴۰۶ = \frac{1}{\pi^4}$

$۱.۷۷۲۴۰۵۰۸ = \frac{1}{\pi^5}$

$۱.۵۵۱۲۴۱۳۵ = \frac{1}{\pi^5}$

$۲.۶۴۴۵۹۹۸۹ = \frac{1}{\pi^5}$

$۲.۶۴۴۶۰۶۷۹ = \frac{1}{\pi^5}$

$۲.۶۴۴۶۲۷۷۱ = \frac{1}{\pi^5}$

$۲.۶۴۴۵۷۵۱۴ = \frac{1}{\pi^5}$

$۳.۶۴۴۶۷۷۷ = \frac{1}{\pi^5}$

541

(" A ")

TRIGONOMETRY.

| | |
|---------------------------------------|---------------------------------|
| Angle (Right angle) | زاویہ (زاویہ قائمہ) |
| Arc | قوس |
| Angle of Elevation | زاویہ ارتفاع |
| Angle of depression | زاویہ انخفاض |
| Ambiguous case | صورت مشتبہ |
| Bisector (Internal)
(External) | منصف { داخلی
خارجی } |
| Base line | بنیادی خط |
| Bearings (Compass) | جہات |
| Circular measure | قوسی پیمانہ |
| Centesimal measure | سٹی پیمانہ |
| Clock wise (Counter clock wise) | موافق سمت ساعت (مقابل سمت ساعت) |
| Constants | مقادیر مستقلہ |
| Circumference | محیط |
| Chord | وتر |
| Cosine | جیب التمام |
| Cotangent | ماس التمام |
| Cosecant | قاطع التمام |

